

ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ СКІНЧЕННИХ БІМАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ СПОЛУЧНОГО ПРОШАРКУ ВИСОКОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ВНУТРІШНІХ ТОНКИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ

Запропоновано метод розв'язування плоских задач термомагнітоелектропружності для з'єднаних тонким сполучним прошарком (інтерфейсом) високої теплопровідності скінчених біматеріальних тіл із чутливими до впливу фізико-механічних полів тонкими включеннями. На основі розширеного формалізму Стро і теорії функцій комплексної змінної побудовано інтегральні рівняння типу Сомільяни, для розв'язування яких використано модифікований метод граничних елементів. Запропоновано спосіб верифікації інтегральних рівнянь та використаної обчислювальної схеми їхнього розв'язування. Здійснено обчислення та аналіз розв'язків низки задач для скінчених тіл із включеннями.

Ключові слова: анізотропний біматеріал, формалізм Стро, тотожність Сомільяни, термомагнітоелектропружність, прошарок високої теплопровідності, тонке включення.

У сучасному інженерному проектуванні і на високотехнологічних виробництвах, особливо приладів точної механіки інноваційного характеру, широко використовують бі- та мультиматеріальні структури. Вони дають можливість внутрішньо поєднувати та перерозподіляти енергію декількох полів різної фізичної природи (переважно механічного, температурного, електричного та магнітного), а тому мають широкі перспективи застосування у приладових та сенсорних системах, пристроях точного позиціонування, перетворювачах енергії тощо.

Створення таких мультиматеріалів дуже часто відбувається шляхом механічного поєднання в єдине ціле піроелектричних (сегнетоелектричних) та магнітострикційних (п'єзомагнітних) матеріалів. У результаті цього на межі поділу, як правило, виникає тонкий з'єднувальний міжфазний шар. Найчастіше його не враховують і розв'язують задачу у припущенні про існування на межі поділу матеріалів ідеального щодо усіх можливих фізико-механічних полів контакту. Крім того, навіть за майже ідеального електромеханічного контакту теплова взаємодія складових часто буває неідеальною, і навіть дуже тонкий чужорідний прошарок може істотно впливати на температурні поля всередині структурно неоднорідного тіла. А це, у свою чергу, внаслідок теплового розширення та існування піроелектричного та піромагнітного ефектів може зумовити істотну концентрацію окремих фізико-механічних полів у такому мультиматеріальному тілі. У зв'язку з цим у науковій літературі виділяють, в основному, два найпростіші типи неідеального теплового контакту складових біматеріалу. Зокрема, якщо при переході через поверхню контакту нормальна складова теплового потоку є неперервною функцією, а температура має стрибок (причому пропорційний до нормальної складової теплового потоку), то такі умови називають слабкою теплопровідністю (інтерфейс типу Капіци) [8]. Такого типу умов взаємодії стосується основна маса робіт, у яких розглядають біматеріальні тіла з неідеальним контактом складових. Скажімо, задача термопружності анізотропного біматеріалу з умовою слабкої теплопровідності та ідеальним механічним контактом складових розв'язана у праці [13]. Крім цього, у роботі [10] отримано граничні інтегральні рівняння анізотропної термоелектропружності для біматеріального тіла з інтерфейсом типу Капіци. У праці [15] одержано функції Гріна для температури у біматеріальних тілах із

✉ vasylyshyn.c.h@gmail.com

інтерфейсом типу Капіци. У статті [16] запропоновано загальний та ефективний метод для моделювання інтерфейсу типу Капіци, що базується на розширеному методі скінченних елементів у поєднанні з методом множини рівнів (set levels-method).

Якщо ж при переході через межу контакту вважати температуру неперервною функцією, а нормальний тепловий потік таким, що має пропорційний до похідної від температури стрибок, то в результаті можна створити найпростішу математичну модель інтерфейсу високої теплопровідності [4]. Незважаючи на те, що цей тип інтерфейсу теж у свій спосіб істотно впливає на розподіл у смарт-матеріалах температури, досліджень, що стосувались би цієї проблеми для термомагнітоелектропружних біматеріальних тіл, практично немає [12]. Саме тому у цій роботі розглядаються термомагнітоелектропружні біматеріальні тіла скінченних розмірів, що містять інтерфейс високої теплопровідності, а також тонкі деформівні включення. При цьому магнітоелектромеханічний контакт складових матеріалів тіла вважається ідеальним. Запропоновано відповідну математичну модель та підхід до розв'язування такого типу задач.

1. Формулювання задачі. У межах умов плоскої задачі розглянемо в системі координат $Ox_1x_2x_3$ анізотропне термомагнітоелектропружне біматеріальне середовище (рис. 1), що складається з двох розділених поверхнею $x_2 = 0$ термомагнітоелектропружних анізотропних півпросторів S_1 ($x_2 > 0$) та S_2 ($x_2 < 0$). На межі контакту наявний тонкий плоский міжфазний шар. Півпростори містять паралельні до осі x_3 циліндричні порожнини, на поверхні яких задано довільні незалежні від x_3 механічні, електричні, магнітні і теплові крайові умови. У цьому випадку достатньо обмежитися розглядом температурного і термомагнітоелектропружного стану у довільному перерізі середовища, перпендикулярному до осі Ox_3 .

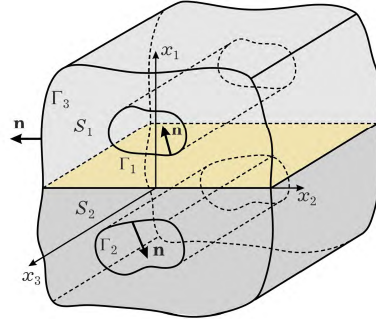


Рис. 1. Геометрична схема плоскої задачі для термомагнітоелектропружного анізотропного біматеріального середовища.

За допомогою комплексних потенціалів $g(z_t)$ та $\mathbf{f}(z_*)$ розширеного формалізму Стро [7, 14] можемо записати значення температури θ , функції теплового потоку ϑ , розширені вектор переміщень \tilde{u}_i та тензор напружень $\tilde{\sigma}_{ij}$ у довільній точці (x_1, x_2) однорідного тіла (тобто у півпросторі S_1 , $x_2 > 0$, чи S_2 , $x_2 < 0$):

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \operatorname{Re} \{g'(z_t)\}, & \vartheta &= 2k_t \operatorname{Im} \{g'(z_t)\}, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= 2 \operatorname{Re} [\mathbf{A} \mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c} g(z_t)], & \tilde{\boldsymbol{\phi}} &= 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B} \mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d} g(z_t)], \\ \tilde{u}_i &= u_i, & \tilde{u}_4 &= \varphi, & \tilde{u}_5 &= \psi, & \tilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}, & \tilde{\sigma}_{4j} &= D_j, & \tilde{\sigma}_{5j} &= B_j, & i &= 1, 2, 3, \\ \tilde{\sigma}_{i1} &= -\tilde{\phi}_{i,2}, & \sigma_{i2} &= \tilde{\phi}_{i,1}, & z_t &= x_1 + p_t x_2, & z_\alpha &= x_1 + p_\alpha x_2, \\ h_1 &= -\vartheta_{,2}, & h_2 &= \vartheta_{,1}, & k_t &= \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}, \\ \mathbf{f}(z_*) &= [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3), F_4(z_4), F_5(z_5)]^T. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $F_\alpha(z_\alpha)$ – комплексні потенціали Стро, $g(z_t)$ – аналітична функція

комплексної змінної; f_i – об’ємні сили; q – густина вільних зарядів; f_h – густина розподілених джерел (стоків) тепла; k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності; β_{ij} – модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень); u_i – компоненти вектора переміщень; σ_{ij} – компоненти тензора механічних напружень; ϕ – електричний потенціал, ψ – магнітний потенціал, D_i – електричне зміщення; B_i – магнітна індукція; p_t – комплексна стала (з додатною уявною частиною), яка є коренем характеристичного рівняння теплопровідності $k_{22}p_t^2 + 2k_{12}p_t + k_{11} = 0$.

