


МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ЗГИНУ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язування геометрично нелінійних задач згину пластин складної форми. Постановку задачі виконано у рамках уточненої теорії вищого порядку, що враховує квадратичний закон розподілу поперечних дотичних напружень по товщині. Для лінеаризації нелінійної задачі використано метод неперервного продовження за параметром. Для варіаційної постановки лінеаризованої задачі побудовано функціонал у формі Лагранжа, заданий на кінематично можливих швидкостях переміщень і функції зсуву. Для знаходження основних невідомих задачі нелінійного згину пластини сформульовано задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Задачу Коші розв'язано методом Рунге – Кутта – Мерсона з автоматичним вибором кроку. Праві частини диференціальних рівнянь при фіксованих значеннях параметра навантаження, які відповідають схемі Рунге – Кутта – Мерсона, знайдено із розв'язку варіаційної задачі для функціонала Лагранжа. Варіаційні задачі розв'язано методом Рітца у поєднанні з методом R -функцій. Розв'язано тестові задачі для жорстко закріпленої та шарнірно опертої пластин, що знаходяться під дією рівномірно розподіленого навантаження різної інтенсивності. Розв'язано задачу згину пластини складної форми. Досліджено вплив геометричної форми на напружено-деформований стан.

Ключові слова: гнучка пластина, геометрична нелінійність, уточнена теорія, складна форма, метод R -функцій.

Вступ. Пластини як конструктивні елементи, широко використовуються в аерокосмічній техніці, машинобудуванні, енергетиці, хімічній промисловості та інших галузях. Теорії і методи розрахунку напружено-деформованого стану пластин, зокрема у геометрично нелінійній постановці, широко представлені в літературі та продовжують розвиватися. Достатньо повний огляд методів розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії пластин і оболонок представлений, наприклад, у роботах [6, 7, 10]. Для формулювання вихідної задачі використовуються як класична геометрично нелінійна постановка [4], так і уточнені постановки: теорія зсуву першого порядку (*First-order shear deformation theory (FSDT)*) [6, 15] та різноманітні уточнені теорії вищих порядків (*High-order shear deformation theory (HSDT)*) [1, 10, 13, 14, 18]. Теорія зсуву першого порядку має недоліки, пов'язані з припущенням про незмінність деформації зсуву за товщиною. Уточнені теорії вищих порядків забезпечують збільшення точності обчислення напружень, але за рахунок збільшення обчислювальних затрат. Найчастіше в дослідженнях розглядають пластини канонічної геометричної форми. За певних умов навантаження та закріплення іноді можна одержати розв'язок крайової задачі в аналітичному вигляді. Але, якщо пластина має складну геометричну форму, то аналітично розв'язати крайову задачу не вдається. У цьому випадку необхідно використовувати універсальні методи, що дозволяють знаходити наближений розв'язок в областях складної форми, наприклад, метод скінченних елементів [2, 12, 16], метод R -функцій [9, 14], метод «занурення» [17] та ін. Аналіз наявної літератури показав, що кількість робіт, присвячених дослідженню геометрично нелінійного деформування пластин складної форми є досить обмеженою, і на сьогодні продовжується пошук ефективних методів лінеаризації і розв'язання таких задач.

Метою цієї роботи є розробка чисельно-аналітичного методу дослідження геометрично нелінійного деформування пластин складної форми, що

 snsklepus@ukr.net

ґ базується на використанні уточненої теорії та методу R -функцій.

1. Постановка задачі і метод розв'язування. Розглянемо в прямокутній декартовій системі координат Ox_1x_2z ізотропну пластину товщини h довільної форми Ω , що знаходиться під дією поперечного навантаження інтенсивності $q_z^* = q_z^*(x_1, x_2)$.

Для постановки задачі будемо використовувати уточнену теорію вищого порядку, яка враховує нелінійний розподіл поперечних дотичних напружень за товщиною [1, 10]. Поперечними нормальними напруженнями σ_{33} будемо нехтувати. Також вважаємо, що переміщення v_3 уздовж осі Oz не залежить від координати z . Основні гіпотези уточненої теорії такі [1, 10]:

$$\sigma_{i3} = 2G\varepsilon_{i3} = Gf'(z)\psi_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, \quad \sigma_{33} = 0,$$

$$\varepsilon_{33} = v_{3,3} = 0, \quad v_3(x_1, x_2, z) = w(x_1, x_2).$$

Тут $\psi_i(x_1, x_2)$ – шукані функції зсуву; $f(z)$ – функція розподілу поперечних дотичних напружень, яка у випадку співпадіння координатної поверхні пластини із серединною, має вигляд [1, 10]:

$$f(z) = z - \frac{4}{3}z^3/h^2.$$

Переміщення точок пластини вздовж осей Ox_1 , Ox_2 визначаються за формулами [1, 10]

$$v_i(x_1, x_2, z) = u_i - zw_{,i} + f\psi_i, \quad i = 1, 2,$$

де $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$ – переміщення точок координатної поверхні пластини вздовж осей Ox_1 , Ox_2 , Oz відповідно.

