УДК 519.614

П. О. Савенко[✉]

УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ УРИСОНА ШЛЯХОМ ВВЕДЕННЯ ДОДАТКОВИХ ЧИСЛОВИХ ПАРАМЕТРІВ

Розглянуто узагальнення нелінійного інтегрального рівняння типу Урисона, яке полягає у введенні в підінтегральний вираз двох дійсних числових параметрів. Це дає змогу знайти в заданій області множину точок можливого розгалуження (біфуркації) розв'язків у вигляді спектральних ліній шляхом розв'язання нелінійної двопараметричної спектральної задачі.

***Ключові слова**: узагальнене рівняння Урисона, нелінійна двопараметрична спектральна задача, розгалуження розв'язків.*

Вступ. Нелінійні інтегральні рівняння виникають в багатьох задачах сучасної математики, фізики й техніки. Питанням розвитку теорії нелінійних інтегральних рівнянь присвячено оглядові роботи [3, 4], зокрема, відмічається, що нелінійні інтегральні рівняння типу Урисона і Гаммерштейна досліджувались у працях О. М. Ляпунова, Е. Шмідта, Л. Ліхтенштейна, М. А. Красносельського, П. П. Забрейка, В. Я. Стеценка [8, 10–13, 21, 25] та багатьох інших авторів. Розроблено класичну теорію дослідження нелінійних інтегральних рівнянь, у яких відповідний нелінійний оператор є компактним у функціональних просторах, що розглядаються.

У зв'язку з розвитком сучасної математичної фізики зріс інтерес до дослідження нелінійних інтегральних рівнянь типу Урисона з некомпактними інтегральними операторами [22]. Поряд з теоретичними питаннями існування розв'язків та їхніми властивостями для деяких класів нелінійних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь з аналітичними операторами [23], залежними від числового або функціонального аргументу, інтенсивно розвивається теорія галуження розв'язків [1, 5]. Огляд основних результатів і фундаментальна теорія галуження розв'язків різних типів нелінійних рівнянь наведено в монографії М. М. Вайнберга, В. А. Треногіна [5]. Зокрема, в монографії подаються дослідження нелінійного інтегрального рівняння Урисона

$$u(x) \equiv \int\limits_G F(x, y, u(y), \mu)\, dy\,, \tag{1}$$

залежного від одного дійсного числового параметра μ у припущенні, що при деякому значенні μ_0 цього параметра рівняння (1) має неперервний розв'язок $u_0(x)$:

$$u_0(x) \equiv \int\limits_G F(x, y, u_0(y), \mu_0)\, dy\,. \tag{2}$$

Розглядається задача про знаходження всіх неперервних розв'язків $u_\mu(x)$ рівняння (1) для значень μ, близьких до μ_0, які задовольняють умову

$$\max_{x \in G} \left| u_\mu(x) - u_0(x) \right| \to 0 \qquad \text{при} \quad \mu \to \mu_0\,.$$

Наводиться методика дослідження одновимірного і багатовимірного випадків галуження.

У цій роботі розглянемо узагальнення рівняння (1), яке полягає у введенні в підінтегральний вираз двох дійсних числових параметрів, що належать до деякої випуклої обмеженої області простору $\mathbb{R}^2$. Це дає можли-

✉ posavenko@gmail.com

вість шляхом розв'язування нелінійної двопараметричної спектральної задачі [15, 16] знайти множину точок можливого галуження (біфуркації) розв'язків у вигляді спектральних ліній.

Зауважимо, що частковим випадком рівняння Урисона є рівняння Гаммерштейна, у якому підінтегральний вираз визначається як добуток двох функцій

$$F(x, y, u(y), \mu) = \mathcal{K}(x, y, \mu) f(u(y)),$$

що відповідають лінійному і нелінійному операторам. Введення двох дійсних спектральних параметрів c_1, c_2 у ядро лінійного оператора $\mathcal{K}(x, y, c_1, c_2)$ знайшло широке прикладне застосування таких рівнянь, зокрема, в теорії синтезу випромінюючих систем [18, 26] та теорії середньоквадратичної апроксимації фінітних функцій від двох змінних [19].

