

**ЗАСТОСУВАННЯ ФІЗИЧНО-ПОІНФОРМОВАНИХ НЕЙРОМЕРЕЖ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ**

*Розглянуто алгоритм побудови розв'язків крайових задач двовимірної теорії пружності з використанням фізично-поінформованих нейромереж. Запропонований підхід дозволяє зводити крайові задачі механіки суцільних середовищ до задач оптимізації, а використання фізично-поінформованих нейромереж в рамках розглянутого підходу дозволяє звести розв'язання широкого класу задач до конструювання функції помилок загального вигляду. Для випадку умов Неймана з постійними зусиллями, заданими на контурі прямокутної області, вказано явний вигляд нейромережевої функції та розв'язку в переміщеннях в цілому. Для перевірки запропонованої методики виконано розрахунок напружено-деформованого стану для одновимірної динамічної задачі поздовжніх коливань стержня. Запропоновану методичку можна поширити і на випадок тривимірних задач теорії пружності, в тому числі і кусково-однорідних, а в більш загальному випадку – неоднорідних середовищ.*

**Ключові слова:** фізично-поінформовані нейромережі, «пробні» функції, динамічні задачі теорії пружності.


Останнім часом значно зріс дослідницький інтерес до машинного навчання, особливо до глибокого навчання та його практичних застосувань. Глибокі нейронні мережі є одним із найбільш популярних інструментів машинного навчання, оскільки їх можна застосовувати в різних галузях знань, таких як, наприклад, розпізнавання зображень і мови, машинний переклад, обробка зображень і відео, медицина тощо.

Глибоке навчання досягло значного прогресу у різноманітних застосуваннях. Однак його використання при розв'язанні диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП) з'явилося відносно недавно. Фізично-поінформовані нейронні мережі (PINN) стали потужним інструментом для розв'язання складних наукових та інженерних задач. PINN поєднують методи глибокого навчання з фізичними моделями, щоб використовувати сильні сторони обох галузей. За останні роки відбулося кілька помітних подій у дослідженні PINN, включаючи нові та класичні підходи. Класичні підходи передбачають використання нейронних мереж для апроксимації ДРЧП з урахуванням відомих фізичних законів. Цей підхід був вперше розроблений М. Raissi та ін. у 2017 р. [9, 10]. Інші класичні підходи передбачають використання нейронних мереж для ідентифікації та керування нелінійними динамічними системами, як це було запропоновано К. S. Narendra, К. Parthasarathy у 1990 р. [7].

Новіші підходи спрямовані на подолання деяких обмежень класичних методів. Один з підходів полягає у використанні механізмів адаптивного зважування функції помилок, як це було запропоновано А. А. Heudari та ін. у 2019 р. [4]. Інший підхід полягає у використанні байєсівських (Bayesian) нейронних мереж для моделювання невизначеності в прогнозах нейронної мережі, як запропонували L. Yang та ін. у 2021 р. [12]. У розробку PINN зробили значний внесок декілька дослідників, зокрема І. Е. Lagaris та ін., які запропонували використовувати радіальні базисні функції для розв'язання ДРЧП у 1998 р. [6]. Серед інших піонерів у цій галузі – М. Raissi, Р. Perdikaris, Г. Е. Karniadakis, чії роботи стосовно фізично-поінформованих нейронних мереж допомогли утвердити цю галузь як перспективний напрям досліджень [5, 8–10].

Слід відмітити, що алгоритм PINN не потребує дискретизації розгля-

---

 mykolalav@ukr.net

дуваної області при розв'язанні крайової задачі, і його можна застосувати до різних типів ДРЧП [3]. Фізично-поінформовані нейронні мережі дозволяють подолати проблеми дискретизації, притаманні звичайним розв'язувачам, таким, що використовують метод скінченних різниць або метод скінченних елементів, оскільки вони використовують нейронну мережу для побудови «пробних» функцій розв'язку та використовують переваги автоматичного диференціювання [2] для обчислення точних безсіткових похідних. Ще однією істотною перевагою PINN порівняно з іншими підходами до розв'язання крайових задач є те, що PINN реалізує розв'язання обернених крайових задач так само легко [11], як і прямих. Однак порівняно зі звичайними алгоритмами розв'язування PINN мають певні проблеми оптимізації: складний процес оптимізації через обмеження ДРЧП, труднощі із поширенням інформації від початкових або граничних умов до невидимих частин розглядуваної просторово-часової області і чутливість до вибору гіперпараметрів.