Якщо стріла прогину співмірна з товщиною пластини, $w_{\max} \geq 0.25h$, то для постановки задачі необхідно використовувати геометрично нелінійну теорію, яка враховує великі прогини. Вважаємо, що переміщення u_1 , u_2 є набагато меншими, ніж прогини w . У цьому випадку деформації обчислюємо через переміщення за такими нелінійними співвідношеннями [1, 10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} + 0.5w_{,1}^2 - zw_{,11} + f\psi_{1,1}, & \varepsilon_{22} &= u_{2,2} + 0.5w_{,2}^2 - zw_{,2} + f\psi_{2,2}, \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} + w_{,1}w_{,2} - 2zw_{,12} + f(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}), \\ \gamma_{i3} &= 2\varepsilon_{i3} = f'\psi_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Напруження і деформації пов'язані між собою законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), & \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \\ \sigma_{ij} &= G\gamma_{ij}, & i, j &= 1, 2, 3, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут E , ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву.

Для лінеаризації і постановки задачі геометрично нелінійного згину пластин будемо використовувати метод продовження розв'язку за параметром [5]. У розглядуваному випадку природно пов'язати цей параметр із зовнішнім навантаженням. Введемо до розгляду зростаючий параметр $t \in [t_0, t_*]$, що характеризує процес навантаження. Тут t_0 є значенням параметра, при якому прогини пластини будуть малими, відповідно, задача деформування буде геометрично лінійною, а значення t_* відповідає задано-

му рівню навантаження $q_z(t_*) = q_z^*$. Для зовнішнього навантаження приймемо лінійний закон:

$$q_z(t) = q_{z0} + tq_{z1}, \quad (3)$$

де $t \in [0, t_*]$.

Оскільки розв'язується пружна задача, то кінцевий результат не залежить від шляху навантаження і можуть бути прийняті інші закони.

Продиференціювавши співвідношення (1) за параметром t , отримаємо формули, що пов'язують похідні деформацій і переміщень:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \dot{u}_{1,1} + w_{,1}\dot{w}_{,1} - z\dot{w}_{,11} + f\dot{\psi}_{1,1}, & \dot{\epsilon}_{22} &= \dot{u}_{2,2} + w_{,2}\dot{w}_{,2} - z\dot{w}_{,22} + f\dot{\psi}_{2,2}, \\ \dot{\gamma}_{12} &= 2\dot{\epsilon}_{12} = \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} + w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1} - 2z\dot{w}_{,12} + f(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1}), \\ \dot{\gamma}_{i3} &= 2\dot{\epsilon}_{i3} = f'\dot{\psi}_i, & i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут крапка над символами позначає повну похідну функції $\frac{d(\cdot)}{dt}$ за аргументом t . Далі, по тексту статті, похідні за t будемо називати швидкостями. Якщо вважати кути повороту $w_{,i}$ заданими функціями, то співвідношення (4) є лінійними.

Продиференціювавши закон Гука (2) за t і врахувавши (4), для швидкостей напружень запишемо

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{u}_{1,1} + \nu\dot{u}_{2,2} + w_{,1}\dot{w}_{,1} + \nu w_{,2}\dot{w}_{,2} - z(\dot{w}_{,11} + \nu\dot{w}_{,22}) + \\ &\quad + f(\dot{\psi}_{1,1} + \nu\dot{\psi}_{2,2})], \\ \dot{\sigma}_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{u}_{2,2} + \nu\dot{u}_{1,1} + w_{,2}\dot{w}_{,2} + \nu w_{,1}\dot{w}_{,1} - z(\dot{w}_{,22} + \nu\dot{w}_{,11}) + \\ &\quad + f(\dot{\psi}_{2,2} + \nu\dot{\psi}_{1,1})], \\ \dot{\sigma}_{12} &= G[\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} + w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1} - 2z\dot{w}_{,12} + f(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1})], \\ \dot{\sigma}_{i3} &= Gf'\dot{\psi}_i, & i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Для варіаційної постановки задачі використаємо принцип віртуальної роботи для квазістатичних задач [3]. Відповідний функціонал у формі Лагранжа, записаний відносно кінематично можливих швидкостей переміщень для тривимірного тіла, має вигляд [3]

$$L(\dot{v}_i) = 0.5 \iiint_V (\dot{\sigma}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} + \sigma_{ij}\dot{v}_{k,i}\dot{v}_{k,j}) dV - \iint_{S_p} \dot{P}_i\dot{v}_i dS, \quad i, j, k, \ell = 1, 2, 3, \quad (6)$$