Матриці $\mathbf{A} \equiv [A_{ia}] = [\mathbf{a}_a]$ і $\mathbf{B} \equiv [B_{ia}] = [\mathbf{b}_a]$, вектори \mathbf{c} і \mathbf{d} разом зі сталими p_α , $\alpha = 1, \dots, 5$, визначаємо із задачі на власні значення формалізму Стро [14] через значення термомагнітоелектромеханічних властивостей матеріалу. Функція $g'(z_t)$, температура θ і функція теплового потоку \mathfrak{G} пов’язані таким чином [14]:

$$g'(z_t) = \frac{1}{2} \left(\theta + i \frac{\mathfrak{G}}{k_t} \right). \quad (2)$$

Для біматеріального середовища основним завданням є поєднання між собою комплексних потенціалів для півпросторів S_1 , $x_2 > 0$, та S_2 , $x_2 < 0$, із виконанням відповідних крайових умов на внутрішній межі контакту. При цьому тонкий проміжний шар із розгляду вилучаємо, вважаючи, що на межі поділу біматеріального середовища виконуються умови неідеального теплового контакту у вигляді інтерфейсу високої теплопровідності:

$$\mathfrak{G}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \mathfrak{G}(x_1) + \mu_0 \theta_{,1}(x_1), \quad \mu_0 = 2h^{\text{int}} k_{22}^{\text{int}},$$

$$\mathfrak{G}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \mathfrak{G}(x_1), \quad (3)$$

$$\theta^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \theta^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \theta(x_1) \quad \forall x_2 = 0 \quad (4)$$

а також умови ідеального магнітоелектромеханічного контакту складових:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}(x_1),$$

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\boldsymbol{\phi}}(x_1) \quad \forall x_2 = 0. \quad (5)$$

Тут μ_0 – зведена теплопровідність прошарку (інтерфейсу), $2h^{\text{int}}$ – товщина міжфазного прошарку; k_t^{int} – його коефіцієнт теплопровідності. Індексами 1 і 2 позначено величини, що відповідають півпросторам S_1 та S_2 .

Вважатимемо також, що кожна зі складових біматеріалу може містити системи гладких замкнутих контурів $\Gamma_1 = \bigcup_i \Gamma_i^{(1)}$ та $\Gamma_2 = \bigcup_i \Gamma_i^{(2)}$ (кожна з яких міститься у відповідному півпросторі, див. рис. 1), а також може бути обмежена деяким зовнішнім контуром Γ_3 . На цих контурах можна задавати ті чи інші теплові, механічні, електричні та магнітні крайові умови. Напрям обходу контурів вибираємо так, щоб нормаль \mathbf{n} до Γ_i була спрямована назовні області, обмеженої Γ_i .

Для побудови інтегральних формул щодо визначення комплексних потенціалів Стро використаємо інтегральну формулу Коші:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \varphi(z) & \forall z \in S, \\ 0 & \forall z \notin S. \end{cases} \quad (6)$$

Формулою (6) окреслюється зв'язок між значеннями довільної аналітичної функції $\varphi(\tau)$ на межі ∂S області S зовні та всередині неї. Тут $\tau, z \in \mathbb{C}$ є комплексними змінними, які характеризують розміщення точок джерела і поля, відповідно. Також вважаємо, що, коли область S є нескінченною, то функція $\varphi(\tau)$ повинна зникати при $z \rightarrow \infty$.

2. Побудова інтегральних подань для біматеріалу з неідеальним тепловим контактом складових.

2.1. Теплопровідність. Сформульована формулами (3), (4) задача теплопровідності є лінійною. Її розв'язок можна подати як суперпозицію однорідного (відповідає сформульованій задачі у випадку відсутності контурів у компонентах біматеріалу) та збуреного (впливом існування додаткових теплових чинників) розв'язків.

Побудова першого розв'язку ($g_{1\infty}(z_t^{(1)})$ та $g_{2\infty}(z_t^{(2)})$) є доволі простою, оскільки він повинен лише задовольняти рівняння (2)–(4).

Другий розв'язок (збурений) зумовлюється наявністю контурів $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ з окресленими на них тими чи іншими крайовими умовами.

Формули Коші для складових біматеріалу запишемо таким чином:

$$g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{g_1'(\tau_t^{(1)}) d\tau_t^{(1)}}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1'(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(1)}} \quad \forall \text{Im}(z_t^{(1)}) > 0, \quad (7)$$

$$g_2'(z_t^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{g_2'(\tau_t^{(2)}) d\tau_t^{(2)}}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_2'(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(2)}} \quad \forall \text{Im}(z_t^{(2)}) < 0. \quad (8)$$

Використовуючи умови (3), (4) неідеального теплового контакту, вираз (2) на осі Ox_1 можемо записати так:

$$g_1'(x_1) = \frac{1}{2} \left(\theta(x_1) + \frac{i}{k_t^{(1)}} \vartheta(x_1) + \frac{i\mu_0}{k_t^{(1)}} \theta_{,1}(x_1) \right), \quad (9)$$

$$g_2'(x_1) = \frac{1}{2} \left(\theta(x_1) + \frac{i}{k_t^{(2)}} \vartheta(x_1) \right). \quad (10)$$

Підставимо тепер (9) та (10) у (7) і (8) відповідно:

$$\begin{aligned} g_1'(z_t^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{g_1'(\tau_t^{(1)}) d\tau_t^{(1)}}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(1)}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2k_t^{(1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vartheta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(1)}} + \frac{i}{2k_t^{(1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 \theta_{,1}(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(1)}} \right), \\ g_2'(z_t^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{g_2'(\tau_t^{(2)}) d\tau_t^{(2)}}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(2)}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2k_t^{(2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vartheta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(2)}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
q_t^{(i)}(z_t^{(j)}) &= \int_{\Gamma_i} \frac{g_i'(\tau_t^{(i)}) d\tau_t^{(i)}}{\tau_t^{(i)} - z_t^{(j)}}, & \bar{q}_t^{(i)}(z_t^{(j)}) &= \int_{\Gamma_i} \frac{\overline{g_i'(\tau_t^{(i)})} d\bar{\tau}_t^{(i)}}{\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}}, \\
K &= \frac{k_t^{(1)} - k_t^{(2)}}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}}, & \frac{1}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}} &= \frac{1 + K}{2k_t^{(1)}} = \frac{1 - K}{2k_t^{(2)}}, \\
\beta_1 &= -\frac{i\mu_0(1 + K)}{2k_t^{(1)}} = -\frac{i\mu_0(1 - K)}{2k_t^{(2)}} = -\beta_2, \\
e_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) &= e^{-\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \int_{\Gamma_k} e^{\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} q_t^{(k)}(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)}, \\
\bar{e}_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) &= e^{-\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \int_{\Gamma_k} e^{\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \bar{q}_t^{(k)}(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Підставивши (12) в (11), вирази для функцій $g_1'(z_t^{(1)})$ і $g_2'(z_t^{(2)})$ можемо записати так:

$$\begin{aligned}
g_1'(z_t^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \bar{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1 + K}{\beta_1} \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) + \frac{1 - K}{\beta_1} e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) \right], \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2'(z_t^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + \bar{q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 + K}{\beta_2} e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - \frac{1 - K}{\beta_2} \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}) \right]. \tag{14}
\end{aligned}$$

Отже, використовуючи формули (1) та вирази (13) і (14), можемо записати інтегральні подання для температури і теплового потоку у довільній точці ξ біматеріалу:

$$\begin{aligned}
\theta(\xi) &= \begin{cases} 2 \operatorname{Re} \{g_1'(Z_t^{(1)}(\xi))\} & \forall \xi \in S_1, \\ 2 \operatorname{Re} \{g_2'(Z_t^{(2)}(\xi))\} & \forall \xi \in S_2, \end{cases} = \\
&= \int_{\Gamma} [\Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x})] ds(\mathbf{x}) + \theta^\infty(\xi), \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_i(\xi) &= \begin{cases} 2k_t^{(1)} \operatorname{Im} \{(\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)}) g_1''(Z_t^{(1)}(\xi))\} & \forall \xi \in S_1, \\ 2k_t^{(2)} \operatorname{Im} \{(\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)}) g_2''(Z_t^{(2)}(\xi))\} & \forall \xi \in S_2, \end{cases} = \\
&= \int_{\Gamma} \Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + h_i^\infty(\xi), \tag{16}
\end{aligned}$$