1. Формулювання задачі, основні співвідношення. Нехай G – обмежена замкнута множина скінченновимірного евклідового простору, I та I_1, I_2 – проміжки дійсної осі або випуклі області комплексної площини і $F(x, y, u(y), c_1, c_2)$ – дійсна або комплекснозначна функція, задана на $G \times G \times I \times I_1 \times I_2$, неперервна за сукупністю своїх аргументів.

Розглянемо узагальнене нелінійне інтегральне рівняння Урисона

$$u(x) \equiv \int_G F(x, y, u(y), c_1, c_2)\, dy, \tag{3}$$

яке, на відміну від [5], залежить не від одного, а від двох дійсних числових параметрів $c_1, c_2 \in \mathbf{\Lambda}_c = \{|c_1| \le a_1, |c_2| \le a_2\}$, де a_1, a_2 – деякі дійсні константи. Аналогічно, як у [5], за допомогою теореми Арцела [9] можемо довести, що інтегральний оператор визначений у просторі $\mathbb{C}$ і є цілком неперервним.

Нехай при деяких значеннях $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$ рівняння (3) має неперервний розв'язок $u_0(x)$:

$$u_0(x) \equiv \int_G F(x, y, u_0(y), c_1^{(0)}, c_2^{(0)})\, dy, \tag{4}$$

який надалі називатимемо первинним. Розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ і всіх відмінних від $u_0(x, \mathbf{c}^{(0)})$ розв'язків $u_c(x, c_1, c_2)$ рівняння (3), які при $|\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}| \to 0$ задовольняють умову

$$\max_{Q \in G} \left| u_c(x, c_1, c_2) - u_0(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \right| \to 0.$$

Ця умова означає, що необхідно знайти такі малі неперервні на $\bar{G}$ розв'язки

$$w(x, c_1, c_2) = u_c(x, c_1, c_2) - u_0(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}), \tag{5}$$

які рівномірно збігаються до нуля при $(c_1, c_2) \to (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$. При цьому необхідно також враховувати напрямок прямування вектора $\mathbf{c}$ до вектора $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$.

Покладемо

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \quad c_2 = c_2^{(0)} + \nu, \tag{6}$$

а шукані розв'язки знаходитимемо у вигляді

$$u_c(x,\mathbf{c}) = u_0(x,\mathbf{c}^{(0)}) + w(x,\mu,\nu). \tag{7}$$

Підставимо вирази (6), (7) у рівність (3) і приймемо, що підінтегральна функція в околі точки $(\mathbf{c}^{(0)}, u_0(x,\mathbf{c}^{(0)}))$ при $|w| \le \rho_1$, $|\mu| \le \rho_\mu$ і $|\nu| \le \rho_\nu$ розкладається у рівномірно збіжний степеневий ряд за функціональним аргументом w і числовими параметрами μ, ν та описується формулою

$$F(x,y,u_0(y),\mathbf{c}^{(0)}) = \sum_{m+p+q\ge 0} A_{mnp}(x,y,\mathbf{c}^{(0)}) w^m(y)\mu^p\nu^q. \tag{8}$$

Одержану рівність (8) з урахуванням (4) підставимо в (3). В результаті отримаємо

$$u(x) = \sum_{m+p+q\ge 1} \mu^p\nu^q \int A_{mpq}(x,y,\mathbf{c}^{(0)}) w^m(y)\,dy,$$

оскільки $A_{000}(x,y,\mathbf{c}^{(0)}) \equiv F(x,y,c_1^{(0)},c_2^{(0)})$.

Покладаючи $A_{100}(x,y,\mathbf{c}^{(0)}) = \mathcal{K}(x,y,u_0(y),\mathbf{c}^{(0)})$ – фредгольмове ядро, $a_{010}(x,\mathbf{c}^{(0)}) = \int\limits_G A_{010}(x,y,\mathbf{c}^{(0)})\,dy$, $a_{001}(x,\mathbf{c}^{(0)}) = \int\limits_G A_{001}(x,y,\mathbf{c}^{(0)})\,dy$, одержимо рівняння типу Ляпунова – Шмідта [5]

$$\omega(x) - \int_{-1}^{1} \mathcal{K}(x,y,\mathbf{c}^{(0)})\omega(y)\,dy = a_{010}(x,\mathbf{c}^{(0)})\mu + a_{001}(x,\mathbf{c}^{(0)})\nu +$$

$$+ \sum_{m+p+q\ge 2}^{\infty} \mu^p\nu^q \int_{-1}^{1} B_{mpq}(x,y) w^m(y)\,dy. \tag{9}$$