Вважаючи, що $\dot{v}_{i,j} \sim \dot{w}_{,i}^2 \ll 1$, і нехтуючи членами вищого порядку малості у виразі (6), для гнучкої пластини можемо записати

$$\begin{aligned} L &= 0.5 \iint_{\Omega(h)} \int (\dot{\sigma}_{kl}\dot{\epsilon}_{kl} + \sigma_{11}\dot{w}_{,1}^2 + \sigma_{22}\dot{w}_{,2}^2 + 2\sigma_{12}\dot{w}_{,1}\dot{w}_{,2}) dx_1 dx_2 dz - \\ &\quad - \iint_{\Omega} \dot{q}_z \dot{w} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставивши (4), (5) у (7) та проінтегрувавши за координатою z , отримаємо функціонал у формі Лагранжа для лінеаризованої задачі згину гнучкої пластини:

$$L = L_{\text{lin}} + L_{\text{non}}, \quad (8)$$

де $L_{\text{lin}}(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$, $L_{\text{non}}(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ – «лінійна» та «нелінійна» частини функціонала, які визначаються такими формулами:

$$\begin{aligned}
L_{\text{lin}} = 0.5 \iint_{\Omega} & \left[A_1(\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2) + 2A_2\dot{u}_{1,1}\dot{u}_{2,2} + A_3(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})^2 - \right. \\
& - 2B_1(\dot{u}_{1,1}\dot{w}_{,11} + \dot{u}_{2,2}\dot{w}_{,22}) - 2B_2(\dot{u}_{1,1}\dot{w}_{,22} + \dot{u}_{2,2}\dot{w}_{,11}) - \\
& - 2B_3\dot{w}_{,12}(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) + D_1(\dot{w}_{,11}^2 + \dot{w}_{,22}^2) + 2D_2\dot{w}_{,11}\dot{w}_{,22} + \\
& + D_3\dot{w}_{,12}^2 + 2F_1(\dot{u}_{1,1}\dot{\psi}_{1,1} + \dot{u}_{2,2}\dot{\psi}_{2,2}) + \\
& + 2F_2(\dot{u}_{1,1}\dot{\psi}_{2,2} + \dot{u}_{2,2}\dot{\psi}_{1,1}) + 2F_3(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1}) - \\
& - 2F_4(\dot{w}_{,11}\dot{\psi}_{1,1} + \dot{w}_{,22}\dot{\psi}_{2,2}) - 2F_5(\dot{w}_{,11}\dot{\psi}_{2,2} + \dot{w}_{,22}\dot{\psi}_{1,1}) - \\
& - 2F_6\dot{w}_{,12}(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1}) + F_7(\dot{\psi}_{1,1}^2 + \dot{\psi}_{2,2}^2) + 2F_8\dot{\psi}_{1,1}\dot{\psi}_{2,2} + \\
& \left. + F_9(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1})^2 + F_{10}(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) \right] dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} \dot{q}_z \dot{w} dx_1 dx_2, \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\text{non}} = 0.5 \iint_{\Omega} & \left\{ A_1(w_{,1}^2 \dot{w}_{,1}^2 + w_{,2}^2 \dot{w}_{,2}^2 + 2w_{,1}\dot{u}_{1,1}\dot{w}_{,1} + 2w_{,2}\dot{u}_{2,2}\dot{w}_{,2}) + \right. \\
& + 2A_2(w_{,1}\dot{u}_{2,2}\dot{w}_{,1} + w_{,2}\dot{u}_{1,1}\dot{w}_{,2} + w_{,1}w_{,2}\dot{w}_{,1}\dot{w}_{,2}) + \\
& + A_3[w_{,2}^2 \dot{w}_{,1}^2 + w_{,1}^2 \dot{w}_{,2}^2 + 2(w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1})(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) + \\
& + 2w_{,1}w_{,2}\dot{w}_{,1}\dot{w}_{,2}] - 2B_1(w_{,1}\dot{w}_{,1}\dot{w}_{,11} + w_{,2}\dot{w}_{,2}\dot{w}_{,22}) - \\
& - 2B_2(w_{,1}\dot{w}_{,1}\dot{w}_{,22} + w_{,2}\dot{w}_{,2}\dot{w}_{,11}) - 2B_3\dot{w}_{,12}(w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1}) + \\
& + 2F_1(w_{,1}\dot{w}_{,1}\dot{\psi}_{1,1} + w_{,2}\dot{w}_{,2}\dot{\psi}_{2,2}) + 2F_2(w_{,1}\dot{w}_{,1}\dot{\psi}_{2,2} + \\
& + w_{,2}\dot{w}_{,2}\dot{\psi}_{1,1}) + 2F_3(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1})(w_{,2}\dot{w}_{,1} + w_{,1}\dot{w}_{,2}) + \\
& \left. + f_{11}\dot{w}_{,1}^2 + f_{22}\dot{w}_{,2}^2 + 2f_{12}\dot{w}_{,1}\dot{w}_{,2} \right\} dx_1 dx_2, \tag{10}
\end{aligned}$$