У цій роботі пропонується алгоритм побудови «пробних» функцій для конструювання розв'язків крайових задач теорії пружності із використанням фізично-поінформованих нейронмереж.

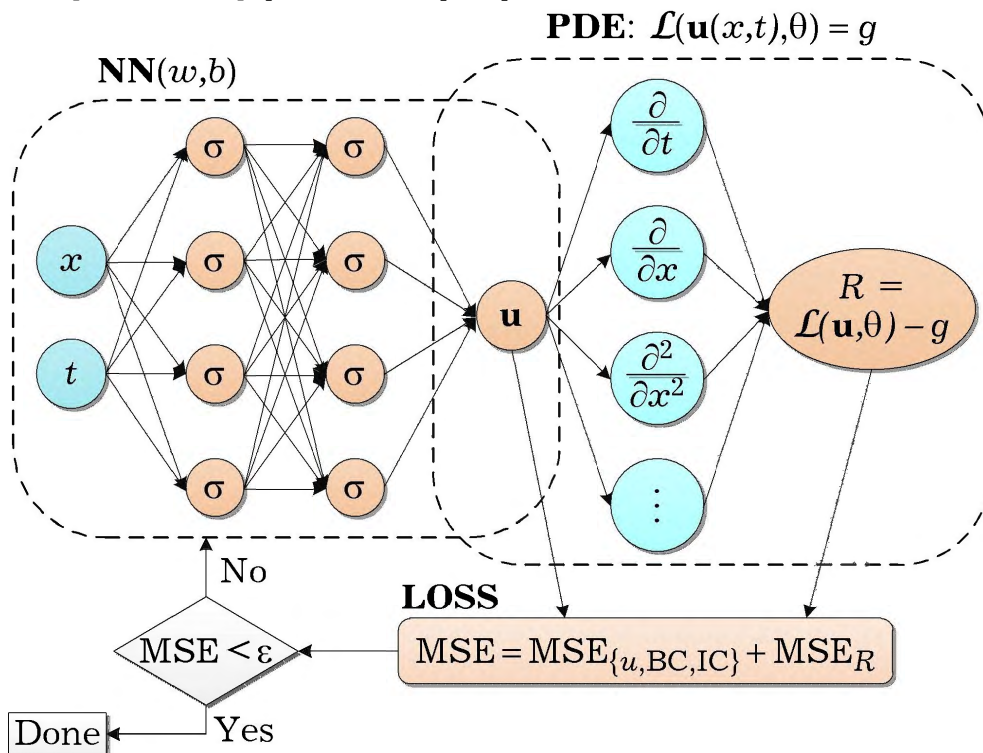


Рис. 1. Схема глибокої фізично-поінформованої нейронної мережі.

**1. Постановка задачі.** Нехай потрібно знайти розв'язок  $u(\mathbf{x}, t)$  крайової задачі

$$L_1(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t), \nabla^2 u(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, t \in T,$$

$$L_2(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t))|_D = \varphi(\mathbf{x}, t),$$

$$u(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = f(\mathbf{x}),$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(\mathbf{x}).$$

Для розв'язання цієї крайової задачі можна використовувати неперер-

вну чи дискретну [11] за часом схему розв'язання. Будемо використовувати неперервну схему, згідно з якою для побудови розв'язку застосовується метод колокацій з метою дискретизації розглядуваної області  $D$  та її границі  $S$ . Задача зводиться до розв'язання системи рівнянь

$$L_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j, u(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j), \nabla u(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j), \nabla^2 u(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \widehat{D}, \mathbf{t} \in \widehat{T},$$

$$L_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j, u(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j), \nabla u(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j)) \Big|_{\widehat{D}} = \varphi(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j),$$

$$u(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j) \Big|_{\widehat{T}} = f(\mathbf{x}_i),$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_j)}{\partial t} \Big|_{\widehat{T}} = F(\mathbf{x}_i).$$

Якщо  $u_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{p})$  – «пробний» розв'язок, що залежить від регулювальних параметрів  $\mathbf{p}$ , то задача зводиться до задачі мінімізації функціонала

$$\min_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{x}_i \in D, \mathbf{t}_i \in \widehat{T}} L_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_i, u_t(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_i), \nabla u_t(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_i), \nabla^2 u_t(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}_i))^2$$

