

ПЛОСКЕ ПОТЕНЦІАЛЬНЕ ПОЛЕ ЗОВНІ СИМЕТРИЧНОГО ПРЯМОКУТНОГО ХРЕСТА

Розглядається задача про розподіл плоского потенціального поля зовні симетричного прямокутного хреста. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача зводиться до системи двох рівнянь Вінера – Гопфа, для розв'язання якої використовується підхід, що оминає факторизацію матричного коефіцієнта. Вихідна задача зводиться до цілком регулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, числове розв'язання якої виконується методом редукції. Отримано зображення шуканої гармонічної функції через розв'язок нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: *прямий хрест, задача Діріхле, інтегральне перетворення Мелліна, система Вінера – Гопфа, метод Вінера – Гопфа.*

Вступ. При вивченні різноманітних явищ, моделюванні технологічних процесів доводиться мати справу з математичними моделями у формі крайових задач математичної фізики зі змішаними крайовими умовами. Найчастіше такі задачі зустрічаються при дослідженні явищ і процесів у тілах, що мають внутрішні чи приповерхневі дефекти і включення, або в тілах складної форми. Одним із ефективних підходів до розв'язання таких задач є використання методу інтегральних перетворень із подальшим зведенням задачі до рівняння Вінера – Гопфа або системи таких рівнянь. Незважаючи на те, що основи методу Вінера – Гопфа закладені авторами ще в першій половині минулого століття, він залишається і досі одним із основних методів побудови точних аналітичних розв'язків вказаних задач.

Підходи, які базуються на методі Вінера – Гопфа, дозволяють розв'язувати задачі з різних областей електродинаміки, теорії пружності, гідродинаміки тощо. У роботах [7, 8] розглянуто плоскі задачі про розповсюдження електромагнітних та пружних хвиль у кутових областях. Праці [6, 11] присвячено побудові розв'язків просторових задач про дифракцію поляризованої електромагнітної хвилі на півплощині та конусі відповідно. Задачі дифракції, розв'язки яких побудовано методом Вінера – Гопфа, також розглянуто в [13]. Авторами статті [9] розглянуто задачу про стаціонарне розповсюдження міжфазної тріщини внаслідок корозії. У праці [12] методом Вінера – Гопфа розв'язано задачі про взаємодію водяних хвиль із зануреною пористою та непористою пружними пластинами. Нарешті, в роботах [2, 3] побудовано точні розв'язки плоских задач теорії пружності в півплощині з похилим приповерхневим розрізом та теорії потенціалу зовні T -подібного профілю, які попередньо зведено до систем Вінера – Гопфа.

Короткий аналіз праць, опублікованих останнім часом, свідчить про те, що метод Вінера – Гопфа є ефективним апаратом розв'язування задач математичної фізики у складних областях зі змішаними крайовими умовами. Також цей аналіз підтверджує актуальність розглядуваних задач.

У цій роботі розглянемо плоску задачу теорії потенціалу зовні профілю, що має форму симетричного хреста. Основна мета роботи полягає у побудові точного розв'язку сформульованої задачі, зокрема, із використанням методу Вінера – Гопфа. Постановка задачі та підходи, які використовуються для її розв'язання, тісно переплітаються з роботою [2].

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про розподіл плоского потенціального поля, наприклад електростатичного, зовні профілю, який в поперечному перерізі має форму симетричного прямокутного хреста (рис. 1).

✉ anlov1974@gmail.com

Систему координат Oxy розмістимо так, щоб центр хреста співпадав із початком координат, а сам хрест був зорієнтований уздовж осей координат, як це показано на рис. 1. Тоді хрест можна описати за допомогою об'єднання двох відрізків $S_1 = \{(x, y) : y = 0, |x| \leq 1\}$ та $S_2 = \{(x, y) : x = 0, |y| \leq a\}$, $a > 0$, які лежать на осях Ox та Oy (див. рис. 1). Вважаємо, що на сторонах хреста задано умови Діріхле. Тоді для відшукування потенціалу u поля маємо двовимірну задачу Діріхле зовні хреста:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (S_1 \cup S_2), \\ u|_{S_1} &= u|_{y=0, |x| \leq 1} = U_1(x), \\ u|_{S_2} &= u|_{x=0, |y| \leq a} = U_2(y), \end{aligned} \quad (1)$$

де $U_{1,2}$ – задані неперервні функції:

$$U_1(0) = U_2(0).$$

При цьому $|u|_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} < +\infty$.