Таким чином, сформульована задача зводиться до знаходження усіх малих неперервних розв'язків $\omega(y)$ рівняння (9), які рівномірно збігаються до нуля (у метриці простору $C(G)$) при $\mu \leftrightarrow 0$ і $\nu \leftrightarrow 0$.

При подальшому вивченні розв'язків рівняння (9) ключову роль відіграє рівняння

$$\varphi(x) = T(c_1,c_2)\varphi \equiv \int\limits_G \mathcal{K}(x,u_0(y),c_1,c_2)\varphi(y)\,dy, \tag{10}$$

яке отримуємо з лівої частини (9). Залежно від типу розв'язків цього рівняння розглядають два випадки [5]. У випадку, коли множина значень параметрів $c_1, c_2 \in \mathbf{\Lambda}_c$, при яких одиниця не є власним значенням рівняння (10), то нелінійне рівняння (9) має єдиний розв'язок. В іншому випадку, коли одиниця є власним значенням рівняння (10), то відповідна множина значень параметрів $c_1^{(0)}, c_2^{(0)} \in \mathbf{\Lambda}_c$ є точками можливого галуження або біфуркації розв'язків рівняння (9) і відповідно рівняння (3).

Зазначимо, що рівняння (10) у загальному випадку є нелінійною двопараметричною спектральною задачею [15, 16].

2. Нелінійна двопараметрична спектральна задача. Нелінійну двопараметричну задачу (10) розглянемо для більш загального випадку, покладаючи, що параметри c_1, c_2 та власні функції належать до відповідних комплексних просторів. Із цією метою для спрощення подальших викладок введемо позначення

$$c_i = \lambda_i \in \Lambda_i \subset \mathbb{C}, \qquad i = 1,2.$$

Нехай E і V – комплексні банахові простори, а спектральний параметр $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2)$ належить до області $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ (відкритої зв'язної множини) комплексного простору $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, де $\lambda_i \in \Lambda_i \subset \mathbb{C}$, $\Lambda_i = \{\lambda_i \in \in \Lambda_i : 0 < |\lambda_i| < r_i\}$, $i = 1, 2$, r_i – деякі дійсні константи.

Не обмежуючи загальності, нелінійну двопараметричну спектральну задачу (10) запишемо в операторній формі:

$$\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)\varphi = (T(\lambda_1, \lambda_2) - I)\varphi = 0 . \tag{11}$$

Нехай $\mathcal{A}(\cdot,\cdot) : \mathbf{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, V)$ – оператор-функція, де кожному $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$ ставиться у відповідність оператор $A(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(E, V)$. Будемо розглядати нелінійну двопараметричну спектральну проблему $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)x = 0$, в якій необхідно знайти власні значення $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in E$, $x^{(0)} \neq 0$, такі, що $\mathcal{A}(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})x^{(0)} = 0$.

Нехай E, V, $\bar{E}_n$, $\bar{V}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – банахові простори, а $P = (P_n)$ і $Q = (Q_n)$ – система лінійних зв'язуючих операторів $P_n : E \to E_n$ і $Q_n \in \mathcal{L}(V, \bar{V}_n)$ таких, що [6]:

$$\forall x \in E, y \in V \qquad \|P_n x\| \to \|x\|, \quad \|Q_n y\| \to \|y\| .$$

Вибираючи відповідним чином систему лінійних зв'язуючих операторів $P = (P_n)$ та $Q = (Q_n)$, оператор-функція $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ апроксимується відповідно наближеними оператор-функціями $\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)$, $n \in \mathbb{N}$. У результаті для кожного $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$ одержуємо послідовність операторів $A_n \in \in \mathcal{L}(E_n, V_n)$, яка при виконанні відповідних умов [6] збігається до оператора $A \in \mathcal{L}(E, V)$.

