

## АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА СУКУПНОСТІ ІМПЕДАНСНИХ ЧАСТИНОК МАЛОГО РОЗМІРУ

З використанням асимптотичного підходу отримано розв'язок задачі розсіювання електромагнітних хвиль на сукупності малих імпедансних частинок довільної форми. Частинки розміщені в однорідній області з електричною сталою  $\epsilon_0$  та магнітною проникністю  $\mu_0$ . Розв'язок отримано за умови, що характерний розмір частинок прямує до нуля,  $b \rightarrow 0$ , а їх кількість  $M(b)$  прямує до нескінченності за визначеним правилом. Розв'язок задачі подається у явному вигляді, що виключає необхідність розв'язувати відповідне інтегральне рівняння для визначення полів на поверхні частинок і таким чином відпадає необхідність інтегрування похідних від функції Гріна, яка є ядром граничного інтегрального рівняння. Практичне застосування цього підходу дає можливість моделювати середовища з бажаним неоднорідним розподілом коефіцієнта рефракції і магнітної проникності. Для цих фізичних параметрів отримано явні аналітичні формули.

**Ключові слова:** задача електромагнітного розсіювання, асимптотичний метод, напіваналітичний розв'язок, збіжність методу, матеріальні параметри, числове моделювання.

**Вступ.** Асимптотичний метод є одним з ефективних підходів при розв'язуванні задач розсіювання електромагнітних (ЕМ) хвиль на сукупності малих тіл, оскільки він усуває сингулярну частину оператора інтегрального рівняння для ЕМ хвиль і в результаті дає можливість отримати добре обумовлену систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Це пояснюється тим, що сингулярний член у введеному асимптотичному (ефективному) полі можна опустити, і в результаті отримуємо інтегральне рівняння другого роду з неособливим ядром; при цьому відповідна СЛАР має скінченну розмірність. У деяких випадках можна отримати явний розв'язок, який виключає необхідність розв'язувати відповідне граничне інтегральне рівняння для визначення поля на поверхні тіл.

У цій статті підхід, запропонований у [15] для випадку одного тіла довільної форми, узагальнюється на випадок багатьох тіл.

Розсіювання ЕМ хвиль на тілах довільної форми вивчається протягом останніх кількох десятиліть. На відміну від тіл з координатними поверхнями, для яких можна знайти аналітичний розв'язок (див., наприклад, відому класичну роботу С. Міє [10], монографію [3] і наведені там посилання), отримання розв'язку для тіла довільної форми потребує чисельного підходу. Серед таких досліджень слід відмітити статтю [2], де для розв'язання отриманого інтегрального рівняння для компоненти електричного поля застосовано метод моментів. Для моделювання некоординатних поверхонь довільної форми використовуються, зокрема, елементи криволінійних трикутників. Переваги та ефективність таких моделей були продемонстровані в роботах [19] і [22].

Асимптотичний підхід є перспективним, оскільки дозволяє отримати аналітичний розв'язок задачі розсіювання на наборі тіл малого розміру [7]. Перевагою підходу є можливість отримання наближеного розв'язку в замкнутому вигляді. Як правило, такого розв'язку достатньо для багатьох практичних застосувань [21].

Асимптотичний розв'язок інтегрального рівняння, яке виникає в задачах ЕМ розсіювання, досліджувався в [4] для випадку розсіювання опуклим

✉ andr@iapmm.lviv.ua

циліндром при падінні на нього плоскої хвилі. Запропонована методика передбачає поєднання процедури розкладу асимптотичного поля на основі ідеї теорії приграничного шару з подальшим використанням граничних умов і умов узгодження. Стаття [8] була однією з перших робіт, у якій для розв'язання двовимірних і тривимірних задач дифракції застосовано метод, що базується на комбінації методу граничного інтегрального рівняння та асимптотичного підходу. У роботі [9] запропоновано ефективну процедуру визначення асимптотичного фазового фронту на основі методу моментів.

Було встановлено, що асимптотичний підхід для розв'язання багатьох задач розсіювання можна розглядати як схему регуляризації, оскільки він усуває необхідність розв'язувати звичайне граничне інтегральне рівняння з ядром у формі функції Гріна та її похідних. Раніше для регуляризації розв'язку задач розсіювання застосовувались різноманітні методики [5, 7]. У випадку аналітичної регуляризації вичерпний огляд використаних підходів було зроблено в [11]. Розглянуті там підходи можуть бути застосовані як у скінченній, так і в нескінченній областях, також вони застосовні як на етапах аналітичного виведення розв'язку, так і на етапах його чисельної реалізації. Наприклад, аналітичну регуляризацію отриманих інтегральних рівнянь, яка ґрунтується на оберненні статичної частини задачі з використанням формалізму задачі Рімана – Гільберта, застосовано в [25], а регуляризацію, що включає певний тип інтегральних операторів електричного поля з комплексними хвильовими числами та головні символи таких операторів – у термінах псевдодиференціальних операторів, було застосовано в [6, 24], метод адитивної регуляризації існуючих особливостей задачі у випадку інтегрального подання поля розроблено в [21].

Асимптотичний підхід, поряд із розглянутими вище, є одним із ефективних методів регуляризації, оскільки він усуває необхідність використовувати граничні інтегральні рівняння та обчислювати похідні від функції Гріна в їхніх ядрах. Характерною особливістю цього методу є те, що він може бути успішно застосований у випадках, коли один із параметрів задачі є малим порівняно з іншими.

Основи асимптотичного підходу до розв'язання задач розсіювання ЕМ хвиль на частинках малого розміру було розроблено у роботах [1, 12, 13, 17, 18]. Частинок розміщувалися у скінченній області  $D$ . Така область із вбудованим набором частинок набуває нових фізичних властивостей. Зокрема, вона може характеризуватися просторово неоднорідною магнітною проникністю  $\mu(x)$ , яку можна змінювати за рахунок вибору поверхневого імпедансу цих частинок або щільністю їхнього розподілу.

Таким чином, незважаючи на те, що вихідна область має постійну магнітну проникність  $\mu_0$ , результуюче середовище має неоднорідну магнітну проникність  $\mu(x)$ . Її величина визначається аналітично за щільністю розподілу малих частинок і їх поверхневого імпедансу. Цей новий фізичний висновок було вперше аналітично передбачено в [13], а потім підтверджено чисельно в [14] для випадку сферичних частинок.

**1. Фізичні параметри задачі.** Поверхневий імпеданс малих частинок задається формулою

$$\zeta_m(x_m) = h(x_m)/b^\nu, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (1)$$

де  $x_m \in D_m$  – фіксована точка на поверхні  $m$ -ї частинки, а функція  $h(x_m)$  є неперервною і дорівнює нулеві поза  $D_m$  (тут  $M$  – кількість частинок в області  $D$ ). Таке подання поверхневого імпедансу є фізично обґрунтованим, оскільки його абсолютна величина може бути довільно великою і виконується умова  $\operatorname{Re}(h(x_m)) \geq 0$ ;  $\nu \in (0, 1]$  – число, яке дозволяє змінювати значення  $\zeta_m$  у певному діапазоні. Параметр  $b$  визначає максимальний характерний розмір частинок, тобто

$$b = 0.5 \max_{1 \leq m \leq M} (\text{diam } D_m).$$

Малість підобласті  $D_m$  розуміється в сенсі  $kb \ll 1$ , де  $k$  – хвильове число.