де Ω – область, у якій відшукується наближений розв'язок задачі;

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} dz, \quad A_2 = \nu A_1, \quad A_3 = \int_{(h)} G dz, \quad B_1 = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz, \quad B_2 = \nu B_1, \\
B_3 &= 2 \int_{(h)} Gz dz, \quad D_1 = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz, \quad D_2 = \nu D_1, \quad D_3 = 4 \int_{(h)} Gz^2 dz, \\
F_1 &= \int_{(h)} \frac{Ef}{1-\nu^2} dz, \quad F_2 = \nu F_1, \quad F_3 = \int_{(h)} Gf dz, \quad F_4 = \int_{(h)} \frac{Ezf}{1-\nu^2} dz, \quad F_5 = \nu F_4, \\
F_6 &= 2 \int_{(h)} Gfz dz, \quad F_7 = \int_{(h)} \frac{Ef^2}{1-\nu^2} dz, \quad F_8 = \nu F_7, \quad F_9 = \int_{(h)} Gf^2 dz, \\
F_{10} &= \int_{(h)} Gf'^2 dz, \quad f_{11} = \int_{(h)} \sigma_{11} dz, \quad f_{12} = \int_{(h)} \sigma_{12} dz, \quad f_{22} = \int_{(h)} \sigma_{22} dz.
\end{aligned}$$

У формулі (10) повороти $w_{,1}$, $w_{,2}$ та «фіктивні» сили f_{11} , f_{22} , f_{12} вважаються заданими для кожного фіксованого значення параметра t і не варіюються.

Розв'язок варіаційного рівняння $\delta L = 0$ дає розподіл полів швидкостей переміщень і функцій зсуву для значень параметра $t > 0$ у будь-якій точці пластини. Основні невідомі задачі нелінійного згину пластини можуть бути знайдені шляхом інтегрування відповідних полів швидкостей як розв'язки задачі Коші за параметром t для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= \dot{u}_1, & \frac{du_2}{dt} &= \dot{u}_2, & \frac{dw}{dt} &= \dot{w}, & \frac{dw_{,1}}{dt} &= \dot{w}_{,1}, & \frac{dw_{,2}}{dt} &= \dot{w}_{,2}, \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= \dot{\psi}_1, & \frac{d\psi_2}{dt} &= \dot{\psi}_2, \\
\frac{d\varepsilon_{11}}{dt} &= \dot{u}_{1,1} + w_{,1}\dot{w}_{,1} - z\dot{w}_{,11} + f\dot{\psi}_{1,1}, & \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} &= \dot{u}_{2,2} + w_{,2}\dot{w}_{,2} - z\dot{w}_{,22} + f\dot{\psi}_{2,2}, \\
\frac{d\gamma_{12}}{dt} &= \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} + w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1} - 2z\dot{w}_{,12} + f(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1}), \\
\frac{d\gamma_{13}}{dt} &= f'\dot{\psi}_1, & \frac{d\gamma_{23}}{dt} &= f'\dot{\psi}_2, \\
\frac{d\sigma_{11}}{dt} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{u}_{1,1} + \nu\dot{u}_{2,2} + w_{,1}\dot{w}_{,1} + \nu w_{,2}\dot{w}_{,2} - z(\dot{w}_{,11} + \nu\dot{w}_{,22}) + \\
& \quad + f(\dot{\psi}_{1,1} + \nu\dot{\psi}_{2,2})], \\
\frac{d\sigma_{22}}{dt} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{u}_{2,2} + \nu\dot{u}_{1,1} + w_{,2}\dot{w}_{,2} + \nu w_{,1}\dot{w}_{,1} - z(\dot{w}_{,22} + \nu\dot{w}_{,11}) + \\
& \quad + f(\dot{\psi}_{2,2} + \nu\dot{\psi}_{1,1})], \\
\frac{d\sigma_{12}}{dt} &= G[\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} + w_{,1}\dot{w}_{,2} + w_{,2}\dot{w}_{,1} - 2z\dot{w}_{,12} + f(\dot{\psi}_{1,2} + \dot{\psi}_{2,1})], \\
\frac{d\sigma_{13}}{dt} &= Gf'\dot{\psi}_1, & \frac{d\sigma_{23}}{dt} &= Gf'\dot{\psi}_2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Початкові умови для рівнянь (11) знаходимо із розв'язку задачі лінійного деформування при $q_z(0) = q_{z0}$. Для цього можна використовувати функціонал у формі (9), замінивши в ньому швидкості функцій самими функціями.