Таким чином, проблема власних значень (11) апроксимується проблемою вигляду

$$\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)\bar{x}_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N} . \tag{12}$$

Будемо покладати, що дискретизована задача одержується у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої аналітично залежать від параметрів λ_1, λ_2. Задача знаходження власних значень зводиться до знаходження коренів визначника n-го порядку

$$\Psi_n(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \det\left(t_{jk}(\boldsymbol{\lambda})\right)_{j,k=1}^n = 0, \qquad n \in \mathbb{N} . \tag{13}$$

Зауважимо, що якщо коефіцієнти $t_{ij}(\lambda_1, \lambda_2)$ є неперервно диференційовними функціями своїх аргументів, то частинні похідні $\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i}$, $i = 1, 2$, визначаються за правилами диференціювання визначника [14].

Таким чином, як наслідок дискретизації задачі при $n \in \mathbb{N}$ одержуємо функціональну послідовність визначників $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$ від двох змінних, причому приймаємо, що елементи $a_{ij}^n(\lambda_1, \lambda_2)$ відповідно до умов задачі (11) і умов побудови дискретного аналога (12) цих задач є голоморфними функціями від λ_1, λ_2.

Надалі для обґрунтування існування зв'язних компонент спектра та збіжності наближених розв'язків задачі (12) до точних розв'язків задач (11), (13) припускаємо, що для послідовності визначників $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$ виконуються такі умови.

Умова I. При $n \to \infty$ визначник нескінченного порядку $\Psi(\lambda_1, \lambda_2)$ є збіжним для будь-яких $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$, тобто виконуються умови теореми Пуанкаре [2].

Умова II. Функціональна послідовність $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}$ рівномірно збігається на кожній компактній підмножині області $\mathbf{\Lambda}$.

Отже, з голоморфності послідовності $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}$ та умов ***I***, ***II*** випливає виконання умов теореми Вейєрштрасса [24], яка стверджує, що гранична функція $\Psi(\lambda_1, \lambda_2)$ є голоморфною на $\mathbf{\Lambda}$, а послідовності $\left\{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2}\right\}$ збігаються до $\dfrac{\partial \Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1}$ і $\dfrac{\partial \Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2}$, відповідно. Ця збіжність є рівномірною на кожній компактній підмножині області $\mathbf{\Lambda}$.

Припустимо, що змінні λ_1 і λ_2 у рівнянні (13) пов'язані функціональною залежністю $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$. Оскільки рівність $\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1)) = 0$ є тотожністю, то її похідні, згідно з теоремою Гурса [7, с. 88], будуть задовольняти співвідношення, яке отримаємо, якщо прирівняти до нуля похідну від лівої частини цієї рівності як від складної функції. Таким чином, диференціюючи рівність $\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1)) = 0$ по λ_1, отримуємо

$$\frac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1))}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1))}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = 0 \tag{14}$$

або

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = -\frac{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1))}{\partial \lambda_1}}{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1))}{\partial \lambda_2}}. \tag{15}$$

Аналогічно, коли λ_1 і λ_2 у рівнянні (13) пов'язані функціональною залежністю $\lambda_1 = \lambda_1(\lambda_2)$, знаходимо

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = -\frac{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1(\lambda_2), \lambda_2)}{\partial \lambda_2}}{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1(\lambda_2), \lambda_2)}{\partial \lambda_1}}.$$

Розглянемо необхідну надалі допоміжну однопараметричну нелінійну спектральну задачу типу

$$\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_1, z(\lambda_1))\varphi = 0 \tag{16}$$

як частковий випадок задачі (11). Припускаємо, що в оператор-функції $\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_1, \lambda_2)$ змінна λ_2 виражається деякою однозначною (однолистою) диференційовною функцією $\lambda_2 = z(\lambda_1)$, яка відображає деяку область $\Lambda_{1,\beta} \subset \Lambda_1$ у підобласть $\Lambda_{2,\beta} \subset \Lambda_2$. У найпростішому випадку покладатимемо $\lambda_2 = \beta\lambda_1$, де β − деякий дійсний числовий параметр. Введемо в розгляд при $\lambda_1 \in \Lambda_{1,\beta}$ оператор-функцію $\tilde{\mathscr{A}}_\beta(\lambda_1) \equiv \tilde{\mathscr{A}}(\lambda_1, \beta\lambda_1)$ (звуження оператор-функції $\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_1, \lambda_2)$), з якою зв'язана нелінійна однопараметрична спектральна задача (16), де кожному значенню $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \beta\lambda_1) \in \mathbf{\Lambda}$ ставиться у відповідність оператор $\tilde{A}_\beta(\lambda_1, \beta\lambda_1) \in \mathscr{L}(E, V)$.