Припускаємо, що граничні умови на поверхні  $S_m$  частинки  $D_m$  мають вигляд

$$\mathbf{E}_t = -\zeta_m(\mathbf{H}_t \times \mathbf{N}),$$

де символом « $\times$ » позначено векторний добуток двох векторів. Функції  $\mathbf{E}_t$  ( $\mathbf{H}_t$ ) відповідають тангенціальним компонентам векторів  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{H}$ ) на поверхні  $S_m$ ;  $\mathbf{N}$  – зовнішня одинична нормаль до поверхні  $S_m$ . Ключову роль у цьому розгляді відіграє функція  $p(x)$ , яка характеризує густину частинок у довільній підобласті  $\Delta$  області  $D$ . Будемо вважати, що кількість  $N(\Delta)$  частинок, вбудованих у будь-яку підобласть  $\Delta$ , визначається за формулою

$$N(\Delta) = (1/b^{2-\nu})[1 + o(1)] \int_{\Delta} p(x) dx, \quad (2)$$

де  $b \rightarrow 0$ , а  $p(x) \geq 0$  – довільна неперервна функція, яка дорівнює нулю поза областю  $D$ , у якій розміщено частинки. Оскільки обидві функції  $h(x)$  і  $p(x)$  можуть бути задані, це дає можливість отримати бажану проникність  $\mu(x)$  і коефіцієнт рефракції  $\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$  в області  $D$ , що буде показано нижче.

**Примітка 1.** Така форма імпедансу  $\xi_m(x_m)$  в (1) і функції  $N(\Delta)$  у (2) використовується для переходу від рівняння (14) до допоміжного рівняння (17), на основі якого виведено явну формулу для коефіцієнтів рефракції  $\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$  і магнітної проникності  $\mu(x)$  отриманого неоднорідного середовища.

**Примітка 2.** Розгляд  $\Delta$  як підобласті  $D$  дозволяє створити кусково-сталій розподіл  $\mu(x)$  в усій області  $D$ .

**Примітка 3.** Множник  $1/b^{2-\nu}$  перед інтегралом у (2) має деяке допоміжне значення в нашому розгляді. Його можна використовувати для попередньої оцінки відстані  $d$  між частинками, якщо характерний розмір  $b$  частинок фіксований. Якщо врахувати, що частинки з відстанню  $d$  розміщені в деякому кубі  $\Delta$ , то їх кількість дорівнює  $O(d^{-3})$ . З огляду на (2), ця величина повинна дорівнювати  $O(b^{-(2-\nu)})$ , що дає зв'язок між  $b$  і  $d$  у вигляді  $d = O(b^{(2-\nu)/3})$ , що є істотним при проведенні чисельних розрахунків.

Отримані тут теоретичні результати узагальнюють результати в [1] для окремої частинки. Наведено результати обчислень для частинок у формі еліпсоїда обертання з різними півосями та для частинок некоординатної форми, які задані параметрично. Розроблено оригінальний обчислювальний алгоритм, що дозволяє моделювати середовище з близьким до заданого розподілом магнітної проникності  $\mu(x)$  у різних підобластях  $\Delta$  області  $D$ .

Перевагою підходу є те, що він усуває необхідність розв'язувати систему граничних інтегральних рівнянь великої розмірності з подальшим коректним оцінюванням похідних від функції Гріна в їхніх ядрах; крім того, він може бути застосований для достатньо великої кількості частинок [12, 16], для яких застосування методу граничних інтегральних рівнянь з подальшим застосуванням чисельних методів є неможливим навіть за сучасного стану обчислювальної техніки.

**2. Формулювання задачі.** Припустимо, що сукупність  $D_m$ ,  $1 \leq m \leq M$ , малих тіл розміщена в однорідній області, що характеризується сталими

значеннями  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  і  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ , де  $k$  – хвильове число,  $\omega$  – частота. Без втрати загальності обмежимося випадком однакої відстані  $d$  між сусідніми частинками.

Задача розсіювання ЕМ хвиль зводиться до визначення векторів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{H}$ , які задовольняють систему рівнянь Максвелла [13]

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (3)$$

в області  $D = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{m=1}^M D_m$ .

Подемо компоненти ЕМ поля як

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{\text{sc}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}^{\text{sc}}, \quad (4)$$

де вектори  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  – падаючі поля, які задовольняють рівняння (3) у просторі  $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ;  $\mathbf{E}^{\text{sc}}$  і  $\mathbf{H}^{\text{sc}}$  – розсіяні поля.

Імпедансні граничні умови використаємо у формі

$$(\mathbf{N} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{N})) = \zeta_m (\mathbf{N} \times \mathbf{H}) \quad \text{на} \quad S_m, \quad 1 \leq m \leq M.$$

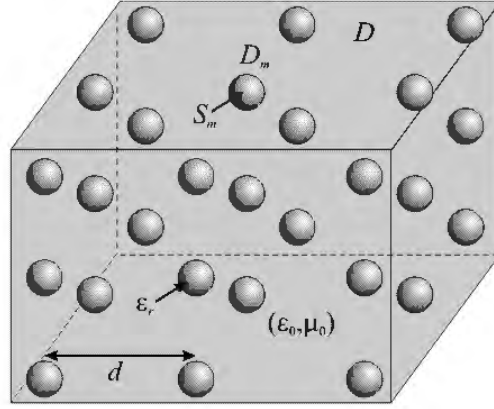


Рис. 1. Геометрія області з включеннями.

Розглянемо випадок падіння плоскої хвилі [17]

$$\mathbf{E}_0 = \boldsymbol{\beta} e^{ik\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}},$$

де  $\boldsymbol{\beta}$  – деякий постійний одиничний вектор, а  $\boldsymbol{\alpha} \in S^2$ , де  $S^2$  – одинична сфера в просторі  $\mathbb{R}^3$ . Вектори  $\boldsymbol{\alpha}$  і  $\boldsymbol{\beta}$  задовольняють умову  $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$ , де символ « $\cdot$ » позначає скалярний добуток двох векторів. Крім того, вектори  $\mathbf{E}^{\text{sc}}$  і  $\mathbf{H}^{\text{sc}}$  повинні задовольняти умову випромінювання Сільвера–Мюллера

$$\mathbf{E}^{\text{sc}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (\mathbf{H}^{\text{sc}} \times \mathbf{N}) = o(1), \quad \mathbf{H}^{\text{sc}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{E}^{\text{sc}} \times \mathbf{N}) = o(1). \quad (5)$$

Використавши відоме співвідношення

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{i\omega\mu_0}, \quad (6)$$

отримаємо

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})) - k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (7)$$

в області  $D$ . Тому граничні імпедансні умови, враховуючи (7), запишемо в формі

$$(\mathbf{N} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{N})) = \frac{\zeta_m}{i\omega\mu_0} (\mathbf{N} \times (\nabla \times \mathbf{E})) \quad \text{на } S_m, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (8)$$

Таким чином задача (3), (4) зводиться до визначення вектора  $\mathbf{E}(x)$  за формулою (7), який задовольняє граничні імпедансні умови (8) і умови випромінювання (5). Після того, як  $\mathbf{E}(x)$  знайдено, за формулою (6) визначаємо  $\mathbf{H}(x)$ .