Геометрія задачі (1) є симетричною за обома координатами (див. рис. 1). Тому, якщо функції $U_{1,2}$ є парними, то й розв'язок крайової задачі (1) є парною функцією за обома координатами. У такому випадку його достатньо шукати лише при $x > 0$, $y > 0$, доповнивши крайові умови в задачі (1) умовами парності:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \\ u|_{y=0, 0 \leq x \leq 1} &= U_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0, x > 1} = 0, \\ u|_{x=0, 0 \leq y \leq a} &= U_2(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, y > a} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Отримана задача (2) є задачею теорії потенціалу зі змішаними крайовими умовами. Областю визначення задачі є плоска клиноподібна (секторіальна) область, сторони якої утворюють кут $\pi/2$. Тому для розв'язання задачі (2) зручно використовувати полярні координати ρ , φ [5], в яких область задачі $\{x > 0, y > 0\}$ визначається нерівностями $\rho > 0$, $0 < \varphi < \pi/2$, а змішані крайові умови набудуть вигляду

$$\begin{aligned} u|_{\varphi=0, 0 < \rho \leq 1} &= U_1(\rho), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0, \rho > 1} = 0, \\ u|_{\varphi=\pi/2, 0 < \rho \leq a} &= U_2(\rho), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi/2, \rho > a} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для спрощення подальших міркувань функції $U_{1,2}$ в (3) виберемо у вигляді степеневих функцій:

$$U_1(\rho) = G_0 + G_1 \rho^{\gamma_1}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad U_2(\rho) = G_0 + G_2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\gamma_2}, \quad 0 < \rho \leq a,$$

де $G_{0,1,2} = \text{const}$, $\gamma_{1,2} > 0$.

2. Побудова гармонічної функції. Найбільш ефективним підходом до розв'язання задач теорії потенціалу в плоских клиноподібних областях є використання інтегрального перетворення Мелліна [5] за координатою ρ .

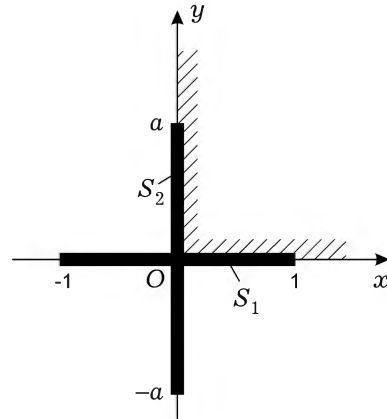


Рис. 1

Якщо проаналізувати крайові умови (3) при $\rho \rightarrow 0+$ та врахувати, що шукана гармонічна функція є обмеженою на нескінченності, то можемо встановити, що

$$u|_{\rho \rightarrow 0+} = G_0 + O(\rho^\gamma), \quad |u|_{\rho \rightarrow +\infty} < +\infty,$$

де $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2, 2\} > 0$. Звідси випливає, що безпосередньо до функції u не можна застосувати інтегральне перетворення Мелліна, але функція $w = u - G_0$ задовольняє необхідні для цього умови [5]. При цьому перетворення Мелліна функції w за ρ буде визначене всередині смуги комплексної площини $-\gamma < \operatorname{Re} p < 0$ [5]. Тому розв'язок задачі (2) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= G_0 + w(\rho, \varphi) = \\ &= G_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-p} \left(A(p) \sin p\varphi + B(p) \sin p\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right) dp, \\ &\quad \rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \end{aligned} \quad (4)$$

де $A(p)$, $B(p)$ – невідомі коефіцієнти, $-\gamma < c < 0$.