Аналогічно до (12), розглядатимемо при $n \in \mathbb{N}$ апроксимуючу послідовність дискретизованої задачі (16):

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\beta,n}(\lambda_1, z(\lambda_1))\overline{x}_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Надалі, не обмежуючи загальності, для спрощення покладатимемо, що $z(\lambda_1) = \beta\lambda_1$, а через $\mathbf{\Lambda}_\beta$ позначимо область

$$\mathbf{\Lambda}_\beta = \{(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1, \beta\lambda_1) : \lambda_1 \in \Lambda_{1,\beta},\, \beta\lambda_1 \in \Lambda_{2,\beta}\}.$$

Спектри оператор-функцій $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\tilde{\mathcal{A}}_\beta(\lambda_1)$ і $\tilde{\mathcal{A}}_{\beta,n}(\lambda_1)$ позначимо через $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$, $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}_\beta)$ і $\sigma(\tilde{\mathcal{A}}_{\beta,n})$, відповідно.

Існування зв'язних компонент спектра задачі (11) при непорожній множині розв'язків допоміжної однопараметричної задачі (16) та збіжність наближених розв'язків дискретизованої задачі (12) до точних розв'язків задачі (11) стверджує теорема [15, 16].

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*:

- *оператор-функція* $\mathcal{A}(\cdot,\cdot) : \mathbf{\Lambda} \to \mathcal{L}(E, V)$ *є голоморфною і виконуються умови **I**, **II**, причому* $\sigma(\mathcal{A}) \neq \mathbf{\Lambda}$;
- *оператор-функції* $\mathcal{A}_n(\cdot,\cdot) : \mathbf{\Lambda} \to \mathcal{L}(E_n, V_n)$ *голоморфні і для будь-якої замкненої обмеженої множини* $\mathbf{\Lambda}_0 \subset \mathbf{\Lambda}$ *справджується нерівність*

  $$\max_{\lambda \in \mathbf{\Lambda}_0} \|\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)\| \le c(\mathbf{\Lambda}_0) = \mathrm{const}, \qquad n \in \mathbb{N};$$

- *оператори* $A(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(E, V)$, $A_n(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(E_n, V_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *– фредгольмові з нульовим індексом при будь-якому* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$;
- *послідовність функцій* $\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)$ *диференційовна в області* $\mathbf{\Lambda}$;
- $A_n(\boldsymbol{\lambda}) \to A(\boldsymbol{\lambda})$ *стійко при будь-якому* $\boldsymbol{\lambda} \in \rho(\mathcal{A}) = \mathbf{\Lambda} \setminus \sigma(\mathcal{A})$;
- *резольвентна множина* $\rho(\mathcal{A}_\beta) \neq \varnothing$, *тобто* $\sigma(\mathcal{A}_\beta) \neq \mathbf{\Lambda}_\beta$.

Тоді справджуються такі твердження:

(***i***) *кожна точка спектра* $\boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)}) \in \sigma(\mathcal{A}_\beta)$ *є ізольованою, є власним значенням і їй відповідає скінченновимірний власний підпростір* $N(\mathcal{A}(\lambda_1^{(0)}))$ *і скінченновимірний кореневий підпростір*;

(***ii***) *для кожного* $\boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)} \in \sigma(\mathcal{A}_\beta)$ *існує послідовність* $\{\boldsymbol{\lambda}_{\beta,n}^{(0)}\}$ *із* $\boldsymbol{\lambda}_{\beta,n}^{(0)} \in \sigma(\mathcal{A}_{\beta,n})$, $n > n_0$, *така що* $\boldsymbol{\lambda}_{\beta,n}^{(0)} \to \boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)}$;