Тут функції $\theta^\infty(\xi)$ і $h_i^\infty(\xi)$ є однорідними розв'язками для біматеріалу

$$\theta^\infty(\xi) = \begin{cases} 2 \operatorname{Re} \{g_{1\infty}'(Z_t^{(1)}(\xi))\} & \forall \xi \in S_1, \\ 2 \operatorname{Re} \{g_{2\infty}'(Z_t^{(2)}(\xi))\} & \forall \xi \in S_2, \end{cases}$$

$$h_i^\infty(\xi) = \begin{cases} 2k_t^{(1)} \operatorname{Im} \{ (\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)}) g_{1\infty}''(Z_t^{(1)}(\xi)) \} & \forall \xi \in S_1, \\ 2k_t^{(2)} \operatorname{Im} \{ (\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)}) g_{2\infty}''(Z_t^{(2)}(\xi)) \} & \forall \xi \in S_2. \end{cases}$$

Стягуючи деякий контур Γ_i до математичного розрізу Γ_C із берегами Γ_C^+ та Γ_C^- (рис. 2) та зважаючи на те, що нормалі до цих берегів у відповідних протилежних точках є протилежними за напрямом, на основі інтегральних формул (15), (16) можемо отримати такі інтегральні тотожності для температури і теплового потоку в тілі з розрізом Γ_C :

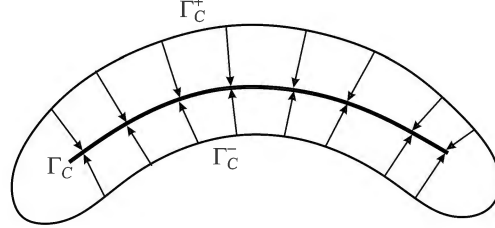


Рис. 2. Стягання контуру Γ_i до деякого математичного розрізу Γ_C .

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \int_{\Gamma} [\Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{\Gamma_C} [\Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \theta(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ &- \iint_S \Theta^{\text{HCl}^*}(\mathbf{x}, \xi) f_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ h_i(\xi) &= \int_{\Gamma} [\Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{\Gamma_C} [\Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma h_n(\mathbf{x}) - H_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \theta(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ &- \iint_S \Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) f_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Тут Γ – межа області S без внутрішніх розрізів Γ_C ; $\Sigma f = f^+ + f^-$, $\Delta f = f^+ - f^-$ – сума та стрибок величини f поля на берегах Γ_C^+ та Γ_C^- розрізу Γ_C .

2.2. Термоелектропружність. Використовуючи (6), запишемо тепер інтегральну формулу Коші для векторів $\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)})$ та $\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)})$ комплексних потенціалів Стро, компоненти яких в областях S_1 та S_2 є аналітичними функціями своїх аргументів:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_1} \left\langle \frac{d\tau_*^{(1)}}{\tau_*^{(1)} - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(\tau_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(x_1) \right], \\ \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_2} \left\langle \frac{d\tau_*^{(2)}}{\tau_*^{(2)} - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(\tau_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(x_1) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут

$$\langle F(z_*) \rangle = \operatorname{diag} [F_1(z_1), \dots, F_5(z_5)].$$

Вводячи позначення

$$\mathbf{q}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_i} \left\langle \frac{d\tau_*^{(j)}}{\tau_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)}), \quad \bar{\mathbf{q}}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_i} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_*^{(j)}}{\bar{\tau}_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\tau_*^{(j)}),$$

перепишемо (17) у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(x_1) dx_1 \right], \\ 0 &= \bar{\mathbf{q}}_1(z_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(x_1) dx_1, \\ 0 &= \mathbf{q}_1(z_*^{(2)}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(x_1) dx_1 \right], \\ 0 &= \bar{\mathbf{q}}_2(z_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \bar{\mathbf{f}}^{(2)}(x_1) dx_1, \\ 0 &= \mathbf{q}_2(z_*^{(1)}) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(x_1) dx_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Виходячи з крайових умов (5), виключаючи з (18) і (19) інтеграли уздовж інтерфейсу та використовуючи умови ортогональності Стро [14], отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta (\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)})) + [(1+K) \times \right. \\ &\quad \times \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - (1-K)e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - (1+K)\bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + (1-K) \times \\ &\quad \times Q_t^{(2)}(z_t^{(1)})] (-\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\lambda}_1 + \mathbf{G}_2^{(1)} \lambda_2 - \lambda_1) + [ik_t^{(2)}(1+K)[\bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \\ &\quad + Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) - \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)})] + 2ik_t^{(1)} \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)})] \times \\ &\quad \times (-\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mu}_1 - \mu_1) + [ik_t^{(2)}(1+K)[Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) + \bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - \\ &\quad - \bar{e}_t^{(1)}(\beta_1; z_t^{(1)}) - e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)})] + 2ik_t^{(2)} e_t^{(2)}(\beta_1; z_t^{(1)})] \mathbf{G}_2^{(1)} \mu_2 \left. \right], \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta (\mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)})) + [(1+K) \times \right. \\ &\quad \times e_t^{(1)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - (1-K)\bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_t^{(2)}) - (1+K)Q_t^{(1)}(z_t^{(2)}) + \\ &\quad + (1-K)\bar{Q}_t^{(2)}(z_t^{(2)})] (-\mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\lambda}_2 + \mathbf{G}_1^{(2)} \lambda_1 + \lambda_2) + [-ik_t^{(2)}(1+K) \times \\ &\quad \times [Q_t^{(1)}(z_\beta^{(2)}) + \bar{Q}_t^{(2)}(z_\beta^{(2)}) - \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) - e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)})] - 2ik_t^{(1)} \times \\ &\quad \times e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)})] (-\mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\mu}_2 + \mu_2) + [-ik_t^{(2)}(1+K)[Q_t^{(1)}(z_\beta^{(2)}) + \\ &\quad + \bar{Q}_t^{(2)}(z_\beta^{(2)}) - \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)}) - e_t^{(1)}(\beta_2; z_\beta^{(2)})] - \\ &\quad - 2ik_t^{(2)} \bar{e}_t^{(2)}(\beta_2; z_\beta^{(2)})] \mathbf{G}_1^{(2)} \mu_1 \left. \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1^{(1)} &= -[\mathbf{A}_1^\top (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{B}}_1^{-\top} + \mathbf{B}_1^\top (\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{A}}_1^{-\top}], \\
\mathbf{G}_2^{(1)} &= -[\mathbf{A}_1^\top (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{B}_2^{-\top} + \mathbf{B}_1^\top (\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{A}_2^{-\top}], \\
\mathbf{G}_1^{(2)} &= -[\mathbf{A}_2^\top (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{B}_1^{-\top} + \mathbf{B}_2^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{A}_1^{-\top}], \\
\mathbf{G}_2^{(2)} &= -[\mathbf{A}_2^\top (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{B}}_2^{-\top} + \mathbf{B}_2^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{A}}_2^{-\top}].
\end{aligned}$$

Отримані рівності (20) та (21) у поєднанні з (1) дають можливість записати інтегральні співвідношення, що пов'язують переміщення у довільній точці термопружного біматеріалу зі значеннями температури, теплового потоку та векторів розширених переміщень і напружень на контурах Γ_i :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_1 \mathbf{f}^{(1)}(Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) + \mathbf{c}_1 g_1(Z_t^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \} & \forall \boldsymbol{\xi} \in S_1, \\ 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_2 \mathbf{f}^{(2)}(Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) + \mathbf{c}_2 g_2(Z_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) \} & \forall \boldsymbol{\xi} \in S_2, \end{cases} = \\
&= \tilde{\mathbf{u}}^\infty(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} [\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \\
&\quad + \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x})] ds(\mathbf{x}). \quad (22)
\end{aligned}$$

За допомогою (20) і (21) подібні співвідношення запишемо також для визначення напружень у довільній точці термопружного біматеріалу:

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_j(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}_1 (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}) \mathbf{f}'(Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) + \mathbf{d}_1 (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(1)}) g_1'(Z_t^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \}, \\ 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}_2 (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}) \mathbf{f}'(Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) + \mathbf{d}_2 (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(2)}) g_2'(Z_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) \}, \end{cases} = \\
&= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_j^\infty(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
&\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}). \quad (23)
\end{aligned}$$

Як і у випадку теплопровідності (див. п. 2.1), стягнемо контур Γ_i до деякого математичного розрізу Γ_C із берегами Γ_C^+ та Γ_C^- (рис. 2). Зважаючи на те, що нормалі до цих берегів є протилежними за напрямом, на основі інтегральних формул (22), (23) отримаємо такі інтегральні тотожності для переміщень і напружень у тілі з розрізом Γ_C :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_i(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
&\quad + \int_{\Gamma} [R_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
&\quad + \int_{\Gamma} [R_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Delta \theta(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Sigma h_n(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
&\quad + \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \iint_S (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \\
\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma} [Q_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\theta(\mathbf{x}) + W_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})h_n(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma_C} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Sigma\tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta\tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} [Q_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta\theta(\mathbf{x}) + W_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Sigma h_n(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
& + \iint_S D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})f_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \iint_S W_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})f_h(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Щоб побудувати інтегральні рівняння для знаходження температури, теплового потоку, переміщень і напружень, спрямуємо точку z внутрішності до точки τ_0 на межі і використаємо формулу Сохоцького – Племелі [2], що пов'язує головне значення інтеграла з його значенням на Γ :

$$\lim_{z \rightarrow \tau_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2} \varphi(\tau_0) + \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau. \quad (24)$$

Тут CPV – головне значення інтеграла Коші (Cauchy Principal Value). Крім цього, при розв'язуванні задач для тіл із розрізами користуються теоремою про голоморфність кусково-аналітичної функції:

$$\frac{1}{2} \Sigma\varphi(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C} \frac{\Delta\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau \right]. \quad (25)$$

На основі (1), (13), (14), (20), (21) і (25) побудуємо систему дуальних інтегральних рівнянь для термомагнітоелектропружного біматеріалу, коли – точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій поверхні Γ замкненого контуру:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \theta(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} \Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} H^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma_C} \Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_C} H^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta\theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \\
\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{r}^{\text{HCI}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{v}^{\text{HCI}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma_C} [\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \\
& + \mathbf{r}^{\text{HCI}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta\theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{HCI}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x})] ds(\mathbf{x});
\end{aligned}$$

– точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій поверхні Γ_C розрізу:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Sigma\theta(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma_C} \Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& - \text{CPV} \int_{\Gamma_C} H^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta\theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} [\Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x})] ds(\mathbf{x}), \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \Delta h_n(\mathbf{y}) = n_i(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C} \Theta_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \text{HPV} \int_{\Gamma_C} H_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[\Theta_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) - H_i^{\text{HCl}^{**}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \Big], \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Sigma \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \\
& - \text{CPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \text{RPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma_C} \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \right. \\
& \left. + \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}), \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = & n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \right. \\
& - \text{HPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \text{CPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{q}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \right. \\
& \left. + \mathbf{q}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}) \Big]. \quad (29)
\end{aligned}$$

Тут RPV – головне значення невластного інтеграла Рімана; HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла за Адамаром.

Дуальні інтегральні рівняння (26)–(29) розв’язуватимемо сумісно зі співвідношеннями, що впливають із математичних моделей тонких термомагнітоелектропружних включень [10], які подамо у формі функційних зв’язків

$$\begin{aligned}
\Sigma \theta(\mathbf{y}) &= F^{\theta}(\mathbf{y}, \Sigma h_n, \Delta \theta), \\
h_n(\mathbf{y}) &= F^h(\mathbf{y}, \Sigma h_n, \Delta \theta), \\
\tilde{u}_i(\mathbf{y}) &= F_i^u(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j, \Sigma \theta, \Delta \theta), \\
\Sigma \tilde{t}_i(\mathbf{y}) &= F_i^t(\mathbf{y}, \Sigma \tilde{t}_j, \Delta \tilde{u}_j, \Sigma \theta, \Delta \theta). \quad (30)
\end{aligned}$$

Відповідно до [9] найпростіші лінійні залежності (30) для тонкого термомагнітоелектропружного включення можемо подати так:

$$\begin{aligned}
\Delta h_n(\mathbf{y}) &= \frac{k_{11}^i(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} (\Delta \theta(\mathbf{y}) + \Delta \theta^*(\mathbf{y})), \\
\Sigma \theta(\mathbf{y}) &= 2\theta^0 - \int_{y_0}^y \frac{H(s) - H^*(s)}{h(s)k_{22}^i(s)} ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) &= -\frac{\mathbf{V}(\mathbf{y})(\Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) + \Delta\tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{y}))}{h(\mathbf{y})} - \mathbf{v}(\mathbf{y})\Sigma\theta(\mathbf{y}), \\ \Sigma\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) &= 2\tilde{\mathbf{u}}^0 + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{W}(s)(\tilde{\mathbf{P}}(s) + \tilde{\mathbf{P}}^*(s))}{h(s)} ds + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \mathbf{w}(s)\Sigma\theta(s) ds.\end{aligned}\quad (31)$$

Тут

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^\top \mathbf{Q}'^{\text{inc}} \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{\Omega}^\top (\mathbf{T}'^{\text{inc}})^{-1} \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{\Omega}^\top \tilde{\beta}'^{\text{inc}}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{\Omega}^\top \tilde{\alpha}'^{\text{inc}},$$

$$H(\mathbf{y}) = -H^0 + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \Sigma h_n(s) ds - \text{теплота в поперечному перерізі включення}; H^0$$

– тепловий потік на лівому торці включення; $h(\mathbf{y})$ – півтовщина включення у кожній точці \mathbf{y} ; $\mathbf{\Omega}$ – матриця повороту, θ^0 – середнє значення зміни температури на торці включення; $\tilde{\mathbf{u}}^0$ – середні значення переміщень, електричного та магнітного потенціалів на торці включення. Індексом «inc» позначено величини, що належать до включення.

Відповідно до [3] функції стрибків напружень та переміщень в околі вершин тонких неоднорідностей характеризуються узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень, електричних зміщень і магнітної індукції (КІНЕЗМІ), що визначаються в локальній системі координат із початком у вершині через функції стрибка у вершині неоднорідності за формулами

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{u}}(s), \quad \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma\tilde{\mathbf{t}}(s), \quad (32)$$

де $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = [K_{21}, K_{11}, K_{31}, K_{41}, K_{51}]$, $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = [K_{12}^{(2)}, K_{22}^{(2)}, K_{32}, K_{42}, K_{52}]$ – вектори узагальнених КІНЕЗМІ K_{ij} ; $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^\top$ – дійсний тензор Barnett –

Lothe [11]. Дві перші компоненти $K_{12}^{(2)}$, $K_{22}^{(2)}$ вектора $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$ відрізняються від узагальнених КІН K_{12} , K_{22} , які вводять для суто пружних задач теорії включень [3]. Щоб знайти K_{12} , K_{22} через $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$, потрібно використати формулу

$$\mathbf{k}^{(2)} = \mathbf{D}\mathbf{S}^\top \tilde{\mathbf{k}}^{(2)}, \quad \mathbf{D} = \text{diag}[1, 1, 0, 0, 0]. \quad (33)$$

Тут $\mathbf{k}^{(2)} = [K_{22}, K_{12}]^\top$ – вектор узагальнених КІН; $\mathbf{S} = \sqrt{-1} (2\mathbf{A}\mathbf{B}^\top - \mathbf{I})$ – другий дійсний тензор Barnett – Lothe [11].