Для відшукування коефіцієнтів A , B підставимо розв'язок (4) у змішані крайові умови (3). Продовживши отримані рівності на весь проміжок $0 < \rho < +\infty$ невідомими функціями, матимемо

$$\begin{aligned} u|_{\varphi=0} - G_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-p} B(p) \sin \frac{\pi p}{2} dp = \\ &= \begin{cases} U_1(\rho) - G_0 = G_1 \rho^{\gamma_1}, & 0 < \rho \leq 1, \\ w_1(\rho), & \rho > 1, \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-p} p \left(A(p) - B(p) \cos \frac{\pi p}{2} \right) dp = \begin{cases} q_1(\rho), & 0 < \rho < 1, \\ 0, & \rho > 1, \end{cases} \\ u|_{\varphi=\pi/2} - G_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-p} A(p) \sin \frac{\pi p}{2} dp = \\ &= \begin{cases} U_2(\rho) - G_0 = G_2 (\rho/a)^{\gamma_2}, & 0 < \rho \leq a, \\ w_2(\rho/a), & \rho > a, \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi/2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-p} p \left(A(p) \cos \frac{\pi p}{2} - B(p) \right) dp = \\ &= \begin{cases} q_2(\rho/a), & 0 < \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $w_{1,2}$ та $q_{1,2}$ – невідомі функції, для яких можна встановити

$$\begin{aligned} w_{1,2}(1) &= G_{1,2}, & |w_{1,2}(r)|_{r \rightarrow +\infty} &< +\infty, \\ w'_{1,2}(r) \Big|_{r \rightarrow 1+} &\sim \frac{\text{const}}{\sqrt{r-1}}, & w'_{1,2}(r) \Big|_{r \rightarrow +\infty} &\sim \frac{\text{const}}{r^2}, \\ q_{1,2}(r) \Big|_{r \rightarrow 0+} &= O(r^\gamma), & q_{1,2}(r) \Big|_{r \rightarrow 1-} &\sim \frac{\text{const}}{\sqrt{1-r}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Застосувавши до рівностей (5) інтегральне перетворення Мелліна [5], отримаємо

$$\begin{aligned} B(p) \sin \frac{\pi p}{2} &= X_1^{(-)}(p), & p \left(A(p) - B(p) \cos \frac{\pi p}{2} \right) &= Y_1^{(+)}(p), \\ A(p) \sin \frac{\pi p}{2} &= a^p X_2^{(-)}(p), & p \left(A(p) \cos \frac{\pi p}{2} - B(p) \right) &= a^p Y_2^{(+)}(p), \\ & & & -\gamma < \operatorname{Re} p < 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де $X_{1,2}^{(-)}(p)$, $Y_{1,2}^{(+)}(p)$ – невідомі функції комплексного аргументу p , які визначаються через невідомі функції $w_{1,2}$ та $q_{1,2}$:

$$\begin{aligned} X_{1,2}^{(-)}(p) &= \frac{G_{1,2}}{p + \gamma_{1,2}} + \int_1^{+\infty} w_{1,2}(r) r^{p-1} dr, & \operatorname{Re} p < 0, \quad p \neq -\gamma_{1,2}, \\ Y_{1,2}^{(+)}(p) &= \int_0^1 q_{1,2}(r) r^{p-1} dr, & \operatorname{Re} p > -\gamma \geq -\gamma_{1,2}. \end{aligned}$$

Використовуючи (6), можна показати, що $X_{1,2}^{(-)}(p)$ – аналітичні у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, за винятком простих полюсів у точках $p = -\gamma_{1,2}$, а при $p \rightarrow \infty$ поводять себе, як $\operatorname{const} \cdot (-p)^{-3/2}$, $Y_{1,2}^{(+)}(p)$ – аналітичні у півплощині $\operatorname{Re} p > -\gamma$ і на нескінченності поводять себе, як $\operatorname{const} \cdot (-p)^{-1/2}$.

Вилучивши з рівностей (7) невідомі функції $A(p)$ та $B(p)$, отримуємо систему функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [4]:

$$\begin{aligned} -Y_1^{(+)}(p) &= \frac{p}{\sin \frac{\pi p}{2}} \left(X_1^{(-)}(p) \cos \frac{\pi p}{2} - a^p X_2^{(-)}(p) \right), \\ Y_2^{(+)}(p) &= \frac{p}{\sin \frac{\pi p}{2}} \left(-a^{-p} X_1^{(-)}(p) + X_2^{(-)}(p) \cos \frac{\pi p}{2} \right), \quad -\gamma < \operatorname{Re} p < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Розв'язання системи Вінера – Гопфа (8). Отриману систему (8) можемо записати у векторно-матричній формі:

$$\begin{bmatrix} -Y_1^{(+)}(p) \\ Y_2^{(+)}(p) \end{bmatrix} = \frac{p}{\sin \frac{\pi p}{2}} \mathbf{D}(p) \begin{bmatrix} X_1^{(-)}(p) \\ X_2^{(-)}(p) \end{bmatrix}, \quad -\gamma < \operatorname{Re} p < 0,$$