Початкову задачу для системи рівнянь (11) будемо розв'язувати методом Рунге – Кутта – Мерсона (РКМ) з автоматичним вибором кроку [8]. Праві частини рівнянь при фіксованих значеннях $t \neq 0$, що відповідають схемі РКМ, знаходимо із розв'язку варіаційної задачі для функціонала (8). Варіаційні задачі будемо розв'язувати методом Рітца у поєднанні із методом R -функцій [11]. Метод R -функцій дозволяє точно врахувати геометричну інформацію про крайову задачу і подати наближений розв'язок у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє всі граничні умови (загальна структура) або частину (часткова структура). Структура розв'язку є основою для побудови систем координатних функцій варіаційних методів.

2. Числові результати. Як тестовий приклад розглянемо згин квадратної жорстко закріпленої пластини [19]. Пластина знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження. Геометричні розміри пластини є таки-

ми: довжина сторони $2a = 7.62$ м, товщина $h = 0.0762$ м. Пружні характеристики матеріалу: $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.316$.

Граничні умови для жорсткого закріплення мають вигляд

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{w}_{,n} = 0, \quad \dot{u}_1 = 0, \quad \dot{u}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0,$$

а відповідна структура розв'язку:

$$\dot{w} = \omega^2 \Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega \Phi_2, \quad \dot{u}_2 = \omega \Phi_3, \quad \dot{\psi}_1 = \omega \Phi_4, \quad \dot{\psi}_2 = \omega \Phi_5.$$

Тут Φ_i , $i = 1, \dots, 5$, – невизначені компоненти структури розв'язку; функція $\omega = \omega(x_1, x_2)$ будується за допомогою теорії R -функцій і задовольняє умови $\omega = 0$, $\omega_{,n} = -1$ на межі $\partial\Omega$, $\omega > 0$ всередині Ω (\mathbf{n} – зовнішня нормаль до контуру $\partial\Omega$). Вимога нормалізованості функції ω до першого порядку ($\omega_{,n} = -1$) у деяких випадках не є обов'язковою.

У випадку квадратної пластини функція ω має вигляд

$$\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2,$$

де $\omega_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2)$, $\omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2)$, а символ \wedge_0 позначає R -кон'юнкцію

$$[11]: \omega_1 \wedge_0 \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

При чисельній реалізації невизначені компоненти структури розв'язку подавали у вигляді скінченних рядів $\Phi_i(x_1, x_2, t) = \sum_n C_n^{(i)}(t) \varphi_n^{(i)}(x_1, x_2)$, де $C_n^{(i)}(t)$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному кроці знаходимо методом Рітца; t – фіксоване значення параметра навантаження; $\{\varphi_n^{(i)}\}$ – системи лінійно незалежних функцій. Тут як $\{\varphi_n^{(i)}\}$ використовували степеневі поліноми вигляду $x_1^k x_2^\ell$.

На рис. 1 показано графіки безрозмірних прогинів $\bar{w} = \frac{w}{h}$ в центрі пластини в залежності від значення безрозмірного навантаження $\bar{q} = \frac{16q_z a^4}{Eh^4}$. Трикутним маркером позначено результати, отримані в роботі [19] методом радіальних базисних функцій (*Radial Point Interpolation Method, RPIM*) у поєднанні з методом Ньютона – Рафсона, а суцільною лінією – методом R -функцій.

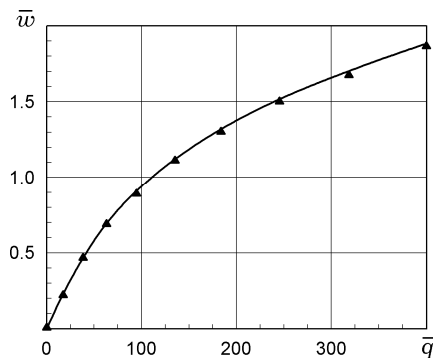


Рис. 1

У табл. 1 наведено результати розрахунку нормальних безрозмірних

напружень $\bar{\sigma}_{11} = \frac{4\sigma_{11}a^2}{Eh^2}$ у центрі на нижній поверхні пластини ($z = 0.5h$), отримані за допомогою *RPIM* [19], та методу *R*-функцій (*RFM*). У формулі (3) приймали $q_{z0} = q_{z1} = 10^{-2}$ МПа.