(***iii***) *кожна точка* $\boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)}) \in \sigma(\mathcal{A}_\beta)$ *є точкою спектра оператор-функції* $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$;

(***iv***) *якщо в деякому малому* ε_0*-околі точки* $\boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ *для всіх* n, *більших від деякого номера* N_0, *послідовність частинних похідних* $\left\{\dfrac{\partial \Psi_n}{\partial \lambda_2}(\lambda_{1,n}^{(0)}, \beta\lambda_{1,n}^{(0)})\right\}$ *є відмінною від нуля, тоді в як завгодно малому* ε_**-околі точки* $(\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ *існує неперервно диференційовна функція* $\lambda_{2,N_*} = \varphi_{N_*}(\lambda_1)$, *яка є розв'язком рівняння* (13), *причому* $\lambda_{2,N_*}^{(0)} = \varphi_{N_*}(\lambda_{1,N_*}^{(0)})$, *і в точці* $(\lambda_{1,N_*}^{(0)}, \lambda_{2,N_*}^{(0)}) = (\lambda_{1,N_*}^{(0)}, \varphi_{N_*}(\lambda_{1,N_*}^{(0)}))$

як завгодно мало відхиляється від точки спектра допоміжної однопараметричної задачі (16), *тобто в деякій біциліндричній області* $\mathbf{\Lambda}_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2) : |\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}| < \varepsilon_1, |\lambda_2 - \lambda_2^{(0)}| < \varepsilon_2\}$ *існує зв'язна компонента спектра оператор-функції* $\mathcal{A}_{N_*}(\lambda_1, \lambda_2)$, *де* ε_1, ε_2 *– деякі дійсні малі константи.*

Зауважимо, що при доведенні цієї теореми застосовуються теорема 1 з [6, с. 68] і теорема 2 з [6, с. 69] стосовно допоміжної нелінійної однопараметричної спектральної задачі (16), (17).

3. Алгоритм наближеного знаходження компонент спектра. Випадок дійсних спектральних параметрів. Перейдемо до побудови алгоритмів для чисельного знаходження власних значень рівняння (10), використовуючи методи дискретизації [6, 20], тобто перейдемо від знаходження розв'язків нелінійної двопараметричної спектральної задачі (10) у нескінченновимірних банахових функціональних просторах до знаходження наближених розв'язків цієї задачі у скінченновимірних банахових просторах.

Нехай задано деякий збіжний квадратурний (кубатурний) процес[1]

$$\int_D z(t)\, dt = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} z(t_{jn}) + \phi_n(z), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

з $a_{jn} \in \mathbb{R}$, $t_{jn} \in D$, $j = 1, \ldots, n$.

Замінивши інтеграл у рівнянні (10) за формулою (18), у якій відкидаємо залишковий член ϕ_n, приходимо до такої системи лінійних рівнянь відносно вектора $\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{nn}$:

$$\varphi_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} \mathcal{K}(x_{in}, u_0(t_{jn}), c_1, c_2) \varphi_{jn}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Спочатку розглянемо дискретизацію однопараметричної задачі (10) при дійсному числовому параметрі c_1:

$$\varphi(x) = T(c_1, \beta c_1)\varphi \equiv \int_G \mathcal{K}(x, u_0(y) c_1, \beta c_1) \varphi(y)\, dy. \qquad (20$$

Замінюючи у рівнянні (20) інтеграл за формулою (19), у якій відкидаємо залишковий член $\phi_n(x)$, і надаючи змінним x, y відповідно значень x_i, y_j, $i, j = 1, \ldots, n$, одержуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\mathcal{K}}(x_i, u_0(y_j), \beta c_1 \varphi_j) - \varphi_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

відносно вектора $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}^\top$.