де матрицю $\mathbf{D}(p)$ системи подаємо у вигляді

$$\mathbf{D}(p) = \cos \frac{\pi p}{2} \mathbf{E} + \mathbf{J}(p), \quad \mathbf{J}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -a^p \\ -a^{-p} & 0 \end{pmatrix},$$

\mathbf{E} – одинична матриця розміру 2×2 .

Оскільки виконується рівність $\mathbf{J}^2(p) \equiv \mathbf{E}$, матрицю \mathbf{D} системи (8) можна віднести до матриць Храпкова [10, 14]. Крім цього, матриця \mathbf{D} допускає матричну факторизацію за методикою, що розглянута в роботах [10, 14]. Тому до системи Вінера – Гопфа (8), якщо переписати її у векторно-матричній формі, можна було б спробувати застосувати техніку Вінера – Гопфа. Але в процесі її застосування на останньому кроці приходимо до побудови двох цілих функцій від комплексного аргументу p , які на нескінченності мають асимптотику $O(p^{-1}) + a^{\pm p} O(p^{-1})$. При $a = 1$ ця асимптотика має вигляд $O(p^{-1})$, і цілі функції з такою поведінкою на нескінченності, за

теоремою Ліувілля, є тотожно нульовими, що дозволяє побудувати розв'язок системи (8) у замкненому вигляді. Але при $a \neq 1$ асимптотична поведінка $O(p^{-1}) + a^{\pm p}O(p^{-1})$ означає, що цілі функції, які потрібно побудувати при розв'язанні системи (8), мають на нескінченності істотно особливі точки. Для таких функцій не існує аналога теореми Ліувілля про їхній явний вигляд, що не дозволяє отримати розв'язок системи (8) у замкненій формі. Отже, при $a \neq 1$ застосування до системи (8) техніки Вінера – Гопфа із використанням матричної факторизації не є ефективним.

Спробуємо застосувати до розв'язання системи Вінера – Гопфа (8) підхід, який базується на послідовному застосуванні техніки Вінера – Гопфа до кожного з рівнянь системи. Такий підхід використовувався у роботі [2].

Зазначимо, що при $a > 1$ техніку Вінера – Гопфа можна безпосередньо застосувати до першого з рівнянь (8), але до другого рівняння вона не може бути застосована через наявність множника a^{-p} . Аналогічну ситуацію маємо і при $0 < a < 1$. Тому для реалізації запропонованого підходу слід систему (8) переписати в іншій формі.

Обмежимося розглядом випадку $a \geq 1$ (випадок $0 < a \leq 1$ абсолютно аналогічний). Як уже відмічалось, у цьому випадку техніку Вінера – Гопфа можна застосувати до першого рівняння системи (8). Тому воно залишається без змін, а друге рівняння перепишемо в іншій формі. Для цього з першого з рівнянь (8) визначимо $X_1^{(-)}(p)$ і підставимо отриманий вираз у друге з рівнянь системи. Внаслідок перетворень систему (8) можемо переписати в еквівалентній, більш зручній формі:

$$-\frac{\sin \frac{\pi p}{2}}{p \cos \frac{\pi p}{2}} Y_1^{(+)}(p) = X_1^{(-)}(p) - \frac{a^p X_2^{(-)}(p)}{\cos \frac{\pi p}{2}},$$

$$Y_2^{(+)}(p) - \frac{a^{-p} Y_1^{(+)}(p)}{\cos \frac{\pi p}{2}} = -p \frac{\sin \frac{\pi p}{2}}{\cos \frac{\pi p}{2}} X_2^{(-)}(p), \quad -\gamma_* < \operatorname{Re} p < 0, \quad (9)$$

де $\gamma_* = \min\{1, \gamma\} = \min\{1, \gamma_1, \gamma_2\} > 0$. До кожного з рівнянь отриманої системи (9) можна застосувати техніку Вінера – Гопфа окремо.