з обмеженнями, що накладаються граничними умовами. Це досягається шляхом подання шуканого розв'язку крайової задачі у вигляді

$$u_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{p}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{t}, N(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{p})),$$

де функція  $N(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{p})$  – нейронна мережа з параметрами  $\mathbf{p}$  (ваги і зміщення) та  $n$  вхідними параметрами вхідних векторів  $\mathbf{x}$  та  $\mathbf{t}$ , причому доданок  $A(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  не містить регулювальних параметрів та задовольняє граничні і початкові умови, а доданок  $F$  будується так, що перетворюється в нуль у граничних та початкових умовах. Таким чином, задача зводиться від початкової зв'язаної задачі оптимізації до незв'язаної.

**Задача 1°.** Розглянемо спочатку крайову задачу для невідомої функції  $u$ , коли на двох протилежних краях прямокутної області (наприклад, при  $y = 0$  та  $y = 1$ ) задано умови типу Неймана, а на двох інших – умови типу Діріхле. Подамо функцію  $u_t$ , що наближає шукану функцію  $u$ , в такому вигляді:

$$u_t(x, y) = B(x, y) + x(1 - x) \left[ N(x, y, \mathbf{p}) - N(x, 1 - y, \mathbf{p}) - y \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} \Big|_{y=1} + (1 - y) \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} \Big|_{y=0} \right].$$

Тоді її похідна за  $y$  матиме вигляд

$$\frac{\partial u_t(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} + x(1 - x) \left[ \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} + \frac{\partial N(x, 1 - y, \mathbf{p})}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} \Big|_{y=1} - \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} \Big|_{y=0} \right].$$

Цілком очевидно, що коли функція  $B(x, y)$  задовольняє граничні умови на краях розглядуваної області, функція  $u_t(x, y)$ , з огляду на побудову, також задовольнятиме ці умови.

Без обмеження загальності вважатимемо, що функція  $u$  задана на квадраті  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Тоді у випадку, коли умови Діріхле задано при  $x = 0$  та  $x = 1$ , функцію  $u_t(x, y)$  можна подати так:

$$u_t(x, y) = B(x, y) + y(1 - y) \left[ N(x, y, \mathbf{p}) - N(1 - x, y, \mathbf{p}) - x \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} \Big|_{x=1} + (1 - x) \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} \Big|_{x=0} \right].$$

Похідна за  $x$  від функції  $u_t(x, y)$  матиме вигляд

$$\frac{\partial u_t(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} + y(1 - y) \left[ \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} + \frac{\partial N(1 - x, y, \mathbf{p})}{\partial x} - \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} \Big|_{x=1} - \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} \Big|_{x=0} \right].$$

Очевидно, що коли функція  $B(x, y)$  задовольняє граничні умови на краях розглядуваної області, така функція  $u_t(x, y)$ , з огляду на побудову, також задовольнятиме ці умови.

**Задача 2°.** Розглянемо випадок, коли потрібно відшукати невідому функцію  $u$ , коли на кожній із пар протилежних країв (при  $y = 0$  та  $y = 1$ , при  $x = 0$  та  $x = 1$ ) прямокутної області задано умови типу Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} &= g_0(x), & \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} &= g_1(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= f_0(y), & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= f_1(y). \end{aligned}$$

Тоді функцію  $u_t$ , що наближає шукану функцію  $u$ , можемо подати у такому вигляді:

$$u_t(x, y) = B(x, y) + f(x) \left[ N(x, y, \mathbf{p}) - N(x, 1 - y, \mathbf{p}) - y \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} \Big|_{y=1} + (1 - y) \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} \Big|_{y=0} \right] + f(y) \left[ N(x, y, \mathbf{p}) - N(1 - x, y, \mathbf{p}) - x \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} \Big|_{x=1} + (1 - x) \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} \Big|_{x=0} \right],$$

де  $f(x)$  – будь-яка гладка диференційовна на відрізку  $[0, 1]$  функція, що перетворюється в нуль разом зі своєю похідною у точках 0 та 1. Для спрощення викладок шукатимемо цю функцію у вигляді полінома четвертого порядку  $f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$  (оскільки маємо чотири умови:  $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$ ).