Нехай елементи матриці $t_{ij}(c_1, c_2) = a_j \tilde{\mathcal{K}}(x_i, u_0(y_j), \beta c_1 \varphi_j)$ є неперервно диференційовними функціями від параметрів c_1, c_2. У цьому випадку задача (21) матиме розв'язок, якщо має розв'язок рівняння

$$\Psi_n(c_1, c_2) = \det \begin{pmatrix} t_{11}(c_1, c_2) - 1 & t_{12}(c_1, c_2) & \cdots & t_{1n}(c_1, c_2) \\ t_{21}(c_1, c_2) & t_{22}(c_1, c_2) - 1 & \cdots & t_{2n}(c_1, c_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}(c_1, c_2) & t_{n2}(c_1, c_2) & \cdots & t_{nn}(c_1, c_2) - 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{22}$$

---

[1] Квадратурний (кубатурний) процес називається збіжним, якщо $\varphi_n(z) \to 0$ для будь-якої неперервної на D функції $z(s)$ [7].

Рівняння $\Psi_n(c_1, c_2) = 0$ розглядаємо як рівність для визначення неявної функції. Для визначеності покладемо $c_2 = c_2(c_1)$. Припустимо, що існує така точка $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$, що $\Psi_n(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) = 0$. Тоді, якщо коефіцієнти $t_{nm}(c_1, c_2)$ є неперервно диференційовними функціями від c_1, c_2, то задача про визначення неявно заданої функції $c_2 = c_2(c_1)$ у деякому околі точки $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ на підставі рівняння (22) зводиться до задачі Коші [15, 16]:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\dfrac{\partial \Psi_n(c_1, c_2)}{\partial c_1}}{\dfrac{\partial \Psi_n(c_1, c_2)}{\partial c_2}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

$$c_2(c_1^{(0)}) = c_2^{(0)}. \tag{24}$$

У деяких випадках зручніше розглядати еквівалентну до (23), (24) задачу Коші відносно функції $c_1 = c_1(c_2)$:

$$\frac{dc_1}{dc_2} = -\frac{\dfrac{\partial \Psi_n(c_1, c_2)}{\partial c_2}}{\dfrac{\partial \Psi_n(c_1, c_2)}{\partial c_1}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{23$'$}$$

$$c_1(c_2^{(*)}) = c_1^{(*)}. \tag{24$'$}$$

Для задачі (23), (24) виконується теорема про існування неявно заданої функції [7], яка в прийнятих припущеннях має таке формулювання:

Теорема 2. *Нехай* $\{c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\}$ *– розв'язок рівняння* (22), *функція* $\Psi_n(c_1, c_2)$ *та її частинні похідні першого порядку при всіх* c_1, c_2, *достатньо близьких до* $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$, *є неперервними функціями, і нехай частинні похідні* $\dfrac{\partial \Psi_n(c_1, c_2)}{\partial c_2}$ *відмінні від нуля при* $c_1 = c_1^{(0)}$, $c_2 = c_2^{(0)}$.

Тоді для всіх c_1, *достатньо близьких до* $c_1^{(0)}$, *існує одна визначена неперервна функція* $c_2 = c_2(c_1)$, *що задовольняє рівняння* (23), *умову* (24) *і має похідну* $c_2'(c_1)$.

Вибір тієї чи іншої задачі Коші залежить від швидкості зростання похідної у правій частині рівняння (23). Зокрема, якщо похідна у правій частині рівняння (23) швидко зростає, то переходимо до розв'язування задачі (23′), (24′).

Висновки. Введення в інтегральний оператор Урисона додаткових числових параметрів дає можливість у практичних застосуваннях дослідити проблему неєдиності існуючих розв'язків та їхні властивості при зміні величин параметрів у заданій області.

Усі особливості наведеного алгоритму наближеного знаходження зв'язних компонент спектра при $m = 2$ без особливих труднощів з використанням результатів [17] переносяться на випадок багатопараметричних спектральних задач при $m > 2$.

1. *Айзенгендлер П. Г.* Некоторые вопросы теории ветвления решений нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 1 (127). – С. 182–183.
2. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. – Москва: Высш. шк., 1999. – 695 с.
3. *Богатов Е. М.* Об истории развития нелинейных интегральных уравнений в