Факторизуючи коефіцієнти рівнянь (9) із використанням Γ -функцій [1]

$$\frac{\sin \frac{\pi p}{2}}{p \cos \frac{\pi p}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}, \quad p \frac{\sin \frac{\pi p}{2}}{\cos \frac{\pi p}{2}} = \frac{p^2}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)},$$

$$|\operatorname{Re} p| < 1,$$

запишемо

$$-\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)} Y_1^{(+)}(p) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)} \left(X_1^{(-)}(p) - \frac{a^p X_2^{(-)}(p)}{\cos \frac{\pi p}{2}} \right),$$

$$\frac{1}{p} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right)} \left(Y_2^{(+)}(p) - \frac{a^{-p} Y_1^{(+)}(p)}{\cos \frac{\pi p}{2}} \right) = -\frac{p}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)} X_2^{(-)}(p),$$

$$-\gamma_* < \operatorname{Re} p < 0. \quad (10)$$

Ліва частина першого з рівнянь (10) є аналітичною при $\operatorname{Re} p > -\gamma_*$. У

де

$$\alpha_m = \frac{\Gamma^2(1+m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}, \quad m \geq 0, \quad \alpha_m \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Отримана система (17) не є замкненою, оскільки не містить рівняння для визначення невідомої C_0 . Щоб визначити C_0 , розглянемо поведінку шуканої гармонічної функції u при $\rho \rightarrow +\infty$. Для цього виразимо з рівностей (7) коефіцієнти A , B через аналітичні функції $Y_{1,2}^{(+)}$ та підставимо отримані співвідношення у (4). Після певних перетворень отримаємо

$$u(\rho, \varphi) = C_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-p} Y_1^{(+)}(\rho) \cos\left(p\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) - \left(\frac{a}{\rho}\right)^p Y_2^{(+)}(\rho) \cos(p\varphi) \frac{\pi p}{2 \sin \frac{\pi p}{2}} dp, \quad \rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (18)$$

де, враховуючи аналітичність $Y_{1,2}^{(+)}(\rho)$ при $\operatorname{Re} \rho > -\gamma_* \geq -\gamma \geq -2$, контур інтегрування слід вибрати з вертикальної смуги $-\gamma_* < \operatorname{Re} \rho < 0$ комплексної площини (тобто $-\gamma_* < c < 0$). Інтеграл у (18) при $\rho > a \geq 1$ можна обчислити за теорією лишків, якщо замкнути контур інтегрування у півплощині $\operatorname{Re} \rho > c$, у якій підінтегральний вираз має полюси в точках $p = 0$, $p = 2n$, $n \geq 1$. Якщо чисельник підінтегрального виразу при $p = 0$ відмінний від нуля, то точка $p = 0$ є полюсом другого порядку, решта полюсів є простими. Полюс другого порядку в точці $p = 0$, після обчислення лишку, визначає в остаточному виразі для функції u доданок, який при $\rho \rightarrow +\infty$ має логарифмічну поведінку. У цьому випадку шукана гармонічна функція буде необмеженою на нескінченності, що суперечить початковій постановці задачі (1): $|u|_{|x^2+y^2 \rightarrow +\infty} < +\infty$. Тому підінтегральний вираз у (18) не може мати в точці $p = 0$ полюса другого порядку, а це можливо лише тоді, коли чисельник цього виразу в точці $p = 0$ перетворюється в нуль. Отже, отримаємо

$$Y_1^{(+)}(0) - Y_2^{(+)}(0) = C_0 = 0. \quad (19)$$

Поклавши $C_0 = 0$ у (17), приходимо до замкненої нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $x_k, y_k, k \geq 0$. Отримана система буде цілком регулярною при $a > 1$. Якщо $a = 1$, то система зводиться до регулярної за допомогою заміни змінних $x_k = \tilde{x}_k/\sqrt{k+1}$, $y_k = \tilde{y}_k/\sqrt{k+1}$, $k \geq 0$, де $\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, k \geq 0$, – нові невідомі. Чисельне розв'язання нескінченної системи (17) виконуємо методом редукції.

Як уже було зазначено вище, при $a = 1$ систему Вінера – Гопфа (8) можна розв'язати аналітично і отримати явний вигляд функцій $X_2^{(-)}$ та $Y_1^{(+)}$, що, у свою чергу, дозволяє знайти розв'язок системи (17) – невідомі $x_k, y_k, k \geq 0$, абсолютно точно, якщо скористатись їхнім означенням (12).