Із вказаних граничних умов одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів  $A, B, C, D, E$  многочлена  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} D &= 0, & E &= 0, \\ A + B + C &= 0, & 4A + 3B + 2C &= 0. \end{aligned}$$

Система має безліч розв'язків. Виберемо, наприклад,  $A = 1, B = -2, C = 1$ . Цьому розв'язку відповідає поліном  $f(x) = x^2(1 - x)^2$ . Отже, остаточно можемо записати

$$u_t(x, y) = B(x, y) + x^2(1 - x)^2 \left[ N(x, y, \mathbf{p}) - N(x, 1 - y, \mathbf{p}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -y \left. \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} \right|_{y=1} + (1-y) \left. \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial y} \right|_{y=0} \Big] + \\
& + y^2(1-y)^2 \left[ N(x, y, \mathbf{p}) - N(1-x, y, \mathbf{p}) - \right. \\
& \left. -x \left. \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} \right|_{x=1} + (1-x) \left. \frac{\partial N(x, y, \mathbf{p})}{\partial x} \right|_{x=0} \right].
\end{aligned}$$

Розглянемо більш детально побудову функції  $B(x, y)$ . Прийmemo, що функції  $f_0(y)$ ,  $f_1(y)$ ,  $g_0(x)$ ,  $g_1(x)$  є константами  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $g_0$ ,  $g_1$  відповідно.

Шукатимемо функцію  $B(x, y)$  у такому вигляді:

$$B(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy + Ex^2 + Fy^2.$$

Із граничних умов одержимо

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} &= B + Dy = g_0, & \left. \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right|_{x=1} &= B + Dy + 2E = g_1, \\
\left. \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} &= C + Dx = f_0, & \left. \frac{\partial B(x, y)}{\partial y} \right|_{y=1} &= C + Dx + 2F = f_1.
\end{aligned}$$

Звідси знаходимо:  $B = g_0$ ,  $C = f_0$ ,  $D = 0$ ,  $E = \frac{g_1 - g_0}{2}$ ,  $F = \frac{f_1 - f_0}{2}$ . Значення  $A$ , без обмежень загальності, покладемо рівним 0. Таким чином, у розглядуваному випадку шукана функція  $B(x, y)$  матиме такий вигляд:

$$B(x, y) = g_0x + f_0y + \frac{g_1 - g_0}{2}x^2 + \frac{f_1 - f_0}{2}y^2.$$

**Задача 3°.** Розглянемо тепер крайову задачу плоскої теорії пружності відносно двох невідомих функцій переміщень  $u$  і  $v$ , коли на кожному з країв прямокутної області задано граничні умови типу Неймана. Враховуючи, що напруження можуть бути виражені через поки що невідомі апроксимуючі функції  $\Psi_1(x, y)$ ,  $\Psi_2(x, y)$ , граничні умови подамо у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right|_{x=0} &= -p, & (\lambda + 2\mu) \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right|_{x=1} &= p, \\
(\lambda + 2\mu) \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|_{y=0} &= 0, & (\lambda + 2\mu) \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|_{y=1} &= 0, \\
\mu \left( \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) \right|_{x=0} &= 0, & \mu \left( \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) \right|_{x=1} &= 0, \\
\mu \left( \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) \right|_{y=0} &= 0, & \mu \left( \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) \right|_{y=1} &= 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Невідомі функції  $\Psi_1(x, y)$ ,  $\Psi_2(x, y)$  шукатимемо у вигляді

$$\Psi_1(x, y) = B_1(x, y) + F_1(N_1), \quad \Psi_2(x, y) = B_2(x, y) + F_2(N_2),$$

де  $B_1(x, y)$ ,  $B_2(x, y)$  підбираємо так, щоб задовольнялись рівності (1), а  $F_1(x, y)$ ,  $F_2(x, y)$  перетворювались у нуль на межі розглядуваної прямокутної області ( $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ).