СССР. Сильные нелинейности // Научн. ведомости. Сер. Математика. Физика. – 2017. – № 6 (255). – Вып. 46. – С. 93–106.
4. *Богатов Е. М., Мухин Р. Р.* Из истории нелинейных интегральных уравнений // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. – 2016. – **24**, № 2. – С. 77–114.
5. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
6. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Тартуск. гос. ун-т, 1976. – 161 с.
   Те саме: *Vainikko G. M.* Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. – Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1976. – 136 p.
7. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1., Ч. 1. – 368 с.
8. *Забрейко П. П.* О непрерывности и полной непрерывности операторов П. С. Урысона // Докл. АН СССР. – 1965. – **161**, № 5. – С. 1007–1010.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.
10. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1962. – 396 с.
   Те саме: *Krasnosel'skii M. A.* Positive solutions of operator equations. – Groningen: Noordhoff, 1964. – 381 p.
11. *Красносельский М. А.* Признаки непрерывности некоторых нелинейных операторов // Укр. мат. журн. – 1950. – **2**, № 3. – С. 70–86.
12. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1956. – 392 с.
   Те саме: *Krasnosel'skii M. A.* Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. – Oxford, etc.: Pergamon Press, 1964. – x+395 p.
13. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.
   Те саме: *Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitcki Ja. B., Stecenko V. Ja.* Approximate solutions of operator equations. – Groningen: Wolters-Noordhoff, 1972. – 484 p.
14. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. – Москва: Наука 1965. – 128 с.
15. *Процах Л. П., Савенко П. О.* Методи неявних функцій при розв'язуванні двопараметричних лінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 42–49.
   Те саме: *Protsakh L. P., Savenko P. O.* Implicit-function methods for the solution of two-parameter linear spectral problems // J. Math. Sci. – 2010. – **170**, No. 5. – P. 612–621. – https://doi.org/10.1007/s10958-010-0106-8.
16. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
   Те саме: *Savenko P. A., Protsakh L. P.* Implicit function method in solving a two-dimensional nonlinear spectral problem // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2007. – **51**, No. 11. – P. 40–43. – https://doi.org/10.3103/S1066369X07110060.
17. *Савенко П. О.* Метод неявних функцій при розв'язуванні багатопараметричних нелінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63,** № 2. – С. 36–50.
   Те саме: *Savenko P. O.* Method of implicit functions in the solution of multiparameter nonlinear spectral problems // J. Math. Sci. – 2023. – **272**, No. 1. – P. 38–54. – https://doi.org/10.1007/s10958-023-06398-x.
18. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2014. – 314 с.
19. *Савенко П. О., Соляр Т. Я.* Перетворення Фур'є й Лапласа в задачах апроксимації. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2019. – 380 с.
20. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
21. *Урысон П. С.* Труды по топологии и другим областям математики. – Т. 1. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1951. – 512 с.
22. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 4. – С. 125–136. – https://doi.org/10.4213/sm7310.

23. *Хачатрян Х. А.* Разрешимость одного класса интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью на полуоси // Изв. РАН. Сер. мат. – 2010. – **74**, № 5. – С. 191–204. – https://doi.org/10.4213/im4087.
Те саме: *Khachatryan Kh. A.* Solubility of a class of second-order integro-differential equations with monotone non-linearity on a semi-axis // Izv. Math. – **74**, No. 5. – P. 1069–1082. – https://doi.org/10.1070/IM2010v074n05ABEH002516.
24. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. Локальная теория. – Москва: Мир, 1965. – 165 с.
Те саме: *Hervé M.* Several complex variables. Local Theory. – Bombay: Oxford Univ. Press, 1963. – 134 p.
25. *Brezis H., Browder F. E.* Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975. – **81**, No. 1. – P. 73–78. – https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1975-13641-X.
26. *Savenko P., Klakovych L., Tkach M.* Theory of nonlinear synthesis of radiating systems. – LAP (LAMBERT Acad. Publ.), 2016. – 357 p.

GENERALIZATION OF THE NONLINEAR URYSOHN INTEGRAL EQUATION BY INTRODUCING ADDITIONAL NUMERICAL PARAMETERS

The generalization of the nonlinear integral equation of the Urysohn type is considered, which consists in introducing two real numerical parameters into the integrand. This makes it possible to find in the given domain the set of points of possible branching (bifurcation) of solutions in the form of spectral lines by solving a nonlinear two-parameter spectral problem.

Key words: *generalized Urysohn equation, nonlinear two-parameter spectral problem, branching of solutions.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.02.22