При $0 \leq \rho \leq 1 \leq a$ отриманий інтеграл можна обчислити за теорією лишків, якщо замкнути контур інтегрування у півплощині $\operatorname{Re} p < c$ (контур замикається у додатному напрямку), в якій підінтегральний вираз має полюси в точках $p = -\gamma_{1,2}$ (полюси $X_{1,2}^{(-)}(p)$) та $p = -2n$, $n \geq 1$. Якщо $\gamma_{1,2} \neq 2n$, $n \geq 1$, то всі полюси є простими. Обчислюючи лишки у вказаних особливих точках, отримаємо

$$u(\rho, \varphi) = G_0 + G_1 \rho^{\gamma_1} \frac{\sin\left(\gamma_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)}{\sin \frac{\pi \gamma_1}{2}} + G_2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\gamma_2} \frac{\sin(\gamma_2 \varphi)}{\sin \frac{\pi \gamma_2}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} (X_1^{(-)}(-2n) - (-1)^n a^{-2n} X_2^{(-)}(-2n)) \rho^{2n} \sin(2n\varphi),$$

$$0 \leq \rho \leq 1 \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

Поклавши послідовно в рівності (14) $p = -2n$, $n \geq 1$, запишемо

$$X_1^{(-)}(-2n) - (-1)^n a^{-2n} X_2^{(-)}(-2n) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma(1 + n)} \times \left(\frac{G_1^{(1)}}{\gamma_1 - 2n} - \frac{a^{-\gamma_2}}{\cos \frac{\pi \gamma_2}{2}} \frac{G_2^{(1)}}{\gamma_2 - 2n} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{-1-2k}}{1 + 2(k-n)} x_k \right), \quad n \geq 1.$$

Якщо підставити цю рівність у (21), отримаємо зображення для шуканої гармонічної функції u при $0 \leq \rho \leq 1 \leq a$ через розв'язок нескінченної системи (17).

Нарешті, для побудови зображення для розв'язку u при $1 \leq \rho \leq a$ (тут обов'язково $a > 1$, при $a = 1$ ця частина зображення відсутня) з другої та третьої рівностей (7) виразимо коефіцієнти A та B через аналітичні функції $X_2^{(-)}$ і $Y_1^{(+)}$, після чого підставимо їх у (4). В результаті отримаємо

$$u(\rho, \varphi) = G_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^p X_2^{(-)}(p) \frac{\cos(p\varphi)}{\cos \frac{\pi p}{2}} dp - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \rho^{-p} Y_1^{(+)}(p) \frac{\sin\left(p\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)}{p \cos \frac{\pi p}{2}} dp,$$

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Перший інтеграл в отриманій рівності (22) можна обчислити за теорією лишків, якщо замкнути контур інтегрування у півплощині $\operatorname{Re} p < c$ (контур замикається в додатному напрямку, $-\gamma_* < c < 0$), у якій підінтегральний вираз має полюси в точках $p = -\gamma_2$ (полюс $X_2^{(-)}$) та $p = -1 - 2k$, $k \geq 0$. Всі полюси будуть простими, якщо $\gamma_2 \neq 1 + 2k$, $k \geq 0$. Другий інтеграл у (22) можна обчислити аналогічно, якщо контур замкнути в півплощині $\operatorname{Re} p > c$ (контур замикається у від'ємному напрямку). Підінтегральний вираз має в цій півплощині прості полюси в точках $p = 1 + 2k$, $k \geq 0$.

Таким чином, обчисливши лишки підінтегральних виразів у відповідних півплощинах та використавши означення (12) величин $x_k, y_k, k \geq 0$, маємо

$$u(\rho, \varphi) = G_0 + G_2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\gamma_2} \frac{\cos(\gamma_2 \varphi)}{\cos \frac{\pi \gamma_2}{2}} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)} \left(\left(\frac{\rho}{a}\right)^{1+2k} (-1)^k x_k - \rho^{-1-2k} y_k\right) \cos((1+2k)\varphi),$$

$$1 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Отримані рівності (21), (22) та (23) дозволяють достатньо ефективно обчислювати значення розв'язку u задачі з крайовими умовами (3) (або (2)) при довільних значеннях аргументу, маючи лише наближений розв'язок нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (17). На рис. 2 і рис. 3 наведено «графіки» розв'язку u при різних значеннях параметрів $a, \gamma_{1,2}, G_{1,2}$ сформульованої задачі.