Узагальнені коефіцієнти інтенсивності теплового потоку означимо виразами

$$K_{h1} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} k_t \Delta\theta(s), \quad K_{h2} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma h_n(s). \quad (34)$$

Поля переміщень, напружень, температури і теплового потоку в околі вершини включення повністю характеризуються узагальненими КІНЕЗМІ і обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Im} \left\{ \mathbf{A} \langle \sqrt{Z_*} \rangle (\sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2\mathbf{A}^\top \tilde{\mathbf{k}}^{(2)}) \right\}, \\ \boldsymbol{\phi} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle \sqrt{Z_*} \rangle (\sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2\mathbf{A}^\top \tilde{\mathbf{k}}^{(2)}) \right\}, \\ \theta &= \frac{1}{k_t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Im} \left\{ (K_{h1} + \sqrt{-1} K_{h2}) \sqrt{Z_t} \right\}, \\ \vartheta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Im} \left\{ (\sqrt{-1} K_{h1} - K_{h2}) \sqrt{Z_t} \right\}.\end{aligned}\quad (35)$$

3. Твердження 1. Інтегральні рівняння (26)–(29), отримані для необмежених біматеріальних тіл з внутрішніми вирізами Γ_1 та/або Γ_2 з неідеальним тепловим контактом складових, можна використовувати як для задач із довільною кількістю внутрішніх контурів і тонких (уздовж математичних розрізів) включень у кожній зі складових, так і для скінченних однорідних тіл, обмежених зовнішнім контуром Γ_3 з внутрішніми контурами та тонкими включеннями. Очевидно, що їхні розв'язки придатні лише для точок, що не належать до внутрішності вирізів.

Д о в е д е н н я. Без зменшення загальності припустимо, що скінченне тіло обмежене контурами Γ_1 та Γ_3 , що повністю лежать у півпросторі S_1 ($\Gamma_2 \in \emptyset$). Тоді, відповідно до інтегральної формули Коші (6), для цієї задачі співвідношення (13) та (14) набудуть вигляду

$$g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} q_t^{(1)}(z_t^{(1)}), \quad (36)$$

$$g_2'(z_t^{(2)}) = 0. \quad (37)$$

Співвідношення (36), (37) є аналогічними до відповідних для однорідного скінченного тіла без внутрішніх прошарків. Подібно можна довести сформульоване твердження і для співвідношень (20), (21) термомагнітоелектропружності. Те ж саме можна зробити і у випадку скінченного тіла, обмеженого контурами, що лежать в області S_2 . ♦

Можна також сформулювати твердження, що, якщо рівняння (26)–(29) суто формально розв'язати для внутрішніх точок замкнутих контурів, на берегах яких задано певні крайові умови, то отримаємо розв'язки для сукупності скінченних тіл відповідної до контуру форми з матеріалу, в якому міститься цей контур, та належними крайовими умовами.

Важливо, що незважаючи на свою позірну тривіальність в аналітичному плані, **твердження 1** створює можливість верифікації виведених складних для отримання та числового розв'язування інтегральних співвідношень складної задачі на основі їхнього повномасштабного використання до розв'язування набагато простіших задач для скінченних однорідних тіл. Зокрема, досліджуючи за допомогою запропонованих для біматеріального тіла рівнянь скінченне однорідне тіло, розміщене цілковито у площині S_1 або S_2 , можемо таким чином верифікувати ці рівняння на апробованих аналітичних розв'язках для скінченних однорідних тіл канонічної форми. Такий спосіб верифікації використано у розглянутому нижче **прикладі 1**.

4. Числові приклади. Отримані інтегральні рівняння (26)–(29) разом із моделлю термомагнітоелектропружного включення (31) було введено у схему модифікованого методу граничних елементів [9], що дало можливість розв'язувати конкретні плоскі задачі термомагнітоелектропружності.

Приклад 1. Для верифікації побудованих інтегральних рівнянь та застосованого для їхнього розв'язування числового методу розглянемо біматеріальне середовище з інтерфейсом високої теплопровідності та обмежимо у ньому контуром Γ квадратну область D ($W = H$), що повністю розміщена у півпросторі $y > 0$ (рис. 3). Напрямок обходу вибираємо так, щоб вектор нормалі \mathbf{n} до контуру був спрямований назовні квадратної області. Таким чином, сформулюємо задачу для однорідної скінченної квадратної області, яку, однак, будемо розв'язувати за допомогою інтегральних співвідношень, отриманих для біматеріальних тіл. На нижній межі $-W/2 \leq x \leq W/2$, $y = r$ області D вважатимемо, що температура дорівнює нулю (рис. 3). На верхній межі $-W/2 \leq x \leq W/2$, $y = r + H$ температуру задаємо величиною $\theta = \theta^0$. Бічні сторони $x = \pm W/2$, $r \leq y \leq r + H$ вважаємо теплоізолюваними.

Інтегральні рівняння розв'язуватимемо чисельно за допомогою модифікованої схеми методу граничних елементів [9]. Для дискретизації межі Γ тіла використаємо 40 однакових за розміром граничних елементів (по 10 елементів на кожній зі сторін квадрата).

Відповідно до сформульованого та доведеного **твердження 1** у розглянутій задачі введено до інтегральних рівнянь врахування наявності інтерфейсу високої теплопровідності не здійснюватиме впливу на розподіл температури у цьому скінченному тілі, оскільки відповідно до формулювання задачі тіло є однорідним. Значення температури у тілі обчислено з використанням квадратної сітки точок розміру 20×20 з кроком $0.05W$ як за ординатою, так і за абсцисою. Отриманий чисельно на підставі побудованих інтегральних рівнянь для біматеріалу розподіл температур у вузлах сітки із похибкою 0.05% відповідає аналітичному розв'язку цієї задачі $\theta = \theta^0(y-r)/W$. Це, очевидно, вказує на достовірність запропонованого підходу та опосередковано верифікує отримані вирази для ядер інтегральних рівнянь.

Нехай тепер область, яку обмежує контур Γ , повністю лежить у нижньому півпросторі $y < 0$. На Γ задано такі самі умови, як і в попередньому випадку. Напрямок обходу контуру, як і раніше, вибираємо так, щоб вектор нормалі \mathbf{n} був спрямований назовні. У цьому випадку отримуємо задачу, аналогічну до попередньої, для скінченного однорідного призматичного тіла, виготовленого з **матеріалу 2**. Для її розв'язування використовуємо отримані у роботі інтегральні рівняння (26)–(29) для біматеріалу. Інтегральні рівняння, як і в попередньому випадку, розв'язуватимемо чисельно за допомогою модифікованої схеми методу граничних елементів [9]. Отримані розв'язки є ідентичними до попередніх, чого і слід було очікувати. Це також верифікує отримані для нижнього півпростору ядра інтегральних рівнянь.

У випадку скінченного тіла з однорідного матеріалу очевидно, що врахований в отриманих інтегральних рівняннях вплив інтерфейсу високої теплопровідності не повинен чинити дії на розподіл температури. Для підтвердження цього виконано також обчислення для значень теплопровідності інтерфейсу $10^{-5} \leq \mu_0/\mu_0^* \leq 10^5$ у логарифмічному масштабі з кроком 0.01 . І знову ж числові результати узгоджуються зі сформульованим **твердженням 1**, що додатково верифікує отримані інтегральні формули та створені розрахункові програми.

Приклад 2. Розглянемо біматеріальне термомагнітоелектропружне призматичне тіло квадратного поперечного перерізу з інтерфейсом високої теплопровідності, що займає область $-W/2 \leq x \leq W/2$, $-H/2 \leq y \leq H/2$ (рис. 4). Верхня та нижня поверхні $y = \pm H/2$, а також бічні поверхні призми $x = \pm W/2$ теплоізоляовані ($h_n = 0$) і вважаються вільними від механічних, теплових і електромагнітних навантажень ($\tilde{t}_i = 0$). Тіло містить тонке прямолінійне абсолютно жорстке теплоізоляоване електро- та магнітопроникне стрічкове включення завширшки $2a$ і завтовшки $2h$, перпендикулярне до межі поділу. Крім цього, в тілі наявні джерело та стік тепла одна-

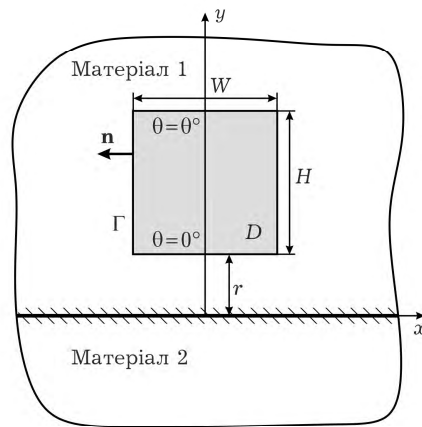


Рис. 3. Схема перерізу термопружного анізотропного біматеріального середовища з інтерфейсом високої теплопровідності.