**3. Розв'язок задачі (3), (4).** Вектор  $\mathbf{E}(x)$  шукатимемо у формі

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + \sum_{m=1}^M \left[ \nabla \times \int_{S_m} g(x, t) \mathbf{U}_m(t) dt \right], \quad (9)$$

де  $\mathbf{U}_m(t) \in T_m$  (множина дотичних до  $S_m$  неперервних векторів),  $t \in S_m$ ,  $dt$  – елемент площі поверхні  $S_m$ ,

$$g(x, t) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad (10)$$

– функція Гріна простору  $\mathbb{R}^3$ . Такий вектор  $\mathbf{E}(x)$  при довільному неперервному  $\mathbf{U}_m(t)$  є розв'язком відповідного рівняння Гельмгольца в області  $D$ , оскільки вектор  $\mathbf{E}_0$  – також розв'язок цього рівняння.

Нехай поверхневий імпеданс  $\zeta_m$  частинок  $D_m$  визначається рівнянням (1), а кількість частинок  $N(\Delta)$ , розміщених у довільній підобласті  $\Delta \in D$ , визначається рівнянням (2).

Подамо (9) у формі

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + \sum_{m=1}^M \left\{ (\nabla_x g(x, x_m) \times \mathbf{Q}_m) + \left[ \nabla \times \int_{S_m} [g(x, t) - g(x, x_m)] \mathbf{U}_m(t) dt \right] \right\}, \quad (11)$$

де

$$\mathbf{Q}_m = \int_{S_m} \mathbf{U}_m(t) dt.$$

Нижній індекс « $x$ » в операторі  $\nabla_x$  в (11) означає диференціювання за змінною  $x$ . Оскільки оцінка  $\|\mathbf{U}_m(t)\| = O(b^{-\nu})$  впливає з оцінки членів інтегрального рівняння для визначення  $\mathbf{U}_m(t)$  в [17], то отримуємо, що  $\|\mathbf{Q}_m(t)\| = O(b^{2-\nu})$ . Цей результат дає можливість сформулювати таку теорему.

**Теорема 1.** Другий доданок під знаком суми у поданні (11) є значно меншим порівняно з першим.

**Д о в е д е н н я.** Для першого доданка під знаком суми в (11) можемо отримати таку оцінку:

$$I_1 = \|\nabla_x g(x, x_m) \times \mathbf{Q}_m\| \leq O\left(\max\left\{\frac{1}{d^2}, \frac{k}{d}\right\}\right) \cdot O(b^{2-\nu}),$$

а для другого доданка – таку:

$$I_2 = \left\| \nabla \times \int_{S_m} [g(x, t) - g(x, x_m)] \mathbf{U}_m(t) dt \right\| \leq b O\left(\max\left\{\frac{1}{d^3}, \frac{k^2}{d}\right\}\right) \cdot O(b^{2-\nu}).$$

Для відношення цих величин маємо

$$\left| \frac{I_2}{I_1} \right| = O\left( \max\left\{ \frac{b}{d}, kb \right\} \right) \rightarrow 0, \text{ якщо } b/d = o(1) \text{ і } b \rightarrow 0.$$

Це доводить теорему 1. ◆

Наведена оцінка дозволяє сформулювати таке твердження.

**Лема 1.** *Розв'язок задачі (3), (4) подається формулою*

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + \sum_{m=1}^M [\nabla_x g(x, x_m) \times \mathbf{Q}_m] + o(1), \quad (12)$$

а похибка розв'язку прямує до нуля при  $b \rightarrow 0$ .

Якщо  $|x - x_j|$  є одного порядку з  $b$ , то член з  $m = j$  у сумі (12) можна опустити, згідно з означенням асимптотичного (ефективного) поля [17] і леми 1. У термінах асимптотичного ЕМ поля формулу (12) можемо подати як

$$\mathbf{E}_{\text{eff}}(x) \approx \mathbf{E}_0(x) + \sum_{m=1, m \neq j}^M [\nabla_x g(x, x_m) \times \mathbf{Q}_m] + o(1). \quad (13)$$

Ця формула має практичне значення, оскільки дозволяє виключити член із  $m = j$  у СЛАР для визначення векторів  $\mathbf{U}_m$  (див. нижче рівняння (24)–(26)).

У [12] показано, що границя ефективного поля  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  існує при  $b \rightarrow 0$  і має вигляд (12). Це було узагальнено в [13] для випадку сукупності сферичних частинок з імпедансними граничними умовами і, як покажуть результати числових розрахунків, справджується у випадку частинок довільної форми. Таким чином, формула (13) є асимптотично точною.

Можна показати, що, якщо  $b \rightarrow 0$ , то сума в (13) збігається до відповідного інтеграла, і (9) набуває вигляду

$$\mathbf{E}_{\text{eff}}(x) \approx \mathbf{E}_0(x) + \int_D g(x, y) h(y) p(y) \mathbf{Q}(y) dy, \quad (14)$$

а вектор-функція  $\mathbf{Q}(y)$  визначається формулою

$$\mathbf{Q}_m \approx \mathbf{Q}(y_m) b^{2-\nu}$$

однозначно, причому функція  $\mathbf{Q}(y)$  є неперервною в області  $D$ . Ця функція визначається однозначно за умови, що множина точок  $\{y_m\}_{m=1}^M$  є щільною в області  $D$ , коли  $b \rightarrow 0$ .

Міркування, наведені вище, не залежать від форми частинок. Вигляд функції  $\mathbf{Q}_m$  для випадку частинок довільної форми визначимо, використовуючи міркування, аналогічні до випадку однієї частинки [1]. Для величин  $\mathbf{Q}_m$  отримаємо таку формулу:

$$\mathbf{Q}(y_m) \approx \frac{\zeta_m |S_m|}{i\omega\mu_0} \mathbf{A}(\nabla \times \mathbf{E}(y_m)), \quad (15)$$

де  $|S_m|$  – площа поверхні частинки  $D_m$ ;  $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$ ;  $\mathbf{I}$  – одинична матриця розмірності  $3 \times 3$ , а елементи  $b_{nm}$ ,  $m, n = 1, 2, 3$ , матриці  $\mathbf{B}$  визначаються як

$$b_{nm} = \frac{1}{|S_m|} \int_{S_m} N_n(x) N_m(x) dx, \quad (16)$$

де  $\{n, m\} \in \{x, y, z\}$  позначають  $x, y, z$ -компоненти вектора  $\mathbf{N}$ . Використовуючи формулу (15), з рівнянь (12) і (13) отримуємо

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + \frac{\eta}{i\omega\mu_0} \left[ \nabla \times \int_D g(x, y) h(y) p(y) \mathbf{A}(\nabla \times \mathbf{E}(y)) dy \right], \quad (17)$$

де  $\eta$  – деяка константа, яку визначимо нижче. Важливо відмітити, що параметр  $\eta$  у формулі (17), який визначається формою частинок, виноситься за знак інтегралу, що обмежує розгляд частинками тільки однакової форми.