Якщо розглядати знайдену гармонічну функцію u як потенціал деякого поля, наприклад, електростатичного, то, аналізуючи наведені на рис. 2, рис. 3 «графіки», можна зробити висновок, що найбільші зміни потенціалу поля спостерігаються у безпосередній близькості до хреста, зокрема у його центральній точці та в кінцевих точках відрізків, з яких він складається.

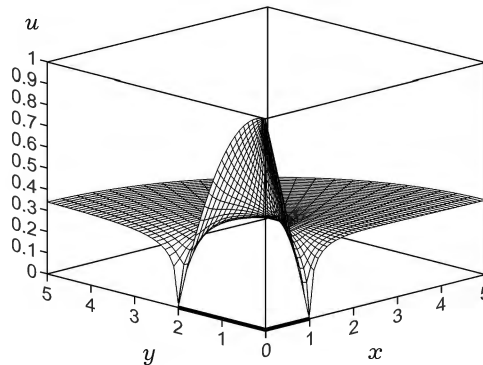


Рис. 2. «Графік» функції u при $a = 2, \gamma_1 = 1.01, \gamma_2 = 2.02, G_0 = 1, G_{1,2} = -1$.

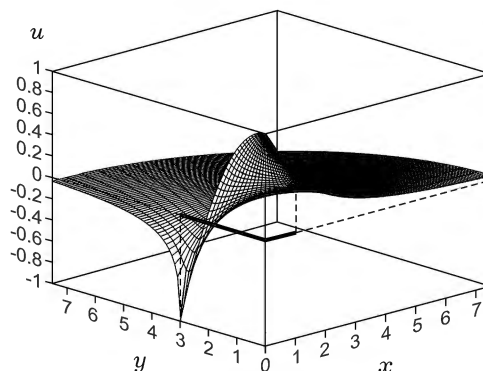


Рис. 3. «Графік» функції u при $a = 3, \gamma_1 = 1.01, \gamma_2 = 2.02, G_0 = 1, G_1 = -0.5, G_2 = -2$.

На кінцях хреста також спостерігається класична коренева особливість, яку можна виділити, якщо скористатись асимптотиками для невідомих x_k, y_k і проаналізувати збіжність рядів для похідної u'_φ в околах кінцевих точок. При цьому ряди, що визначають u'_φ на сторонах хреста, можна отримати з рівностей (21) і (23) шляхом почленного диференціювання. При віддаленні від профілю спостерігається достатньо швидке вирівнювання значень потенціалу, а на відстані, близькій до $2a$, зміни значень потенціалу u майже відсутні.

Висновки. У роботі отримано розв'язок задачі про розподіл плоского потенціального поля зовні симетричного прямокутного хреста. Розглянуто лише симетричну відносно сторін хреста задачу, яка викликає найбільший інтерес. Побудову шуканої гармонічної функції проведено в полярних координатах із використанням інтегрального перетворення Мелліна. З огляду на те, що розглядувана задача має два набори змішаних крайових умов, вона зведена до системи двох рівнянь Вінера – Гопфа відносно двох пар аналітичних функцій. Розв'язання системи в замкненому вигляді методом Вінера – Гопфа із використанням матричної форми можливе лише в одному випадку – абсолютно симетричного хреста ($a = 1$). В інших випадках ($a > 1$) розв'язання системи Вінера – Гопфа за допомогою матричної факторизації не є ефективним. Тому використано підхід, який базується на послідовному застосуванні техніки Вінера – Гопфа до кожного з рівнянь системи окремо. Такий підхід дозволив звести розв'язання вихідної задачі до цілком регулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати наближено методом редукції.