кової інтенсивності q , розміщені антисиметрично на відстані $d = 0.5a$ до межі поділу матеріалів у різних складових тіла.

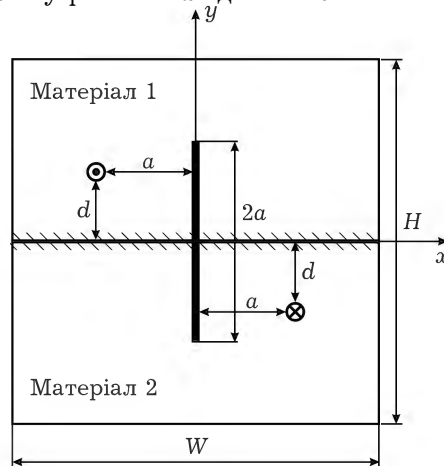


Рис. 4. Схема термопружного анізотропного біматеріального квадратного тіла, що містить тонке включення.

В обчисленнях приймаємо, що коефіцієнти лінійного температурного розширення матеріалу включення дорівнюють нулеві. Один край включення знаходиться у верхній ($y > 0$) частині тіла, а інший – у нижній ($y < 0$). Особливості полів напружень, електричних зміщень та магнітної індукції у місці перетину включення з межею матеріалів не враховувалися. Центр включення збігається з початком координат. Півтовщина включення $h = 0.01a$.

Попередні розрахунки виявили, що максимальних значень узагальнені коефіцієнти інтенсивності полів для фіксованих значень параметра теплопровідності інтерфейсу досягають у випадку абсолютно жорсткого включення, тому на графіках подаємо відповідні криві саме для цього випадку.

Розглянуто два варіанти матеріалів півпросторів:

- i) обидві складові виготовлено з титанату барію (**BaTiO₃**);
- ii) матеріал 1 – титанат барію (**BaTiO₃**), матеріал 2 – селенід кадмію (**CdSe**).

Характеристики вибраних матеріалів [5, 6] подаємо нижче.

Матеріал BaTiO₃:

пружні сталі [ГПа]: $C_{11} = C_{33} = 150$, $C_{22} = 146$, $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 66$,

$C_{44} = C_{66} = 44$, $C_{55} = 42$;

п'єзоелектричні коефіцієнти [Кл/м²]: $e_{21} = e_{23} = -4.35$, $e_{22} = 17.5$,

$e_{16} = e_{34} = 11.4$;

діелектричні сталі [нФ/м]: $\alpha_{11} = 9.86775$, $\alpha_{22} = 11.151$;

коефіцієнти теплопровідності [Вт/(м · К)]: $k_{11} = k_{22} = 2.5$;

коефіцієнти теплового розширення [К⁻¹]: $\alpha_{11} = 8.53 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_{22} = 1.99 \cdot 10^{-6}$;

піроелектричні сталі (ГВ/м·К): $\lambda = 13.3 \cdot 10^{-6}$.

Матеріал CdSe:

пружні сталі [ГПа]: $C_{11} = C_{33} = 74.1$, $C_{22} = 83.6$, $C_{12} = C_{23} = 39.3$,

$C_{13} = 45.2$, $C_{44} = C_{66} = 13.17$, $C_{55} = 14.45$;

п'єзоелектричні коефіцієнти [Кл/м²]: $e_{21} = e_{23} = -0.16$, $e_{22} = 0.347$,

$e_{16} = e_{34} = -0.138$;

діелектричні сталі [нФ/м]: $\epsilon_{11} = 0.0826$, $\epsilon_{22} = 0.0903$;
 коефіцієнти теплопровідності [Вт/(м·К)]: $k_{11} = 1$, $k_{22} = 2.5$;
 модулі теплового розширення (МПа/К): $\beta_{11} = \beta_{33} = 0.621$, $\beta_{22} = 0.551$;
 піроелектричні коефіцієнти [Кл/(м²·К)]: $\chi_2 = -2.94 \cdot 10^{-6}$.

Коли компоненти тіла виготовлені з однакових матеріалів, одержані залежності від параметра теплопровідності $\mu_0/\mu_0^* = 2h^{int}k_{22}^{int}/ak_{11}$ знерозмірених коефіцієнтів інтенсивності напружень у тілі зображено на рис. 5 (K_{12}^\pm/K_0) і рис. 6 (K_{22}^\pm/K_0). Узагальнені КІН нормовано величинами $K_0 = q\beta_{11}\sqrt{\pi a}/k_{11}$. Обчислення виконано для матеріалу **ВаТіО₃**.

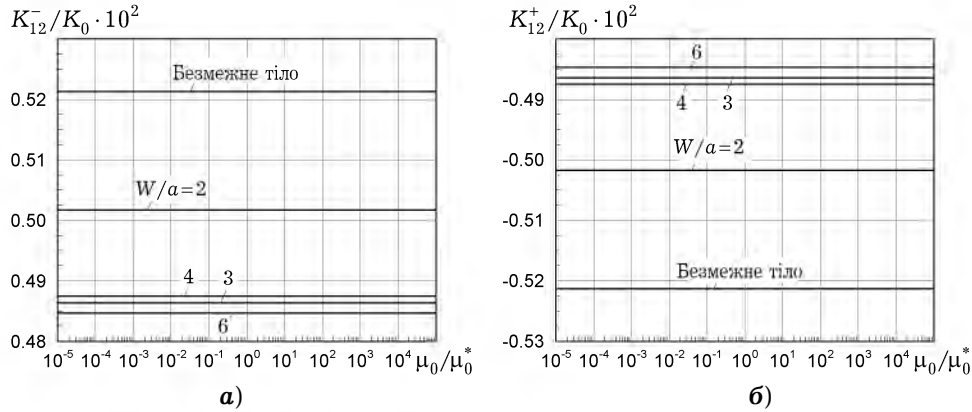


Рис. 5

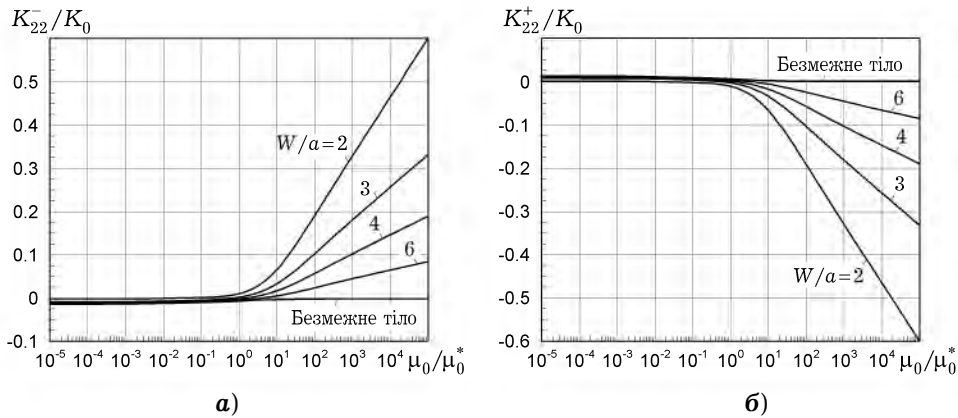


Рис. 6

Бачимо, що у цьому випадку, внаслідок геометричної та матеріальної симетрії задачі, значення КІН K_{12}^\pm/K_0 для різних значень знерозміреного параметра теплопровідності μ_0/μ_0^* є однаковими. Крім того, збільшення розмірів тіла практично не впливає на ці КІН.

Коли складові квадратної призми виготовлені з різних матеріалів, графіки залежностей знерозмірених узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень включення від параметра теплопровідності інтерфейсу μ_0/μ_0^* мають вигляд, зображений на рис. 7 (K_{12}^\pm/K_0) та рис. 8 (K_{22}^\pm/K_0).