Фізичний сенс вектора  $\mathbf{E}(x)$  у (17) такий: він є границею асимптотичного поля  $\mathbf{E}_{\text{eff}}(x)$  при  $b \rightarrow 0$ , а функція  $p(x)$  – та сама, що в рівнянні (2). Цей момент має вирішальне значення, оскільки він дозволяє відкинути член при  $m = j$  у СЛАР (21) при використанні методу колокацій для його розв’язання. Рівняння (17) можна розглядати як явну точну формулу для визначення вектора  $\mathbf{E}(x)$  скрізь поза областю  $D$ . Більше того, воно є точним в околі  $D$  відповідно до означення ефективного асимптотичного поля.

**4. Фізичний висновок з рівняння (17).** Використовуючи рівняння (17), можемо отримати явні формули як для коефіцієнта рефракції, так і для магнітної проникності отриманого неоднорідного середовища. Застосувавши до (17) певні перетворення, отримаємо співвідношення між хвильовими числами  $k$  і  $K(x)$  початкового однорідного і створеного неоднорідного середовищ:

$$K(x) = \frac{k^2}{1 + (\eta / (i\omega\mu_0))h(x)p(x)}.$$

З використанням цього співвідношення отримаємо явну формулу для магнітної проникності неоднорідного середовища. Для цього введемо функцію

$$\Phi(x) = 1 - \frac{\eta}{i\omega\mu_0} h(x)p(x), \quad (18)$$

Якщо  $\varepsilon(x) = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \text{const}$ , де  $\varepsilon_r$  – відносна діелектрична проникність області, в якій розміщені частинки, то отримаємо

$$\mu(x) = \mu_0 / \Phi(x), \quad (19)$$

тому

$$K^2(x) = \omega^2 \varepsilon(x) \mu(x). \quad (20)$$

Співвідношення (18)–(20) дозволяють сформулювати фізичний наслідок, який подаємо як лему.

**Лема 2.** *Електромагнітні властивості отриманої неоднорідної області  $D$  характеризуються змінною магнітною проникністю*

$$\mu(x) = \frac{\mu_0}{\Phi(x)} = \frac{\mu_0}{1 - \frac{\eta}{i\omega\mu_0} h(x)p(x)},$$

новим хвильовим числом

$$K^2(x) = \omega^2 \varepsilon_r \mu(x)$$

і коефіцієнтом рефракції

$$n(x) = \sqrt{\varepsilon_r \mu(x)}.$$

**5. СЛАР для обчислення вектора  $\mathbf{E}(x)$ .** Розглянемо алгоритм для визначення  $\mathbf{E}(x)$  за формулою (17). Він складається з виведення СЛАР для пошуку допоміжних векторів

$$\mathbf{U}_m = (\nabla \times \mathbf{E})(x_m), \quad 1 \leq m \leq M.$$

За обчисленими векторами  $\mathbf{U}_m$  знаходимо

$$\mathbf{Q}_m = \frac{\zeta_m \eta_m}{i\omega\mu(x)} b^{2-\nu} h(x_m) \mathbf{A} \mathbf{U}_m.$$

Відмітимо, що  $|S_m| = \eta_m b^2$ , де постійна  $\eta_m$  залежить не від розміру частинки  $b$ , а лише від її форми. Обмежимося частинками однакової форми і надалі індекс « $m$ » в  $\eta_m$  опускаємо. Наприклад, для сфери  $\eta_m = 4\pi$ , а для еліпсоїда з півосями  $a$ ,  $b$  і  $c$ , де  $a = t_1 b$ ,  $c = t_2 b$  і  $t_1, t_2 < 1$ , значення  $\eta_m$  обчислюється складніше. Наближена формула має вигляд [23]

$$\eta = 4\pi \frac{\sqrt[p]{t_1^p + t_1^p t_2^p + t_2^p}}{3}, \quad p = 1.60075.$$

Якщо величини  $\mathbf{Q}_m$  знайдено, то поле  $\mathbf{E}(x)$  визначається рівнянням (13).

СЛАР для пошуку величин  $\mathbf{U}_m$  виводимо таким чином. Застосуємо оператор  $\nabla \times$  до рівняння (12) і нехай  $x = x_j$ ,  $1 \leq j \leq M$ . Замінюємо суму  $\sum_{m=1}^M$  на суму  $\sum_{m \neq j, m=1}^M$  згідно з означенням асимптотичного (ефективного) поля і рівнянням (13). У результаті отримуємо систему

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_{0j} + \frac{\zeta_m \eta}{i\omega\mu(x)} b^{2-\nu} \sum_{m \neq j, m=1}^M h(x_m) [\nabla_x \times (\nabla_x g(x, x_m) \times \mathbf{A}\mathbf{U}_m)]|_{x=x_j},$$

$$1 \leq j \leq M, \quad (21)$$

$$\mathbf{U}_{0j} = \nabla \times \mathbf{E}_0(x_j), \quad \mathbf{U}_j = \nabla \times \mathbf{E}(x_j).$$

Маючи розв'язок (21), можемо визначити  $\mathbf{E}(x)$  всюди поза областю  $D$ .

**6. Результати числового моделювання.** Наведені нижче чисельні експерименти демонструють аналіз похибок для асимптотичного рівняння (21) і залежність збіжності ітераційного процесу розв'язування СЛАР при різних значеннях параметрів задачі  $k$ ,  $b$ ,  $d$  і  $M$ . Ці обчислення дозволяють перевірити область застосування асимптотичного підходу.

Отримані числові результати підтверджують також можливість створення середовища зі змінними показником заломлення  $\sqrt{\epsilon_r \mu(x)}$  і проникністю  $\mu(x)$ .

Щоб проілюструвати переваги запропонованого підходу, у цьому дослідженні були проведені чисельні експерименти для області  $D$  у формі куба з рівномірним розподілом вбудованих частинок уздовж трьох координатних осей  $Ox$ ,  $Oy$  та  $Oz$ . У процесі обчислень використовуємо такий набір фізичних параметрів:

$$\text{електрична стала } \epsilon_0 = 8.854188 \cdot 10^{-1} \text{ Ф/м};$$

$$\text{магнітна проникність } \mu_0 = 1.256637 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м};$$

$$\text{швидкість світла } c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/сек};$$

$$\text{вектор, що характеризує напрямок плоскої хвилі } \boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1);$$

$$\text{постійний вектор } \boldsymbol{\beta} = (1, 1, 0) \text{ (таким чином, виконується умова } \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0);$$

$$\text{константа } \nu = 0.9;$$

$$\text{відстань між сусідніми частинками } d = O(b);$$

$$\text{функція } p(x) = Mb^{2-\nu}/|D|, \text{ а } |D| \text{ - об'єм області } D;$$

$$\text{вектор } \mathbf{U}_0(x) = \nabla \times \boldsymbol{\beta} e^{ik\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}}|_{x=x_m}.$$

Решта параметрів задачі  $k$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $M$  та функція  $h(x)$  є змінними (для встановлення області застосування запропонованого підходу).