На підставі результатів, одержаних у попередній задачі 2°, можемо записати

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, y) &= B_1(x, y) + f(x) \left[ N_1(x, y) - N_1(x, 1 - y) - y \frac{\partial N_1(x, 1)}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - y) \frac{\partial N_1(x, 0)}{\partial y} \right] + f(y) \left[ N_1(x, y) - N_1(1 - x, y) - \right. \\ &\quad \left. - x \frac{\partial N_1(1, y)}{\partial x} + (1 - x) \frac{\partial N_1(0, y)}{\partial x} \right], \\ \Psi_2(x, y) &= B_2(x, y) + f(x) \left[ N_2(x, y) - N_2(x, 1 - y) - y \frac{\partial N_2(x, 1)}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - y) \frac{\partial N_2(x, 0)}{\partial y} \right] + f(y) \left[ N_2(x, y) - N_2(1 - x, y) - \right. \\ &\quad \left. - x \frac{\partial N_2(1, y)}{\partial x} + (1 - x) \frac{\partial N_2(0, y)}{\partial x} \right].\end{aligned}$$

Тут  $f(t) = t^2(1 - t)^2$ , а  $B_1(x, y)$ ,  $B_2(x, y)$  задовольняють (1):

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial B_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial B_2}{\partial y} \Big|_{x=0} &= -p, & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial B_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial B_2}{\partial y} \Big|_{x=1} &= p, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial B_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial B_1}{\partial x} \Big|_{y=0} &= 0, & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial B_2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial B_1}{\partial x} \Big|_{y=1} &= 0, \\ \mu \left( \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} &= 0, & \mu \left( \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} &= 0, \\ \mu \left( \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} &= 0, & \mu \left( \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial x} \right) \Big|_{y=1} &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

причому функції  $B_1(x, y)$  та  $B_2(x, y)$  не є ітерованими, тобто їх не потрібно переобчислювати на кожному кроці оптимізації. Визначимо ці функції для розглядуваного прикладу крайової задачі плоскої теорії пружності.

Шукатимемо  $B_1(x, y)$ ,  $B_2(x, y)$  у такому вигляді:

$$\begin{aligned}B_1(x, y) &= A_1x + B_1y + C_1xy + D_1x^2 + E_1y^2, \\ B_2(x, y) &= A_2x + B_2y + C_2xy + D_2x^2 + E_2y^2.\end{aligned}\quad (3)$$

Підставляючи (3) у (2), одержимо систему рівнянь для визначення невідомих  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)(A_1 + C_1y) + \lambda(B_2 + 2E_2y) \Big|_{x=0} &= -p, \\ (\lambda + 2\mu)(A_1 + C_1y + 2D_1) + \lambda(B_2 + C_2 + 2E_2y) \Big|_{x=1} &= p, \\ (\lambda + 2\mu)(B_2 + C_2x) + \lambda(A_1 + 2D_1x) \Big|_{y=0} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)(B_2 + C_2x + E_2) + \lambda(A_1 + C_1 + 2D_1x) \Big|_{y=1} &= 0, \\ \mu(B_1 + 2E_1y + A_2 + C_2y) \Big|_{x=0} &= 0, \\ \mu(B_1 + C_1 + 2E_1y + A_2 + C_2y + 2D_2) \Big|_{x=1} &= 0,\end{aligned}$$

$$\mu(B_1 + C_1x + A_2 + 2D_2x)|_{y=0} = 0,$$

$$\mu(B_1 + C_1x + 2E_1x + A_2 + C_2 + 2D_2x)|_{y=1} = 0.$$

Розв'язуючи одержану систему рівнянь, остаточно одержимо

$$A_1 = \frac{-(\lambda + 2\mu)p}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad A_2 = -1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = \frac{p\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)},$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{p\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)}, \quad D_1 = \frac{(\lambda + 2\mu)p}{4\mu(\lambda + \mu)},$$

$$D_2 = 0, \quad E_1 = \frac{p\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad E_2 = 0.$$

Підставляючи ці вирази в (3), одержимо функції  $B_1(x, y)$ ,  $B_2(x, y)$ :

$$B_1(x, y) = \frac{-(\lambda + 2\mu)p}{4\mu(\lambda + \mu)}x + y + \frac{(\lambda + 2\mu)p}{4\mu(\lambda + \mu)}x^2 + \frac{p\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}y^2,$$

$$B_2(x, y) = -x + \frac{p\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}y - \frac{p\lambda}{2\mu(\lambda + \mu)}xy.$$

**Задача 4°.** Розглянемо, нарешті, більш загальний випадок, коли на границі області функції  $f_0(y)$ ,  $f_1(y)$ ,  $g_0(x)$ ,  $g_1(x)$  є довільними. Покажемо, що в цьому випадку можна сконструювати функцію  $B(x, y)$ , яка буде задовольняти крайові умови (1). Щодо іншого доданка в поданні шуканої функції переміщень, він, очевидно, не буде залежати від граничних умов в тому сенсі, що перетворюється в нуль на межі розглядуваної області.