На рис. 7 бачимо, що зі зменшенням розмірів тіла, порівняно із розміром неоднорідності W/a , відношення K_{12}^\pm/K_0 монотонно зростає. Причому зі збільшенням μ_0/μ_0^* приріст стає щораз істотнішим. Це пояснюється зрос-

танням впливу взаємодії торців включення із межами тіла. Оскільки кінці включення розміщені у різних матеріалах, то значення КІН на них істотно відрізняються, однак їхня зміна відбувається у подібний спосіб. Усі коефіцієнти K_{12}^{\pm}/K_0 спочатку монотонно зростають, виходячи на горизонтальні асимптоти.

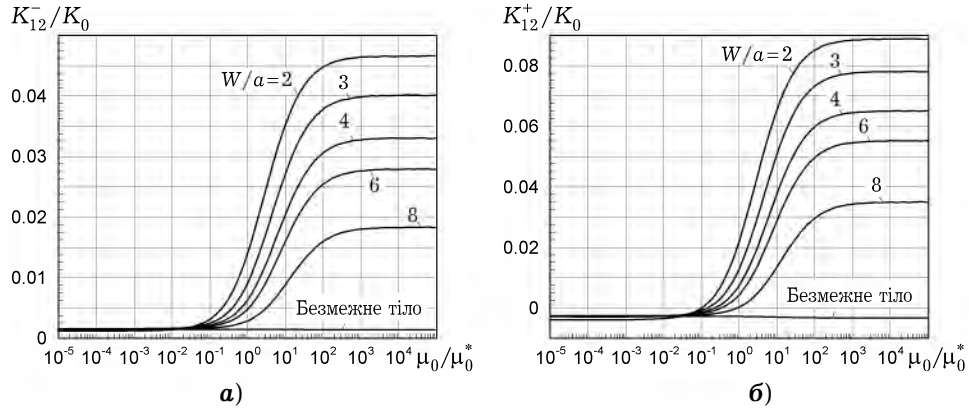


Рис. 7



Рис. 8

За вибраного способу навантаження (як видно з графіків на рис. 8) якісний вплив параметрів W/a і μ_0/μ_0^* на значення відношення K_{22}^{\pm}/K_0 є подібним і також монотонним. Однак для цих безрозмірних КІН це стосується абсолютних значень K_{22}^{\pm}/K_0 , і зростання при $\mu_0 \rightarrow \infty$ є логарифмічним (границя відсутня). Таке явище виникає внаслідок того, що тіло є теплоізованим і містить всередині джерело і стік тепла по різні сторони від проміжного шару.

Зі збільшенням розмірів тіла значення КІН K_{12}^{\pm}/K_0 та K_{22}^{\pm}/K_0 зменшуються, повільно наближаючись до значень, властивих для безмежного тіла з включенням (рис. 7, рис. 8).

Приклад 3. Розглянемо біматеріальне термоелектромагнітопружне призматичне тіло квадратного поперечного перерізу з інтерфейсом високої теплопровідності, яке містить включення, вісь якого нахилена під кутом φ до інтерфейсу (рис. 9). Джерело та стік тепла однакової інтенсивності q розміщені в тілі антисиметрично на відстані d до межі поділу у різних складових.

Компоненти тіла виготовлені з різних матеріалів (**BaTiO₃** та **CdSe**). Крайові умови є такими, як і в **прикладі 2**. Включення вважаємо електро-

провідним (поперечна і поздовжня діелектричні проникності $\epsilon_{22} = 10^{10}$, $\epsilon_{11} = 10^{10}$ [нФ/м]) та абсолютно жорстким (значення відносної жорсткості $k = 10^{10}$). Значення $W/a = 5$ є сталим.

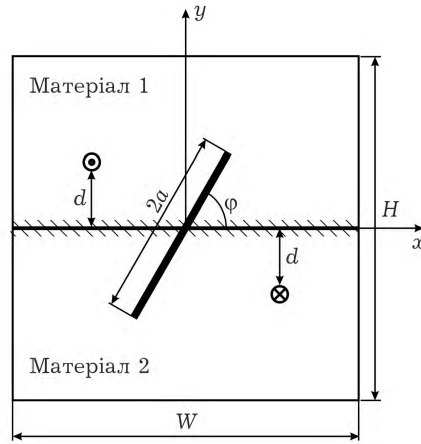


Рис. 9. Схема термопружного анізотропного біматеріального призматичного тіла, що містить включення, нахилене під кутом φ до інтерфейсу.

На рис. 10 – рис. 12 подано графіки залежностей коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень у вершинах включення від параметра теплопровідності інтерфейсу μ_0/μ_0^* для значень кута $\varphi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 120^\circ$. Штриховими лініями позначено графіки для значень $\varphi > 90^\circ$.

Оскільки у цій задачі включення вважаємо електропровідним та абсолютно жорстким, то графіки на рис. 10 побудовано лише для коефіцієнтів K_{42}^\pm/K_0 при значенні $K_{41}/K_0 = 0$. Як бачимо, вплив інтерфейсу на значення коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень може бути ще більшим. Крім цього, кут нахилу осі включення до інтерфейсу теж істотно впливає на величини відповідних коефіцієнтів інтенсивності інших фізичних полів. Унаслідок того, що тіло виготовлене з різних матеріалів, значення коефіцієнтів на різних вершинах включення ще більше відрізняються порівняно з випадком однорідної матриці.

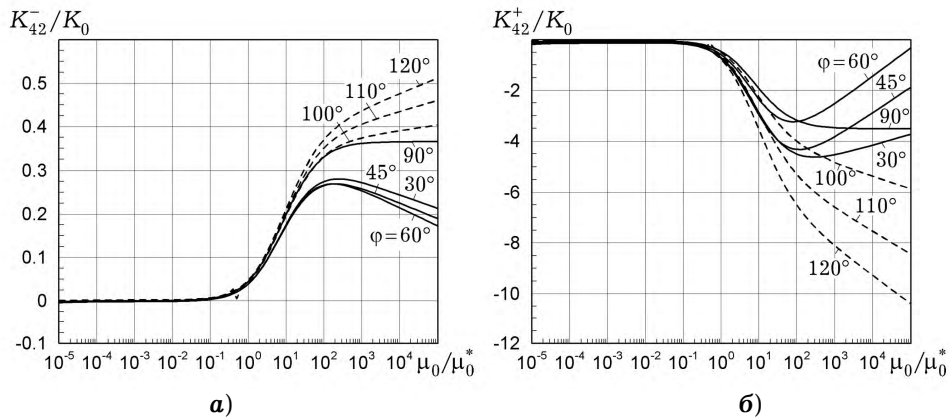


Рис. 10

На рис. 10 бачимо, що, коли вісь включення перпендикулярна до інтерфейсу, $\varphi = 90^\circ$, характер зміни коефіцієнтів K_{42}/K_0 у різних вершинах включення є подібним: спочатку їхні абсолютні значення монотонно зростають, виходячи на горизонтальну асимптоту.

Якщо включення є податливим (значення відносної жорсткості $k = 10^{-10}$) та електропровідним (поперечна і поздовжня діелектричні проникності $\epsilon_{22} = 10^{10}$, $\epsilon_{11} = 10^{10}$ [нФ/м]), то залежності знерозмірених коефіцієнтів інтенсивності електричних зміщень K_{41}^{\pm}/K_0 та K_{42}^{\pm}/K_0 від параметра μ_0/μ_0^* для значень $\varphi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 120^\circ$ наведено на рис. 11 та рис. 12 відповідно).

Коефіцієнти K_{42}^{\pm}/K_0 (рис. 12) появляються внаслідок взаємодії полів деформації та електричних напруженостей.