**7. Оцінка похибки для поля  $\mathbf{E}(x)$  (13).** Використовуючи рівняння (13) для вектора  $\mathbf{E}(x)$  напруженості електричного поля, можемо оцінити похибку асимптотичного розв'язку як

$$\text{Err} = \left\| \sum_{m=1}^M \left[ \nabla \times \int_{S_m} (g(x, t) - g(x, x_m)) \mathbf{E}(t) dt \right] \right\|.$$

Похибку різниці функцій Гріна (10) можемо оцінити як

$$|g(x, t) - g(x, x_m)| = O\left(\frac{k^2 c}{\ell} + \frac{kc}{\ell^2} + \frac{c}{\ell^3}\right), \quad (22)$$

де  $c = \max_m |t - x_m|$  і  $\ell = \min_m |x - x_m|$ . Враховуючи явну формулу для  $\mathbf{Q}_m$ , отримуємо

$$\mathbf{Q}_m = \int_{S_m} \mathbf{U}_m(t) dt = -\frac{\zeta_m |S_m|}{i\omega\mu} \mathbf{A}(\nabla \times \mathbf{E}_m) = \frac{\zeta_m \eta b^2}{i\omega\mu} \mathbf{A} \mathbf{U}_m \quad (23)$$

при  $b \rightarrow 0$ .

З урахуванням (22) і (23) отримаємо оцінку розв'язку асимптотичного рівняння (13), яку можемо сформулювати у вигляді такої леми.

**Лема 3.** Похибка асимптотичного розв'язку (13) визначається формулою

$$\text{Err} = \frac{1}{4\pi} \max_c \left( \frac{k^2 c}{\ell}, \frac{kc}{\ell^2}, \frac{c}{\ell^3} \right) \sum_{m=1}^M \frac{|\zeta_m| \eta b^2}{\omega\mu} \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{U}_m\|,$$

де  $\|\mathbf{A}\|$  – норма матриці  $\mathbf{A}$  розмірності  $3 \times 3$ , введеної в (15), і  $\|\mathbf{U}_m\|$  – норма вектора  $\mathbf{U}_m$ .

Розрахунок похибки стає простим, коли всі частинки та їхні імпеданси однакові, тобто  $S_m = S$  і  $\zeta_m = \zeta$ . Саме за таких припущень виконано наведені нижче результати обчислень для частинок у формі еліпсоїда з трьома різними півосями  $a$ ,  $b$  і  $c$ , де  $a = 0.8b$  і  $c = 0.6b$ . При таких  $a$ ,  $b$  і  $c$  параметр  $\eta = 7.9805$ , функція  $h(x) = -10.0i$ , параметр  $\nu = 0.9$ , а зміна імпедансу  $\zeta$  залежить від зміни параметра  $b$  (див. рівняння (1)).

На рис. 2 показано результати оцінки похибки для різних значень параметра  $k$ . Область  $D$  – куб  $5 \times 5 \times 5$  з рівномірно розподіленими еліпсоїдними частинками вздовж трьох координатних осей. Розрахунки проводились для значень  $b$  в діапазоні від 0.0001 м до 0.0003 м, а відстань між частинками  $d = 5b$ .

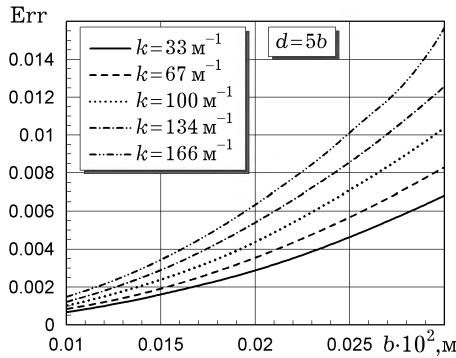


Рис. 2. Похибка асимптотичного розв'язку (13) при малих значеннях відстані  $d$  (великі значення  $k$ ).

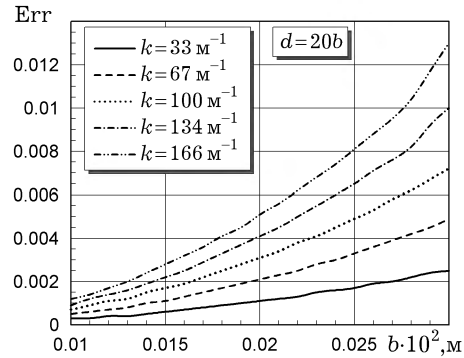


Рис. 3. Похибка асимптотичного розв'язку (13) при великих значеннях відстані  $d$  (великі значення  $k$ ).

Наведені дані свідчать, що похибка розв'язку зменшується зі зменшенням великої півосі  $b$  еліпсоїда, що є чисельним підтвердженням точності формули (13).

Похибка  $Err$  також залежить від значень параметра  $k$ . Максимальну похибку спостерігаємо при  $k = 166 \text{ м}^{-1}$ , і вона змінюється від 0.0013 до 0.0157 при зростанні  $b$ . Мінімальна похибка досягається при  $k = 33 \text{ м}^{-1}$  і змінюється від 0.0009 до 0.0083. З отриманих результатів можна зробити висновок, що похибка зростає зі зростанням  $b$ . Виявилось, що похибка для заданих значень  $k$  не сильно залежить від відстані  $d$  між частинками, якщо значення  $b$  залишається незмінним. Це підтверджується даними на рис. 3, де представлені результати для  $d = 20b$ . В цілому похибка є такого самого порядку і трохи меншою. При цьому значення похибки при  $b = 0.0003 \text{ м}$  становлять 0.0033 і 0.0141 для  $k = 33 \text{ м}^{-1}$  і  $k = 166 \text{ м}^{-1}$ , відповідно.

Результати змінюються суттєво, коли значення параметра  $k$  набагато менші (що відповідає переходу від ГГц до МГц частот). На рис. 4 і рис. 5 результати наведено для значень  $k$  в діапазоні від  $k = 0.033 \text{ м}^{-1}$  до  $k = 0.166 \text{ м}^{-1}$ . Похибка при великих  $d$  не відрізняється від попереднього випадку, і максимальна похибка при  $b = 0.0003 \text{ м}$  дорівнює 0.0018 і 0.0083 для  $k = 0.033 \text{ м}^{-1}$  і  $k = 0.166 \text{ м}^{-1}$ , відповідно. На відміну від великих значень  $k$ , похибка зростає при його зменшенні. Для випадку малої відстані  $d$  між частинками результати є набагато гіршими. Значення похибки для відстані  $d = 5b$  показано на рис. 5. У цьому випадку найбільшою є похибка при  $b = 0.0003 \text{ м}$ , і вона дорівнює 0.34100 і 1.6347 для  $k = 0.033 \text{ м}^{-1}$  і  $k = 0.166 \text{ м}^{-1}$ , відповідно. Для цього діапазону зміни параметра  $k$  необхідно зменшити значення  $b$ , щоб отримати меншу похибку. Наприклад, щоб отримати похибку, що дорівнює 0.01, потрібно зменшити  $b$  до  $0.12 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  для значення  $k = 0.033 \text{ м}^{-1}$ . Однак задовільні результати отримати неможливо, оскільки ітераційний процес розв'язування СЛАР (24)–(26) стає нестійким для таких параметрів задачі. Оцінка похибки проводилася також для випадку частинок довільної форми, коли форма задається параметрично.

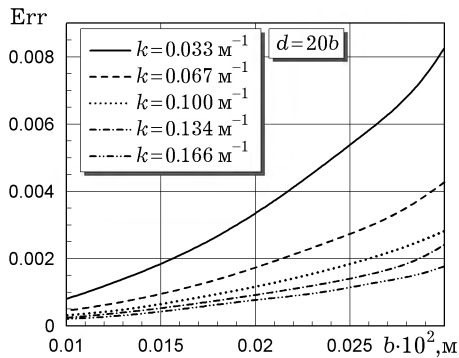


Рис. 4. Похибка асимптотичного розв'язку (13) при великих значеннях відстані  $d$  (малі значення  $k$ ).