Як результат розв'язання отримано зображення для шуканої гармонічної функції при всіх можливих значеннях аргументів через розв'язок нескінченної системи рівнянь. Отримані зображення дозволяють обчислювати значення розв'язку та його характеристики (вектор-градієнт тощо) із достатньою точністю, маючи лише наближений розв'язок нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Побудований розв'язок дозволяє також проаналізувати розподіл потенціального поля поблизу профілю, що в поперечному перерізі має форму хреста, та оцінити зміни основних характеристик поля при віддаленні від профілю.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
Te same: *Bateman H., Erdélyi A.* Higher transcendental functions. – Vol. I: The Gamma functions. The hypergeometric functions. Legendre functions. – New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. – xxvi+302 p.
2. *Ловейкін А. В.* Плоске потенціальне поле зовні симетричного T-подібного профілю // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 2. – С. 83–97.
Te same: *Loveikin A. V.* Plane potential field outside a symmetric T-shaped profile // *J. Math. Sci.* – 2023. – **272**, No. 1. – P. 93–111.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06402-4>.
3. *Ловейкін А. В.* Рівновага пружної півплощини з жорстко закріпленою межею, яка послаблена похилим розрізом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 2. – С. 146–160.
Te same: *Loveikin A. V.* Equilibrium of an elastic half plane with rigidly fixed boundary weakened by an oblique cut // *J. Math. Sci.* – 2022. – **261**, No. 1. – P. 176–193. – <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05746-7>.
4. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
Te same: *Noble B.* Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press, 1958. – x+246 p.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.

- Te came: *Uflyand Ya. S.* Survey of articles on the application of integral transforms in the theory of elasticity. – North Carolina State Univ., 1965. – 402 p.
6. *Camacho M., Hibbins A. P., Capolino F., Albani M.* Diffraction by a truncated planar array of dipoles: A Wiener–Hopf approach // *Wave Motion.* – 2019. – **89**. P. 28–42. – <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.03.004>.
 7. *Daniele V. G., Lombardi G.* The generalized Wiener–Hopf equations for the elastic wave motion in angular regions // *Proc. R. Soc. A.* – 2022. – **478**, No. 2257. – Article ID: 20210624. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0624>.
 8. *Daniele V. G., Lombardi G.* The generalized Wiener–Hopf equations for wave motion in angular regions: electromagnetic application // *Proc. R. Soc. A.* – 2021. – **477**, No. 2252. – Article ID: 20210040. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0040>.
 9. *Fleck N. A., Willis J. R.* Steady-state growth of an interfacial crack by corrosion // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2021. – **148**. – Article 104268. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104268>.
 10. *Jones D. S.* Wiener–Hopf splitting of a 2×2 matrix // *Proc. R. Soc. A.* – 1991. – **434**, No. 1891. – P. 419–433. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0101>.
 11. *Kuryliak D.* Diffraction by semi-infinite cone formed with electric and magnetic surfaces: analytical regularization and Wiener–Hopf techniques // *J. Eng. Math.* – 2019. – **115**, No. 1. – P. 43–65. – <https://doi.org/10.1007/s10665-019-09991-9>.
 12. *Smith M. J. A., Peter M. A., Abrahams I. D., Meylan M. H.* On the Wiener–Hopf solution of water-wave interaction with a submerged elastic or poroelastic plate. *Proc. R. Soc. A.* – 2020. – **476**, No. 2242. – Article ID: 20200360. – <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2020.0360>.
 13. *Thompson I.* Diffraction by a rigid strip in a plate modelled by Mindlin theory // *Proc. R. Soc. A.* – 2020. – **476**, No. 2243. – Article ID: 20200648. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0648>.
 14. *Veitch B. H., Abrahams I. D.* On the commutative factorization of $n \times n$ matrix Wiener–Hopf kernels with distinct eigenvalues // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 2007. – **463**, No. 2078. – P. 613–639. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1780>.

PLANE POTENTIAL FIELD OUTSIDE A SYMMETRIC RECTANGULAR CROSS

The problem of the distribution of the plane potential field outside a symmetric rectangular cross is considered. With the help of the Mellin integral transformation, the problem is reduced to a system of two Wiener – Hopf equations, for the solving which an approach without factorization of the matrix coefficient is used. The original problem is transformed to the completely regular infinite linear algebraic system of equations, which is solved numerically by the reduction method. The representations of the required harmonic function via the solution of infinite linear algebraic system are obtained.

Key words: *rectangular cross, Dirichlet problem, Mellin integral transformation, Wiener – Hopf system, Wiener – Hopf method.*