Таблиця 1. Безрозмірні напруження $\bar{\sigma}_{11}$ у центрі пластини.

| \bar{q} | $\bar{\sigma}_{11}$, <i>RPIM</i> [19] | $\bar{\sigma}_{11}$, <i>RFM</i> |
|-----------|---|-------------------------------------|
| 17.8 | 2.630 | 2.575 |
| 38.3 | 5.454 | 5.371 |
| 63.4 | 8.269 | 8.220 |
| 95.0 | 11.023 | 11.030 |
| 134.9 | 13.731 | 13.710 |
| 184.0 | 16.392 | 16.333 |
| 245.0 | 19.114 | 19.124 |
| 318.0 | 21.878 | 21.866 |
| 402.0 | 24.658 | 24.607 |

Як наступний тестовий приклад розглянемо задачу про згин квадратної шарнірно опертої пластини під дією рівномірно розподіленого навантаження [19]. Довжина сторони $2a = 0.2$ м, товщина пластини $h = 0.01$ м. Пружні характеристики матеріалу: $E = 3.202 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.26$.

Кінематичні граничні умови для швидкостей переміщень та функцій зсуву мають вигляд

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{u}_\tau = 0, \quad \dot{\psi}_\tau = 0, \quad (12)$$

де

$$\dot{u}_\tau = \dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2, \quad \dot{\psi}_\tau = \dot{\psi}_2 n_1 - \dot{\psi}_1 n_2,$$

n_1, n_2 – напрямні косинуси нормалі \mathbf{n} до контуру пластини $\partial\Omega$.

Структуру розв'язку, що задовольняє умови (12), можемо записати так:

$$\dot{w} = \omega\Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega_{,1}\Phi_2 + \omega\Phi_3, \quad \dot{u}_2 = \omega_{,1}\Phi_2 + \omega\Phi_4,$$

$$\dot{\psi}_1 = \omega_{,1}\Phi_5 + \omega\Phi_6, \quad \dot{\psi}_2 = \omega_{,1}\Phi_5 + \omega\Phi_7.$$

На рис. 2 наведено графіки залежності безрозмірних прогинів \bar{w} в центрі пластини від безрозмірного навантаження \bar{q} . Суцільними лініями позначено результати, отримані методом *R*-функцій, а трикутними маркерами – за допомогою *RPIM*. На рис. 3 зображено розподіл безрозмірних дотичних напружень $\bar{\sigma}_{13} = \frac{\sigma_{13}h}{2a|q_z^*|}$ по товщині на краю пластини, в точці

$(a, 0)$ при $q_z^* = -1$ МПа. Штрихові лінії відповідають результатам, отриманим за допомогою *RPIM*, а суцільні лінії – методом *R*-функцій. У формулі (3) для зовнішнього навантаження приймали $q_{z0} = q_{z1} = 0.5$ МПа.

Початковий крок та похибку обчислень у методі РКМ в обох тестових прикладах відповідно задавали такими: $\Delta t_0 = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Наведені вище результати розв'язання тестових задач засвідчують, що метод, запропонований у статті, забезпечує близьке співпадіння з результатами, отриманими іншими методами.

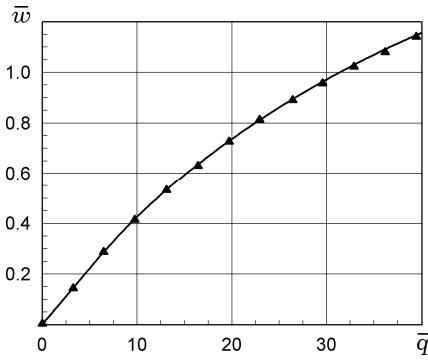


Рис. 2

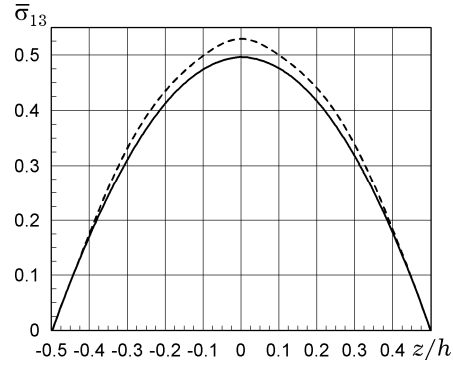


Рис. 3

Далі розглянемо згин квадратної пластини та пластини з еліптичними вирізами (рис. 4), які знаходяться під дією рівномірно розподіленого навантаження. Геометричні розміри пластин: $a = 0.1$ м, $b = 0.05$ м, $c = 0.075$ м, $h = 0.01$ м. Пружні константи такі самі, як у попередньому тестовому прикладі: $E = 3.202 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.26$.