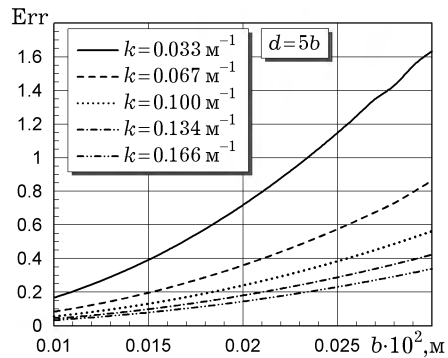


Рис. 5. Похибка асимптотичного розв'язку (13) при малих значеннях відстані  $d$  (малі значення  $k$ ).

**8. Точність ітераційної процедури розв'язування СЛАР (21).** Чисельні експерименти, проведені тут, спрямовані на перевірку збіжності асимптотичного розв'язку до розв'язку СЛАР (21). Невідомими є значення  $U_j$  у лівій частині (21) і в членах  $[\nabla_x g(x, x_m) \times AU_m]$  у правій частині (21). Детально цю СЛАР запишемо як

$$U_{jx} = U_{0x} - \frac{\eta}{i\omega\mu_0} b^{2-\nu} \sum_{m=j, m \neq j}^M h(x_m) \left[ -U_{mx} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g(x, x_m) + \right. \\ \left. + U_{my} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x, x_m) + U_{mz} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} g(x, x_m) \right], \quad (24)$$

$$U_{jy} = U_{0y} - \frac{\eta}{i\omega\mu_0} b^{2-\nu} \sum_{m=j, m \neq j}^M h(x_m) \left[ -U_{my} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g(x, x_m) + \right. \\ \left. + U_{mx} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} g(x, x_m) + U_{mz} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} g(x, x_m) \right], \quad (25)$$

$$U_{jz} = U_{0z} - \frac{\eta}{i\omega\mu_0} b^{2-\nu} \sum_{m=j, m \neq j}^M h(x_m) \left[ -U_{mz} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g(x, x_m) + \right. \\ \left. + U_{mx} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} g(x, x_m) + U_{my} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} g(x, x_m) \right], \quad 1 \leq j \leq M, \quad (26)$$

де  $U_{jx}$ ,  $U_{jy}$  та  $U_{jz}$  є  $x$ -,  $y$ - та  $z$ -компонентами  $\mathbf{U}_j$ . З (24)–(26) випливає, що для визначення компоненти  $U_{jx}$  необхідно знати дві складові  $U_{jy}$  та  $U_{jz}$ . Алгоритм розв'язання системи (24)–(26) аналогічний до того, що був запропонований для сферичних частинок у [14].

Виявилося, що збіжність ітераційного процесу розв'язування СЛАР (24)–(26) при фіксованому значенні  $M$  залежить від величини  $d/b$ . Результати, отримані для різних значень  $d$  при фіксованому  $b$ , показали, що значення  $d/b = 10$  є порогом, який гарантує збіжність ітераційного процесу розв'язання СЛАР (24)–(26). При наближенні відношення  $d/b$  до цього порогу ітераційний процес починає сповільнюватися; надалі, він стає розбіжним при певному значенні  $d/b$ . Відносну похибку розв'язку СЛАР (24)–(26) визначасмо як

$$\overline{\text{Err}} = \frac{\|U_x^{(p+1)} - U_x^{(p)}\|}{\|U_x^{(p+1)}\|}, \quad (27)$$

де  $p$  – номер ітерації.

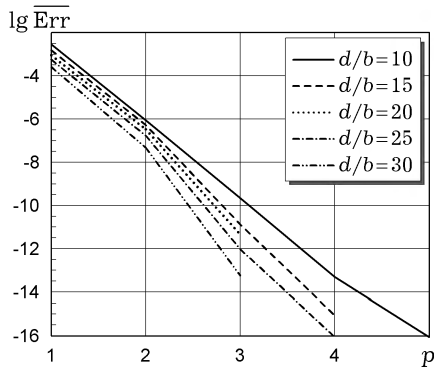


Рис. 6. Характеристика збіжності для компоненти  $U_x$ .

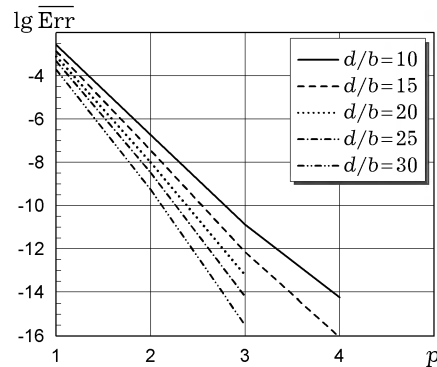


Рис. 7. Характеристика збіжності для компоненти  $U_y$ .

На рис. 6 показано характеристику збіжності для компоненти  $U_x$  – значення логарифма її відносної похибки за формулою (27). Представлені результати демонструють високу швидкість збіжності вже на перших

ітераціях. Для досягнення відносної похибки порядку  $10^{-14}$  потрібно не більше чотирьох ітерацій. Отримані результати показують, що найбільша точність досягається при  $b = 0.00015$  м. Точність на першій ітерації має порядок  $10^{-3}$  і прямує до точності порядку  $10^{-16}$ . Аналогічні результати подано на рис. 7 для характеристики збіжності компоненти  $U_y$ . Швидкість збіжності в цьому випадку трохи нижча, починаючи з другої ітерації, але мінімальний рівень досягнутої похибки є значенням такого ж порядку, що й для компоненти  $U_x$ .

Отримані результати засвідчили, що існує певна межа застосування запропонованого асимптотичного підходу, яка з фізичної точки зору полягає в неможливості створення середовищ із щільним розміщенням частинок, що виключає отримання середовища (матеріалу), який відрізнятиметься значною мірою від початкового.

**9. Відносна магнітна проникність неоднорідного середовища.** Результати обчислень наведено для середовища з  $\epsilon_r = 9.00$  (вуглецевий матеріал). На рис. 8 показано графіки розподілу відносної магнітної проникності  $\mu(x)/\mu_0$  отриманого неоднорідного середовища для великих значень параметра  $k$ . Розрахунки проводились для значень  $b$  в діапазоні від 0.0001 м до 0.0003 м. Область  $D$  – куб  $25 \times 25 \times 25$ , у якому рівномірно розміщені  $M = 25^3$  частинок. Відстань  $d$  між частинками задана таким чином, щоб було виконано співвідношення, наведене в *Примітці 3*. Це відповідає зміні сторони зразка від 0.024 м до 0.072 м. Отримані значення  $\mu$  нормовані на магнітну проникність  $\mu_0$  матеріалу, вільного від частинок.

Найменше відхилення від початкового значення  $\mu_0$  досягається для  $k = 166 \text{ м}^{-1}$ , а найбільшим є відхилення при  $k = 33 \text{ м}^{-1}$ . Значення  $\mu/\mu_0$  при цьому змінюється від 0.9096 до 0.7056. Так, зі зменшенням  $k$  для наведених  $b$  значення  $\mu/\mu_0$  прямує до 1 і сумарна зміна становить 4.3% для  $k = 33 \text{ м}^{-1}$  і 0.99 % – для  $k = 166 \text{ м}^{-1}$ . Зміна  $\mu$  наближається до лінійної при збільшенні  $k$  і, в загальному, прямує до проникності  $\mu_0$  початкового однорідного середовища.