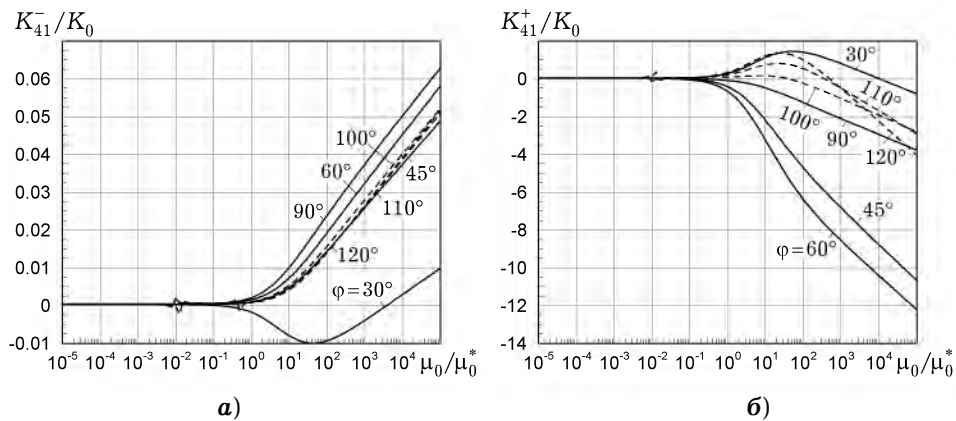


Рис. 11

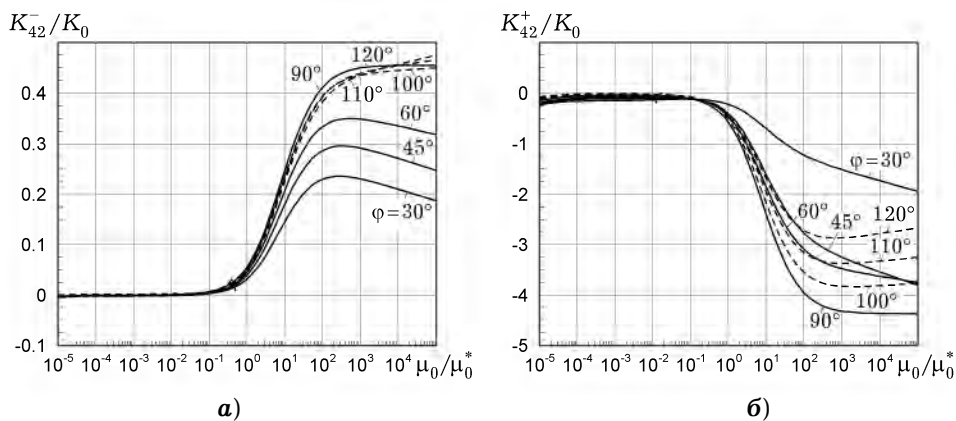


Рис. 12

Щодо коефіцієнтів K_{42}^{\pm}/K_0 (рис. 12) можна відмітити таку закономірність: зі збільшенням кута φ значення коефіцієнтів інтенсивності також збільшуються за абсолютною величиною.

Як впливає з отриманих результатів, вплив електричних параметрів на значення узагальнених коефіцієнтів напруження є значним. Саме тому важливо при побудові розв'язків враховувати значення електричних параметрів включення.

Висновки. Розроблено математичну модель термомагнітоелектропружного біматеріального тіла з інтерфейсом високої теплопровідності та ідеальним магнітоелектромеханічним контактом складових, що, в свою чергу, можуть містити тонкі деформаційні включення. У замкненій формі побудовано граничні інтегральні рівняння сформульованої задачі, тобто рівняння, у яких немає потреби додатково враховувати інтеграли уздовж інтерфейсу, а розбивати на елементи треба лише межу складеного тіла і серединну лінію

тонкого включення. Використання одержаних інтегральних рівнянь у поєднанні з методом граничних елементів дало можливість розв'язати декілька нових задач для біматеріалів, що складаються з однакових та різних анізотропних матеріалів, а також містять тонкі деформівні стрічкові включення. Побудовано графіки залежності узагальнених КІН від знерозміреного параметра зведеної теплопровідності інтерфейсу μ_0/μ_0^* . Отримані результати засвідчують, що інтерфейс високої теплопровідності істотно впливає на поля напружень у вершинах тонких включень. Сформульовано та доведено твердження, яке обґрунтовує новий підхід до простої та ефективної верифікації побудованих інтегральних рівнянь і застосованих до їхнього розв'язування методів.

Усе це є підставою стверджувати, що розроблений метод дає можливість розв'язувати із високою точністю задачі термомагнітоелектропружності для біматеріальних тіл з інтерфейсом високої теплопровідності та додатковими тонкими стрічковими деформівними включеннями чи тріщинами, що не вдавалося зробити до цього часу застосуванням традиційних числових підходів.

1. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – Санкт-Петербург: Наука, 1999. – 382 с.
Те саме: *Linkov A. M.* Boundary integral equations in elasticity theory. – Dordrecht: Springer, 2002. –xiv+274 p. – <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9914-6>.
2. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
3. *Сулъм Г. Т.* Основи математичної теорії термopружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. *Benveniste Y.* A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interface between two anisotropic media // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2006. – **54**, No. 4. – P. 708–734. – <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.009>.
5. *Berlincourt D., Jaffe H., Shiozawa L. R.* Electroelastic properties of the sulfides, selenides, and tellurides of zinc and cadmium // *Phys. Rev.* – 1963. – **129**, No. 3. – P. 1009–1017. – <https://doi.org/10.1103/PhysRev.129.1009>.
6. *Dunn M. L.* Micromechanics of coupled electroelastic composites: Effective thermal expansion and pyroelectric coefficients // *J. Appl. Phys.* – 1993. – **73**, No. 10. – P. 5131–5140. – <https://doi.org/10.1063/1.353787>.
7. *Hwu C.* Anisotropic elastic plates. – London: Springer, 2010. – xvi+673 p. – <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5915-7>.
8. *Kaessmair S., Javili A., Steinmann P.* Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces // *Arch. Appl. Mech.* – 2014. – **84**, No. 9-11. – P. 1409–1426. – <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0870-x>.
9. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2013. – **37**, No. 2. – P. 419–433. – <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.11.002>.
10. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* 2D boundary element analysis of defective thermoelectroelastic bimaterial with thermally imperfect but mechanically and electrically perfect interface // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2015. – **61**. – P. 194–206. – <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.07.012>.
11. *Qin Q. H.* Green's function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p. 266?
12. *Quang H. L., Phan T. L., Bonnet G.* Effective thermal conductivity of periodic composites with highly conducting imperfect interfaces // *Int. J. Therm. Sci.* – 2011. – **50**, No. 8. – P. 1428–1444. – <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2011.03.009>.
13. *Sulym H., Pasternak Ia., Tomashivskyy M.* Boundary integral equations for an anisotropic bimaterial with thermally imperfect interface and internal inhomogeneities // *Acta Mech. et Automatica (Sciendo)*. – 2016. – **10**, No. 1. – P. 66–74. – <https://doi.org/10.1515/ama-2016-0012>.
14. *Ting T. C. T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford Univ. Press, 1996. – 567 p.

15. Wang X., Pan E. Thermal Green's functions in plane anisotropic bimetals with spring-type and Kapitza-type imperfect interface // *Acta Mech.* – 2010. – **209**, No. 1-2. – P. 115–128. – <https://doi.org/10.1007/s00707-009-0146-7>.
16. Yvonnet J., He Q. C., Zhu Q. Z., Shao J. F. A general and efficient computational procedure for modelling the Kapitza thermal resistance based on XFEM // *Computat. Mater. Sci.* – 2011. – **50**, No. 4. – P. 1220–1224. – <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.02.040>.

THERMOMAGNETOELECTROELASTICITY OF FINITE BIMATERIAL BODIES IN THE PRESENCE OF A BONDING INTERLAYER OF HIGH THERMAL CONDUCTIVITY AND INTERNAL THIN INHOMOGENEITIES

A method for solving plane problems of thermomagnetoelasticity for finite bimaterial bodies bonded through a thin bonding layer (interface) of high thermal conductivity with thin inclusions sensitive to the influence of physical and mechanical fields is proposed. On the basis of the extended Stroh formalism and the theory of functions of a complex variable, integral equations of the Somigliana type are constructed, for solving which a modified boundary element method is used. A method of verifying integral equations and the used computational scheme for their solution is proposed. The calculation and analysis of the solutions of a number of problems for finite bodies with inclusions that can interact with each other is carried out.

Key words: *anisotropic bimaterial, Stroh's formalism, Somigliana-type equation, thermomagnetoelasticity, interlayer of high thermal conductivity, thin inclusion.*

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
² Волин. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк,
³ Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів

Одержано
01.03.23