Приймаємо, що граничні умови на краях пластини відповідають нерухомому шарніру:

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{u}_n = 0, \quad \dot{u}_\tau = 0, \quad \dot{\psi}_n = 0, \quad \dot{\psi}_\tau = 0, \quad (13)$$

де $\dot{u}_n = \dot{u}_1 n_1 + \dot{u}_2 n_2$, $\dot{\psi}_n = \dot{\psi}_1 n_1 + \dot{\psi}_2 n_2$.

Структура розв'язку, що задовольняє умови (13), має вигляд

$$\dot{w} = \omega \Phi_1, \quad \dot{u}_1 = \omega \Phi_2, \quad \dot{u}_2 = \omega \Phi_3, \quad \dot{\psi}_1 = \omega \Phi_4, \quad \dot{\psi}_2 = \omega \Phi_5.$$

Рівняння межі області, зображеної на рис. 4, можемо записати так:

$$\omega = ((\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 (\omega_3 \wedge_0 \omega_4)) \wedge_0 (\omega_5 \wedge_0 \omega_6) = 0.$$

Тут

$$\omega_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2), \quad \omega_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2),$$

$$\omega_3 = \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{(x_2 - a)^2}{b_1^2} - 1, \quad \omega_4 = \frac{x_1^2}{b^2} + \frac{(x_2 + a)^2}{b_1^2} - 1,$$

$$\omega_5 = \frac{(x_1 - a)^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1, \quad \omega_6 = \frac{(x_1 + a)^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1,$$

$$b_1 = a - c.$$

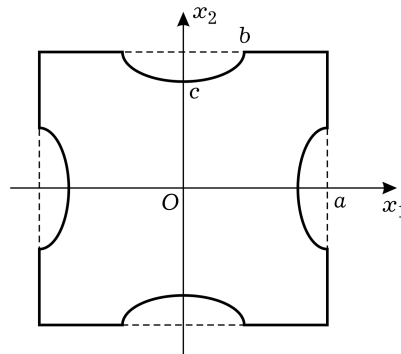


Рис. 4

Результати розрахунків залежностей безрозмірних прогинів \bar{w} і нормальних напружень $\bar{\sigma}_{11}$ у центрі на нижній поверхні пластин від безрозмірного навантаження \bar{q} подано відповідно на рис. 5 і рис. 6. Суцільні криві відповідають пластині з вирізами, а штрихові – квадратній пластині.

При обчисленнях приймали $q_{z0} = q_{z1} = 0.5$ МПа, $\Delta t_0 = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

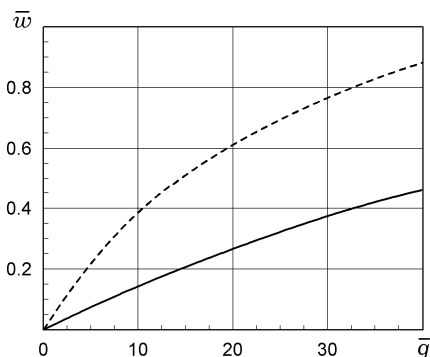


Рис. 5

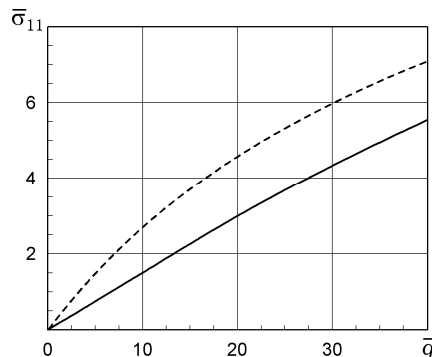


Рис. 6

Як і очікувалося, бічні вирізи роблять пластину більш жорсткою, зменшуючи рівень прогинів і напружень.

Висновки. Розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язування задач про згин гнучких пластин складної форми в рамках уточненої теорії вищого порядку. Метод базується на використанні методу R -функцій і методу продовження за параметром. Розв'язано тестові задачі, показано співпадіння із розв'язками, отриманими іншими методами. Розв'язано задачу про згин пластини складної форми. Досліджено вплив геометричної форми на напружено-деформований стан.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
2. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Москва: Книга по Требованию, 2012. – 445 с.
Те саме: *Bathe K.-J., Wilson E. L. Numerical methods in finite element analysis.* – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976. – xv+528 p.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
Те саме: *Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity.* – Oxford etc.: Pergamon Press, 1982. – 630 p.
4. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1956. – 420 с.
5. Григорюк Э. И., Шалашилин В. И. Метод продолжения по параметру в задачах нелинейного деформирования стержней, пластин и оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1984. – Вып. 17, ч. 1. – С. 3–58.
6. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 4.
7. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 10. – С. 3–23.
Те саме: *Grigorenko Ya. M., Gulyaev V. I. Nonlinear problems of shell theory and their solution methods (review) // Int. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, No. 10. – P. 929–947. – <https://doi.org/10.1007/BF00887499>.
8. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы: В 2 т. – Москва: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.
9. Курпа Л. В., Любецкая Е. И., Морачковская И. О. Решение нелинейных задач изгиба ортотропных пологих оболочек на упругом основании с применением метода R -функций // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 6. – С. 56–65.
Те саме: *Kurpa L. V., Lyubitskaya E. I., Morachkovskaya I. O. The R -function method used to solve nonlinear bending problems for orthotropic shallow shells*

- on an elastic foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, No. 6. – P. 660–668.
– <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0353-x>.
10. *Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.
 11. *Рвачев В. Л.* Теория R -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
 12. *Bucalem M. L., Bathe K. J.* Finite element analysis of shell structures // *Arch. Comput. Meth. Eng.* – 1997. – **4**, No. 1.– P. 3–61.
– <https://doi.org/10.1007/BF02818930>.
 13. *Reddy J. N.* A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation // *Int. J. Solids Struct.* – 1984. – **20**, No. 9–10. – P. 881–896.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90056-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90056-8).
 14. *Reddy J. N.* A simple higher-order theory for laminated composite plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1984. – **51**, No. 4. – P. 745–752.
– <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
 15. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // *J. Math. & Physics.* – 1944. – **23**, No. 1–4. – P. 184–191. – <https://doi.org/10.1002/sapm1944231184>.
 16. *Sabir A. B., Djoudi M. S.* Shallow shell finite element for the large deflection geometrically nonlinear analysis of shells and plates // *Thin-Walled Struct.* – 1995. – **21**, No. 3. – P. 253–267. – [https://doi.org/10.1016/0263-8231\(94\)00005-K](https://doi.org/10.1016/0263-8231(94)00005-K).
 17. *Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O.* Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact // *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering-2020, ICTM-2020 / M. Nechyporuk, V. Pavlikov, D. Kritskiy (Eds).* – Ser.: Lecture Notes in Networks and Systems. – Cham: Springer, 2021. – Vol. 188. – P. 267–276.
 18. *Talha M., Singh B. N.* Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory // *Appl. Math. Modell.* – 2010. – **34**. – P. 3991–4010. – <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.034>.
 19. *Van Do V. N., Lee C.-H.* Nonlinear analyses of FGM plates in bending by using a modified radial point interpolation mesh-free method // *Appl. Math. Modell.* – 2018. – **57**. – P. 1–20. – <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.12.035>.

METHOD OF SOLVING GEOMETRICALLY NONLINEAR BENDING PROBLEMS OF COMPLEX SHAPE PLATES

A new numerical analytical method for solving geometrically nonlinear problems of bending of plates with complex shape is developed. The formulation of the problem is performed within the framework of a refined theory of a higher order, which takes into account the quadratic law of the distribution of transverse tangential stresses along the thickness. The continuation method by parameter is used for linearizing the nonlinear problem. For the variational formulation of the linearized problem, a functional in the form of Lagrange is constructed, given on the kinematically possible rates of displacements and rates of shear functions. To find the main unknowns of the problem of nonlinear plate bending, the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations is formulated. The Cauchy problem is solved by the Runge – Kutta – Merson method with the automatic choice of step. The right-hand parts of the differential equations, at fixed values of the parameter of load corresponding to the Runge – Kutta – Merson scheme, are found from the solution of the variational problem for the Lagrange functional. Variational problems are solved using the Ritz method in combination with the R -function method. Test problems for clamped and simply supported plates under the action of uniformly distributed load of different intensity are solved. The problem of bending of a plate with complex form are solved. The influence of the geometric shape on the stress-strain state is investigated.

Keywords: flexible plate, geometric nonlinearity, refined theory, complex shape, R -functions method.