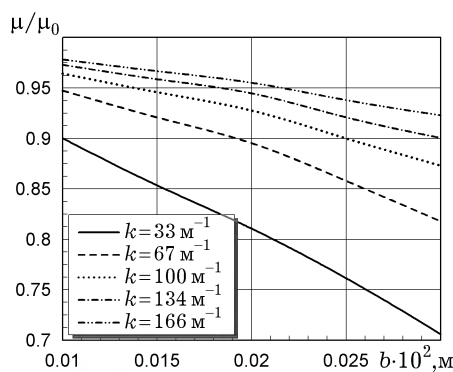


Рис. 8. Залежність відносної магнітної проникності  $\mu(x)/\mu_0$  від параметра  $b$ .

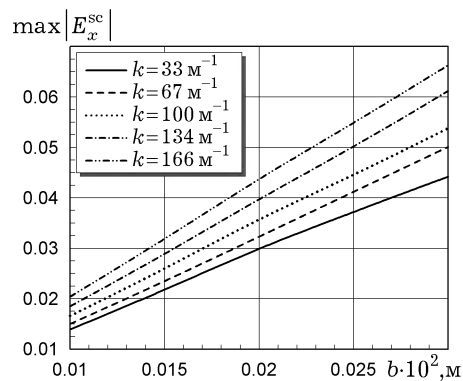


Рис. 9. Залежність амплітуди  $E_x^{\text{sc}}(x)$  розсіяного поля від параметра  $b$ .

Результати дослідження залежності амплітуди розсіяного поля  $E_x^{\text{sc}}$  від параметрів задачі показано на рис. 9. Подібно до характеру зміни  $\mu$ , швидкість зміни  $E_x^{\text{sc}}$  наближається до лінійної. Як і у випадку зміни  $\mu$ , макси-

мальна зміна  $E_x^{sc}$  досягається при  $k = 33 \text{ м}^{-1}$  і дорівнює 6.4%. Проте амплітуда  $E_x^{sc}$  є незначною порівняно з амплітудою падаючого поля (максимальне значення амплітуди падаючого поля  $E_0$  дорівнює 1.0). Розрахунки показують, що для збільшення амплітуди розсіяного поля необхідно або зменшити відстань  $d$  між сусідніми частинками (звичайно, до значень, не менших ніж співвідношення, наведене в *Примітці 3*), або збільшити характерний розмір  $b$  частинок.

На рис. 10 наведено результати моделювання середовища з кусково-сталою магнітною проникністю  $\mu$ . Такий розподіл сформовано за рахунок задання різних значень функції  $h(x)$  у чотирьох підобластях  $\Delta_i$ , при цьому кількість включень у підобластях була однаковою.

Результати на рис. 11 демонструють можливість створення середовища з істотно змінним розподілом магнітної проникності  $\mu(x)$ . Область  $D$  складається з чотирьох підобластей  $\Delta_i$  з кількістю частинок у них 275, 225, 165, 99, відповідно, а  $k = 166 \text{ м}^{-1}$ . Форма частинок – еліпсоїди обертання з найбільшою піввіссю  $b = 0.0001 \text{ м}$  зі співвідношенням між півосями  $a = 0.8b$ ,  $c = 0.6b$ . Відстань між частинками вибирається таким чином, щоб підобласті  $\Delta_i$  утворювали куб зі стороною 0.016 м. Таке розміщення частинок дозволяє створити проникність  $\mu(x)$  з кусково-сталім розподілом [23]. На додаток до зазначеної процедури, функція  $h(x)$ , що описує граничний імпеданс  $\zeta$  частинок (див. формулу (1)), змінюється певним чином у кожній підобласті.

Наведена вище процедура дозволяє сформулювати розподіл  $\mu(x)$ , який зростає зі зваженою квадратичною швидкістю від центру області  $D$  до його периферії. Отримані результати відкривають перспективу створення магнітних матеріалів з різними характеристиками.

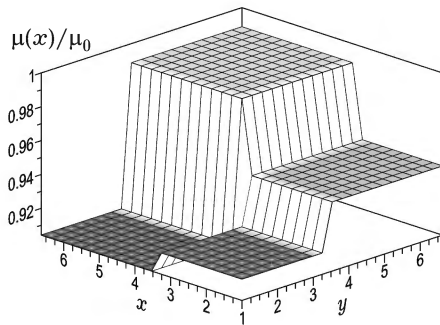


Рис. 10. Кусково-стала магнітна проникність при постійних значеннях функції  $h(x)$  в чотирьох підобластях  $\Delta_i$ .

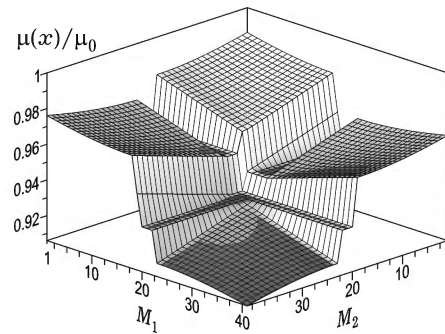


Рис. 11. Розподіл магнітної проникності  $\mu(x)/\mu_0$  для різних  $N(\Delta)$  в чотирьох підобластях  $\Delta_i$  при змінній функції  $h(x)$ .

Результати числових розрахунків, проведених для різних значень параметра  $k$ , свідчать про те, що співвідношення між характерним розміром  $b$  частинок і відстанню  $d$  між ними (див. *Примітку 3*) є вирішальним для визначення геометричних параметрів, які гарантують збіжність ітераційного процесу розв'язування СЛАР (21). Беручи це до уваги, можна зробити висновок, що для зменшення геометричних розмірів області, в якій розміщуються включення, необхідно переходити в область великих значень параметра  $k$ , щоб отримати розв'язок задачі з достатньою точністю.

**Висновки.** Розроблено асимптотичний підхід до розв'язання задачі розсіювання ЕМ хвиль на сукупності імпедансних тіл довільної форми малого розміру. Виведено явну формулу для розсіяного поля у термінах вектора **E** електричного поля. Це дало змогу отримати явні вирази для магнітної і відносної діелектричної проникностей та коефіцієнта рефракції отриманого неоднорідного матеріалу.

Оцінка похибки отриманого асимптотичного розв'язку свідчить, що її значення не перевищує 0.5 % у розглянутому діапазоні параметрів задачі. Отримані чисельні результати не суперечать фізичному змісту, тобто значення  $\mu$  і  $\varepsilon$  наближаються до характеристик початкового однорідного середовища, якщо зменшувати розмір частинок або збільшувати відстань між ними. Амплітуда розсіяного поля у цьому випадку також зменшується.

Практичне значення методу полягає у можливості створення матеріалів зі змінним коефіцієнтом рефракції і магнітною проникністю  $\mu(x)$ . Метод можна узагальнити на випадок області з постійною провідністю, а також на випадок нерівномірного розподілу частинок, їхнього різного розміру та форми.