Отже, шукану функцію  $B(x, y)$  подамо у вигляді суперпозиції чотирьох функцій  $B_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , таких, що

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial B_i(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \delta_{i1}g_0(x), & \left. \frac{\partial B_i(x, y)}{\partial x} \right|_{x=1} &= \delta_{i2}g_1(x), \\ \left. \frac{\partial B_i(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} &= \delta_{i3}f_0(y), & \left. \frac{\partial B_i(x, y)}{\partial y} \right|_{y=1} &= \delta_{i4}f_1(y). \end{aligned} \quad (4)$$

Тобто задача знаходження функції  $B(x, y)$ , що задовольняє граничні умови (1), зводиться до знаходження чотирьох функцій  $B_1(x, y)$ ,  $B_2(x, y)$ ,  $B_3(x, y)$ ,  $B_4(x, y)$ , що задовольняють (4) і, з огляду на лінійність задачі, в сумі дають функцію  $B(x, y)$ :

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^4 B_i(x, y).$$

Для знаходження кожної з функцій  $B_i(x, y)$ , наприклад  $B_1(x, y)$ , можемо записати

$$B_1(x, y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh\left(\frac{\pi nx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right),$$

де

$$A_n = \frac{2}{\pi n \sinh\left(\frac{\pi na}{b}\right)} \int_0^b f(y) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) dy.$$

Інші функції  $B_i(x, y)$  визначаються аналогічно.

**2. Результати обчислень.** Для перевірки запропонованої методики виконано розрахунок напружено-деформованого стану для одновимірної динамічної задачі поздовжніх коливань стержня, закріпленого на лівому кінці та вільного на правому. Крайова задача в цьому випадку [1] набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(t, x)|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x),$$

$$u(t, x)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0.$$

Функцію  $u_t$ , що наближає шукану функцію  $u$ , можемо подати у такому вигляді:

$$u_t(x, t) = B(x, t) + x^2(1-x)^2 \left[ N(x, t, \mathbf{p}) - N(x, 0, \mathbf{p}) - t \left. \frac{\partial N(x, t, \mathbf{p})}{\partial t} \right|_{t=0} \right] +$$

$$+ t^2 \left[ N(x, t, \mathbf{p}) - N(0, t, \mathbf{p}) - x \left. \frac{\partial N(x, t, \mathbf{p})}{\partial x} \right|_{x=1} \right].$$

Цілоком очевидно, що коли функція  $B(x, t)$  задовольняє граничні умови на краях розглядуваної області, функція  $u_t(x, t)$  з огляду на побудову, також задовольнятиме ці умови.

Було розглянуто випадок поздовжніх коливань стержня з аерогелю з початковим профілем зміщень  $f(x) = \sin \pi x$  та початковим профілем швидкостей  $F(x) = 0$ .

Результати обчислень порівнювалися з аналітичним розв'язком цієї задачі:

$$u_a(x, t) = \frac{\Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s) ds, \quad c = \sqrt{E/\rho}.$$

де  $\Phi(x)$ ,  $\Psi(x)$  – періодичні функції з періодом 2, продовжені за непарністю за межі інтервалу  $[0, 1]$ .

Архітектура мережі була побудована так: один вхідний шар на 32 нейрони, чотири приховані шари по 64 нейрони кожен та один вихідний шар на 32 нейрони.

Як метод оптимізації використовувалась комбінація двох найбільш популярних та ефективних методів: методу адаптивного моменту (ADAM) та методу Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно у модифікації з обмеженим використанням пам'яті (L-BFGS). Цілоком прогнозовано використання комбінації ADAM+L-BFGS дало найвищу точність одержаних розв'язків порівняно з методом адаптивного моменту чи методом L-BFGS.

На рис. 2 – рис. 5 наведено наближений та аналітичний розв'язок вибраної задачі для значень  $c = 0.3, 0.9, 1.5, 3$  разом із нев'язкою диференціального оператора рівняння.

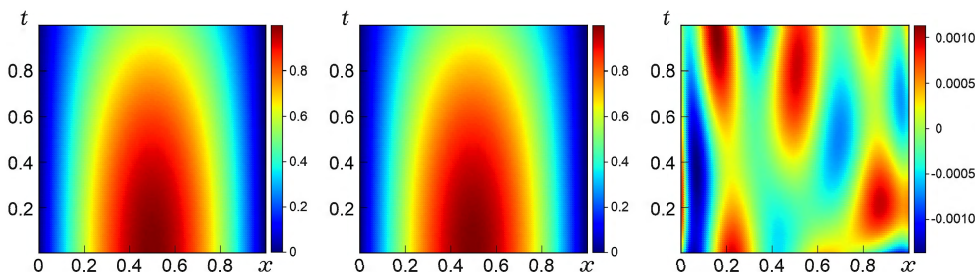


Рис. 2.  $c = 0.3$ .



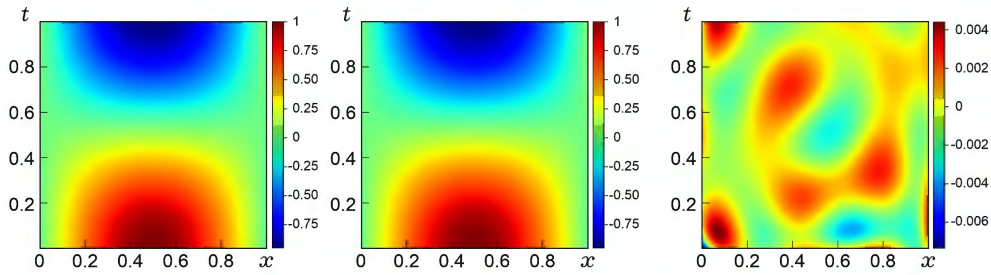


Рис. 3.  $c = 0.9$ .

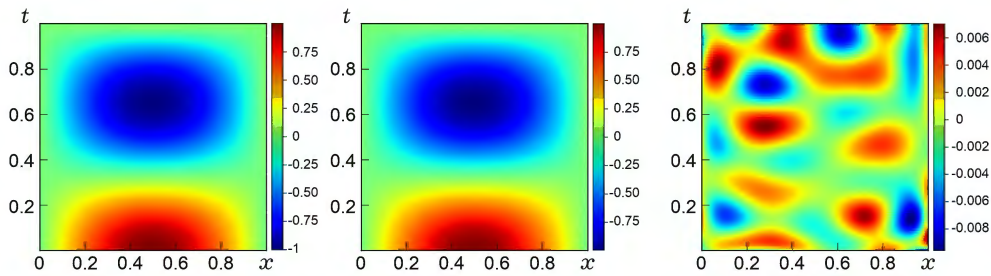


Рис. 4.  $c = 1.5$ .

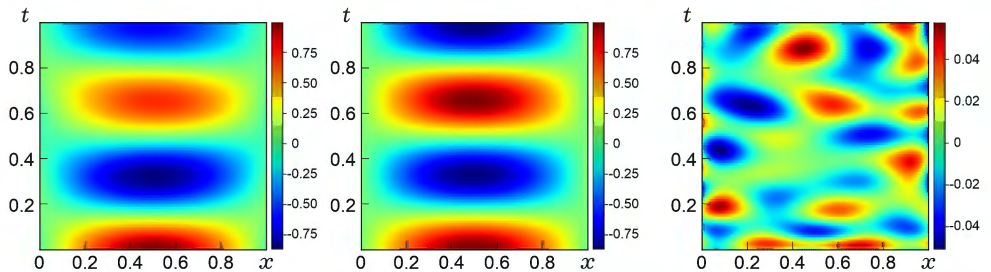


Рис. 5.  $c = 3$ .

Як бачимо на рис. 2 – рис. 5, зі збільшенням  $c$  точність обчислень зменшується, і необхідно збільшувати кількість точок колокації та/або змінювати архітектуру нейромережі (збільшувати кількість шарів і кількість нейронів у шарах).

#### Висновки.

- Побудовано алгоритм знаходження розв'язків прямої та оберненої задач плоскої теорії пружності за допомогою нейромережевої PINN-моделі.
- Для випадку умов Неймана з постійними зусиллями, заданими на контурі прямокутної області, вказано явний вигляд нейромережевої функції та розв'язку в переміщеннях в цілому.
- Запропонований підхід дозволяє зводити крайові задачі механіки суцільних середоц до задач оптимізації, а використання фізично-поінформованих нейромереж та запропонованого підходу фактично звести розв'язання задачі до конструювання функції помилок загального вигляду для різних класів задач.
- Використання методу оптимізації ADAM дає прийнятну точність обчислень, проте необхідна достатньо велика кількість ітерацій (epoch). З огляду на це рекомендується віддавати перевагу алгоритму L-BFGS або використовувати поєднання алгоритмів ADAM та L-BFGS.
- Запропоновану методіку можна поширити і на випадок тривимірних задач теорії пружності, в тому числі і кусково-однорідних, а в більш загальному випадку, – неоднорідних середовищ.

1. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1969. – 288 с.
2. Baydin A. G., Pearlmutter B. A., Radul A. A., Siskind J. M. Automatic differentiation in machine learning: A survey // J. Mach. Learn. Res. – 2018. – **18**. – Art. 153. – P. 1–43. – <http://jmlr.org/papers/v18/17-468.html>. – (<https://doi.org/10.48550/arXiv.1502.05767>.)
3. Blechschmidt J., Ernst O. G. Three ways to solve partial differential equations with neural networks – A review // GAMM-Mitteilungen. – 2021. – **44**, No. 2. – e202100006. – <https://doi.org/10.1002/gamm.202100006>.
4. Heydari A. A., Thompson C. A., Mehmood A. SoftAdapt: Techniques for adaptive loss weighting of neural networks with multi-part loss functions // arXiv e-prints. – 2019. – <https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.12355>
5. Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L. Physics-informed machine learning // Nat. Rev. Phys. – 2021. – **3**. – P. 422–440. – <https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5>.
6. Lagaris I. E., Likas A., Fotiadis D. I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations // IEEE Trans. Neural Networks. – 1998. – **9**, No. 5. – P. 987–1000. – <https://doi.org/10.1109/72.712178>.
7. Narendra K. S., Parthasarathy K. Identification and control of dynamical systems using neural networks // IEEE Trans. Neural Networks. – 1990. – **1**, No. 1. – P. 4–27. – <https://doi.org/10.1109/72.80202>.
8. Raissi M., Karniadakis G. E. Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations // J. Comput. Phys. – 2017. – **357**. – P. 125–141. – <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.11.039>.
9. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics informed deep learning (part I): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations // arXiv preprint, arXiv:1711.10561[cs.AI]. – 2017. – <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10561>.
10. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics informed deep learning (part II): Data-driven discovery of nonlinear partial differential equations // arXiv preprint, arXiv:1711.10566[cs.AI]. – 2017. – <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.10566>.
11. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // J. Comput. Phys. – 2019. – **378**. – P. 686–707. – <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>.
12. Yang L., Meng X., Karniadakis G. E. B-PINNs: Bayesian physics-informed neural networks for forward and inverse PDE problems with noisy data // J. Comput. Phys. – 2021. – **425**. – Art. 109913. – <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109913>.

#### APPLICATION OF PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORKS TO SOLVING DYNAMIC PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

*The algorithm for constructing solutions of boundary value problems of the two-dimensional theory of elasticity using physics-informed neural networks is considered. The proposed approach makes it possible to reduce the boundary value problems of the continuum mechanics to optimization problems, and the use of physics-informed neural networks within the framework of the considered approach enables to reduce the solution of a wide class of problems to the construction of an error function of a general form. For the case of Neumann conditions with constant forces given on the contour of a rectangular domain, an explicit form of the neural network function and the solution in the displacements as a whole is established. To verify the proposed method, the calculation of the stress-strain state is performed for the one-dimensional dynamic problem of longitudinal vibrations of the rod. The proposed method can be extended to the case of three-dimensional problems of the theory of elasticity, including piecewise homogeneous and, in a more general case, heterogeneous media.*

**Key words:** physics-informed neural networks, ansatz functions, dynamic problems of elasticity theory.

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ

Одержано  
11.10.22