1. *Andriychuk M. I., Indratno S. W., Ramm A. G.* Electromagnetic wave scattering by a small impedance particle: Theory and modeling // *Optics Commun.* – 2012. – **285**, No. 7. – P. 1684–1691. – <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2011.12.055>.
2. *Boubendir Y., Turc C.* Well-conditioned boundary integral equation formulations for the solution of high-frequency electromagnetic scattering problems // *Comput. Math. Appl.* – 2014. – **67**, No. 10. – P. 1772–1805. – <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.04.003>.
3. *Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E.* Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes. – Amsterdam: North-Holland, 1969. – xvii+728 p.
4. *Brown W. P. (Jr.)* On the asymptotic behaviour of electromagnetic fields scattered from convex cylinders near grazing incidence // *J. Math. Anal. Appl.* – 1966. – **15**, No. 2. – P. 355–385. – [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(66\)90127-2](https://doi.org/10.1016/0022-247X(66)90127-2).
5. *Chao J. C., Liu Y. J., Rizzo F. J., Martin P. A., Udupa L.* Regularized integral equations and curvilinear boundary elements for electromagnetic wave scattering in three dimensions // *IEEE Trans. Antenn. Propag.* – 1995. – **43**, No. 12. – P. 1416–1422. – <https://doi.org/10.1109/8.475931>.
6. *Hassan M. A. M., Kishk A. A.* A combined asymptotic waveform evaluation and random auxiliary sources method for wideband solutions of general-purpose EM problems // *IEEE Trans. Antenn. Propag.* – 2019. – **67**, No. 6. – P. 4010–4021. – <https://doi.org/10.1109/TAP.2019.2902665>.
7. *Hazard C., Lenoir M.* On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations // *SIAM J. Math. Anal.* – 1996. – **27**, No. 6. – P. 1597–1630. – <https://doi.org/10.1137/S0036141094271259>.
8. *Ko W. L., Mittra R.* A new approach based on a combination of integral equation and asymptotic techniques for solving electromagnetic scattering problems // *IEEE Trans. Antenn. Propag.* – 1977. – **25**, No. 2. – P. 187–197.
9. *Kwon D.-H., Burkholder R. J., Pathak P. H.* Efficient method of moments formulation for large PEC scattering problems using asymptotic phasefront extraction (APE) // *IEEE Trans. Antenn. Propag.* – 2001. – **49**, No. 4. – P. 583–591.
10. *Mie G.* Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metal-lösungen // *Ann. Phys.* – 1908. – **330**, No. 3. – P. 377–445.
11. *Nosich A. I.* The method of analytical regularization in wave-scattering and eigenvalue problems: Foundations and review of solutions // *Antenn. Propag. Magaz., IEEE.* – 1999. – **41**, No. 3. – P. 34–49. – <https://doi.org/10.1109/74.775246>.
12. *Ramm A. G.* Scattering of acoustic and electromagnetic waves by small impedance bodies of arbitrary shape. Applications to creating new engineering materials. – New York: Momentum Press, 2013. – xviii+240 p.
13. *Ramm A. G.* Wave scattering by small bodies of arbitrary shapes. – Singapore: World Sci. Publ., 2005. – 312 p. – <https://doi.org/10.1142/5765>.
14. *Ramm A. G., Andriychuk M. I.* Application of the asymptotic solution to EM field scattering problem for creation of media with prescribed permeability // *J. Appl. Math. Comput.* – 2014. – **45**, No. 1. – P. 461–485. – <https://doi.org/10.1007/s12190-013-0732-7>.

15. Ramm A. G., Andriychuk M. I. Calculation of electromagnetic wave scattering by a small impedance particle of an arbitrary shape // *Math. Model. Nat. Phenom.* – 2014. – **9**, No. 5. – P. 254–269. – <https://doi.org/10.1051/mmnp/20149517>.
16. Ramm A. G., Tran N. T. A fast algorithm for solving scalar wave scattering problem by billions of particles // *J. Algorithms & Optimiz.* – 2015. – **3**, No. 1. – P. 1–13.
17. Ramm A. Many-body wave scattering by small bodies and applications // *J. Math. Phys.* – 2007. – **48**, No. 10. – P. 103511-1–103511-7. – <https://doi.org/10.1063/1.2799258>.
18. Ramm A. Wave scattering by many small particles embedded in a medium // *Phys. Lett. A.* – 2008. – **372**, No. 17. – P. 3064–3070. – <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.01.006>.
19. Rao S. M., Wilton D. R., Glisson A. W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // *IEEE Trans. Antenn. Propag.* – 1982. – **30**, No. 3. – P. 409–418.
20. Sankar A., Tong T. C. Current computation on complex structures by finite element method // *Electron. Lett.* – 1975. – **11**, No. 20. – P. 481–482.
21. Serdyuk V. M. Method of additive regularization of field integrals in the problem of electromagnetic diffraction by a slot in a conducting screen, placed before a dielectric layer // *Prog. Electromagn. Res.* **B.** – 2019. – **83**. – P. 129–151. – <https://doi.org/10.2528/PIERB18102906>.
22. Wang J. J. H. Numerical analysis of three-dimensional arbitrarily-shaped conducting scatterers by trilateral surface cell modeling // *Radio Sci.* – 1978. – **13**, No. 6. – P. 947–952.
23. Weisstein E. W. Prolate spheroid. – (Aug. 2017). – <http://mathworld.wolfram.com/ProlateSpheroid.html>.
24. Yang J., Carlberg U., Kildal P.-S., Kehn M. N. M. A fast mode analysis for waveguides of arbitrary cross section with multiple regions by using a spectrum of two-dimensional solutions and asymptotic waveform evaluation // *IEEE Trans. Microwave Theory Techniq.* – 2004. – **52**, No. 6. – P. 1615–1621. – <https://doi.org/10.1109/TMTT.2004.828464>.
25. Yevtushenko F. O., Dukhopelnykov S. V., Nosich A. I. H-polarized plane-wave scattering by a PEC strip grating on top of a dielectric substrate: analytical regularisation based on the Riemann-Hilbert problem solution // *J. Electromagn. Waves Appl.* – 2020. – **34**, No. 4. – P. 483–499. – <https://doi.org/10.1080/09205071.2020.1722258>.

#### ASYMPTOTIC METHOD OF SOLUTION TO THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELD SCATTERING ON A SET OF SMALL IMPEDANCE PARTICLES

*The solution to the problem of electromagnetic wave scattering on a set of small-size impedance particles of arbitrary shape is derived by the asymptotic approach. Particles are located in a homogeneous domain with electric constant  $\epsilon_0$  and magnetic permeability  $\mu_0$ . The solution is derived under the condition that characteristic size of the particle  $b$  tends to zero,  $b \rightarrow 0$ , and the number  $M(b)$  of particles tends to infinity according to the certain rule. The solution is presented in the explicit form that excludes the necessity to solve the corresponding boundary integral equation for determination of the fields on the surface of particles and thus avoids integrating the derivatives of the Green function, which are in the kernel of this boundary integral equation. Practical application of this approach yields an ability to create media with the desired inhomogeneous distribution of refractive coefficient and magnetic permeability. Explicit analytical formulas are derived for these physical parameters.*

**Key words:** *problem of electromagnetic scattering, asymptotic method, semi-analytical solution, method convergence, material parameters, numerical modeling.*

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано  
11.08.22

<sup>2</sup> Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів