

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ЗА ВРАХУВАННЯ СИЛИ ТЕРТЯ ТА ЗНОШУВАННЯ

Побудовано чисельний алгоритм розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності про втискання штамп у півпростір за зношування, зумовленого дією сил тертя. Контактну задачу сформульовано у вигляді інтегральних рівнянь-нерівностей Сінґіоріні, які з використанням квадратурних формул для сингулярних інтегралів трансформовано до системи лінійних алгебричних рівнянь-нерівностей. Розв'язування цієї системи зведено до знаходження мінімуму квадратичної форми за лінійних обмежень на невідомі контактні напруження. Процес зношування досліджено методом кроків за часовою координатою, на кожному з яких область контакту і розподіл напружень у ній визначається чисельно. З використанням розробленого алгоритму розглянуто також осесиметричну задачу про взаємодію пружного півпростору зі штампом, що має локальні нерівності.

Ключові слова: контактні напруження, зношування, сили тертя, штамп, метод інтегральних рівнянь, квадратичне програмування.

Вступ. Елементи конструкцій, деталей машин та турбін часто взаємодіють по областях, які є рухомими. В областях контакту, як правило, виникають високі контактні нормальні напруження, отже, тут можуть зароджуватись тріщини. Контактна взаємодія жорстких штампів і пружних тіл, у тому числі з додатковим урахуванням сил тертя, достатньо повно вивчена [1–3, 9, 13, 17].

За наявності сил тертя тут додатково відбувається процес зношування. Найбільше дослідженими є одновимірні задачі про зношування поверхонь контакту [6, 12]. Вивчення зношування у тонкостінних елементах конструкцій проведено у [6–8, 10].

Дво- та тривимірні контактні задачі за врахування зношування є достатньо складними в математичному відношенні і тому залишаються маловивченими в літературі. Такі контактні задачі, як правило, розглядають при фіксованих областях контакту. Плоскі контактні задачі для штампів різної форми за врахування зношування розглядалися в [4, 6, 7, 14]. Розв'язок контактної задачі для півпростору, що перебуває під дією кругового штамп, який обертається, у такій постановці побудовано в [1]. Зазначимо, що такий розв'язок є ефективним для штампів з плоскою основою. У випадку дії штамп з гладкою основою задача про зношування ускладнюється, оскільки область контакту є наперед невідомою, зокрема, на початковому етапі взаємодії. У процесі зношування змінюються область контакту та форми штамп і основи, що значно ускладнює розв'язування задачі.

За дії на тіло штампів гладкої форми область контакту є наперед невідомою і визначається при розв'язуванні задачі. При розгляді штампів складної форми область контакту може складатися з декількох наперед невідомих ділянок. Такі задачі в літературі вивчені значно менше, оскільки вони належать до істотно нелінійних. Для розв'язування задач зі складними областями контакту застосовано варіаційний метод у [3]. У роботі [14] з використанням варіаційного методу тривимірну контактну задачу для півпростору зведено до розв'язування задачі квадратичного програмування, оптимізацію алгоритму якої запропоновано в [13]. У роботі [4] плоскі контактні задачі з наперед незаданими ділянками контакту, в тому числі з урахуванням тертя, зведено до задачі квадратичного програмування підходом, у якому не використовуються варіаційні методи.

✉ solyarolya@gmail.com

При розгляді тривимірних контактних задач для штампів складної форми у загальному випадку необхідно виконувати великий обсяг обчислень. У той же час на практиці широко використовують штампи, які мають форму тіл обертання. Визначення контактної тиску для таких випадків штампів можна істотно спростити, оскільки тоді задача легко зводиться до розв'язування одновимірних інтегральних рівнянь.

У цій роботі розроблено алгоритм розв'язування осесиметричної задачі про взаємодію пружного півпростору зі штампами складної форми. Ділянки контакту і розподіл тисків на них визначаються на основі підходу Сінборіні і зводяться до задачі квадратичного програмування [4]. На основі цього алгоритму досліджено процес зношування для штампів різної форми з урахуванням сил тертя. Задачу розв'язуємо покроково за часом, на кожному з етапів послідовно визначаємо змінену форму основи штампа та контактні напруження під ним.

1. Постановка задачі та основні співвідношення. Розглянемо контактну задачу, коли в пружний півпростір втискається жорсткий штамп, обмежений *поверхнею обертання*, причому взаємодія штампа з пружним тілом відбувається з тертям. На штамп, який перебуває на пружному півпросторі, діє сила P , напрямлена вздовж осі обертання. Крім цього, він обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Між жорстким штампом і пружним півпростором діють сили тертя, направлені в напрямку, протилежному до обертання, тобто є перпендикулярними до радіуса області контакту, яка в перерізі має форму круга. В результаті дії сили тертя під штампом відбувається зношування, яке залежить від контактних напружень [1].

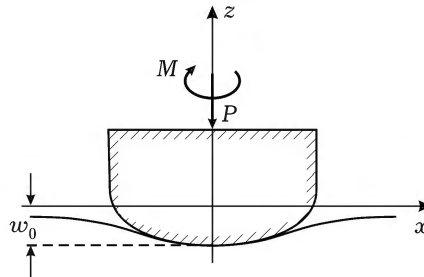


Рис. 1

Приймаємо, що рівняння основи штампа до втискання має вигляд

$$z = g_0(r), \quad \text{причому} \quad g_0(0) = 0.$$

Вважаємо, що штамп в процесі зношування (штамп втискається на однакові відстані) втиснутий на фіксовану величину (вертикальне зміщення штампа) w_0 ($w_0 < 0$).

Приймаємо, що сила тертя дорівнює добутку нормального тиску на коефіцієнт тертя. Тоді на площинці контакту маємо

$$\tau_{z\theta} = \mu \sigma_z,$$

де σ_z – нормальне напруження, μ – коефіцієнт тертя.

Точки на штампі, що розміщені на відстані r , рухаються зі швидкістю $v = \omega r$.

Зазначимо, що зношуватись можуть штамп, основа або і штамп, і основа одночасно (залежно від механічних характеристик матеріалів). Наведені нижче співвідношення справджуються для всіх цих випадків. Надалі для визначеності приймаємо, що зношується штамп.

Швидкість зношування штампа будемо визначати таким чином [1]:

$$\left| \frac{\partial g(r, t)}{\partial t} \right| = \lambda \omega r |\tau_{z\theta}| = \lambda \omega r \mu p(r, t), \quad \tau_{z\theta} = \mu p,$$

де λ – коефіцієнт пропорційності між величиною роботи сил тертя і кількістю видаленого матеріалу.

Звідси отримаємо, що за час Δt форма штампа зміниться на величину [1]

$$\Delta g = \lambda \omega \mu \Delta t p r = \lambda \omega \mu \Delta t q.$$

Тут $q = p r$. Коефіцієнт λ можна визначити експериментально.

Введемо безрозмірну часову змінну

$$\tau = \lambda E \omega \mu t, \quad \text{часову координату}$$

де E – модуль Юнга матеріалу півпростору.

Тоді

$$\Delta g = \Delta \tau q / E.$$

Таким чином, в процесі зношування форма штампа змінюється і має вигляд $z = g(r, \tau)$, причому $g(r, 0) = g_0(r)$. Будемо розглядати випадок, коли область контакту наперед не є відома і підлягає визначенню в процесі розв'язування контактної задачі.

Приймемо, що штамп заглиблений на фіксовану величину w_0 . Для визначення напружено-деформованого стану маємо граничні умови на площинці контакту, яка займає область S , при $z = 0$:

$$w = g(r, \tau) + w_0, \quad \tau_{z\theta} = \mu p, \quad \tau_{pz} = 0.$$

Поза областю S (на вільній від навантаження поверхні півпростору) маємо

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{z\theta} = 0, \quad \tau_{pz} = 0.$$

Рівняння для визначення контактних напружень в процесі зношування має вигляд [2]

$$\int_{a_0}^{b_0} \sigma_z(\rho) \rho F(r, \rho) d\rho = W(r), \quad \text{при } \sigma_z \leq 0, \quad a_0 < r < b_0, \quad (1)$$

де $[a_0, b_0]$ – область контакту, яка змінюється у процесі зношування,

$$W(r) = \frac{\pi}{1 - \nu^2} E [w_0 + g(r, \tau)], \quad F(r, \rho) = \frac{4}{r + \rho} K \left(4 \frac{r\rho}{(r + \rho)^2} \right),$$

ν – коефіцієнт Пуассона, $K(x)$ – еліптичний інтеграл першого роду [11]

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - x \sin^2 \theta]^{1/2}}, \quad 0 \leq x < 1.$$

У сформульованій задачі області взаємодії наперед не задані. Для таких задач умови контакту можна записати у вигляді альтернативних рівнянь-нерівностей Сінйоріні при $a < r < b$ [16]:

$$\begin{aligned} \int_a^b q(\rho) F(r, \rho) d\rho &= -W(r) \quad \text{при } q > 0, \\ \int_a^b q(\rho) F(r, \rho) d\rho &\geq -W(r) \quad \text{при } q = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$q(\rho) = \rho p(\rho), \quad p(\rho) = -\sigma_z(\rho).$$

Тут a, b – наперед невідомі величини, причому область $[a, b]$ має вміщувати область контакту. Перша з умов (2) справджується тільки в області

контакту. Друга умова вказує, що межа півпростору після навантаження знаходиться нижче від штампа або дотикається до нього.

Розв'язування рівнянь-нерівностей будемо проводити чисельно. Для цього побудуємо квадратурну формулу для обчислення інтеграла

$$\int_a^b q(\rho)F(r, \rho) d\rho. \quad (3)$$

Неперервну функцію q на проміжку $a < \rho < b$ опишемо лінійними кусково-неперервними інтерполяційними функціями, які подамо як

$$q(\rho) = \sum_{n=0}^N q_n S_h(\rho - r_n), \quad (4)$$

$$\text{де } S_h(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{h}, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h, \end{cases} \quad q_n = q(r_n), \quad r_0 = a, \quad r_{j+1} = r_j + h, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

$N+1$ – кількість вузлових точок, $h = \frac{b-a}{N}$ – крок розбиття.

Тоді для інтеграла (3) отримуємо

$$\int_a^b q(\rho)F(r, \rho) d\rho = \sum_{m=0}^N C_m(r)q_m, \quad n = 0, \dots, N,$$

де

$$C_m(r) = \int_{r_m-h}^{r_m+h} S_h(t - r_m)F(r, t) dt. \quad (5)$$

Інтеграли $C_m(r)$ знаходимо стандартними процедурами, які розроблені в математичних системах, у яких враховано наявність інтегровних особливостей у підінтегральних функціях (підінтегральна функція $F(r, \rho)$ має логарифмічну особливість при $r \rightarrow \rho$). Замінивши в системі рівнянь-нерівностей (2) інтеграли квадратурними формулами (5) [5, 15], отримуємо алгебричну систему рівнянь-нерівностей

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N A_{nm}q_m &= -W_n, & \text{якщо } p_n &\geq 0, \\ \sum_{m=0}^N A_{nm}q_m &< -W_n, & \text{якщо } p_n &= 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$q_n = r_n p(r_n), \quad W_n = W(r_n), \quad A_{nm} = C_m(r_n).$$

Контактний тиск визначаємо з умови мінімуму величини

$$J = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N A_{nm}q_m q_n + \sum_{n=0}^N W_n q_n. \quad (7)$$

при виконанні рівнянь-нерівностей вигляду

$$\sum_{m=0}^N A_{nm}q_m < -W_n, \quad q_n \geq 0, \quad n = 0, \dots, N. \quad (8)$$

Сформульована задача є задачею квадратичного програмування. Величина J при обмеженнях (8) є додатною величиною, яка на розв'язку рівнянь-нерівностей (6) дорівнює нулеві.

Розв'язок контактної задачі зі зношуванням знаходимо за зміною часової координати. Для цього введемо в розгляд моменти часу

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_k = \tau_{k-1} + \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де Δ_k – вибрані малі прирости часової координати.

Тоді форму штампа в наступний момент часу знаходимо за формулою

$$g(\tau_k, r) = g(\tau_{k-1}, r) + \Delta_k q(\tau_{k-1}, r), \quad k = 1, 2, \dots$$

У початковий момент часу форма штампа описується вихідною функцією $z = g_0(r)$, і тиск в цей момент часу відповідає цій формі.

2. Результати розрахунків.

2.1. Гладкий штамп. Розглянемо штамп з основою $g_0(r) = D(r/s)^m$. Тут s , m – параметри, які дозволяють описувати різні форми штампів. Параметр s дозволяє регулювати розміри області контакту. При $m = 2$ штамп є параболічним. При великих значеннях параметра m отримується близький до плоского штамп при $0 < r < s$ [4]. Між штампом і пружним півпростором діють сили тертя. В результаті дії сил тертя під штампом відбувається зношування, яке залежить від контактних напружень.

З використанням розробленого алгоритму визначено та досліджено контактні напруження та зношування поверхні штампа.

Обчислення виконано при заглибленні штампа $w_0 = -0.0002$ м, $s = 0.1$ м, $D = 1$ м, $m = 8$, $\nu = 0.3$ та однакових приростах часової координати $\Delta_k = \delta$. Інтегральне рівняння розв'язували, вибираючи 250 вузлових точок.

На рис. 2 наведено розподіл відносного контактного тиску p/E для значень у моменти часу $\tau = 0.005, 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ (криві 1–6). Обчислено також змінену форму штампа внаслідок зношування після втискування $z = f$.

На рис. 3 наведено величину w , пропорційну формі штампа $w = cf$, $c = \frac{\pi}{1 - \nu^2}$, у моменти часу $\tau = 0.0025, 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ (криві 1–6), що ілюструє зміну форми штампа в процесі зношування. Для чисельного розв'язування контактної задачі запропонованим методом прогнозовані межі області контакту поклали рівними $a = 0.0$ м, $b = 0.035$ м.

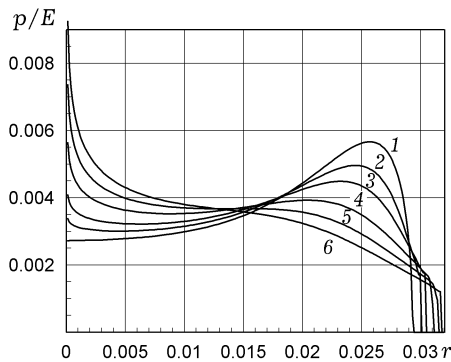


Рис. 2. Розподіл контактного тиску у моменти часу $\tau = 0.0, 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2$ (криві 1–6).

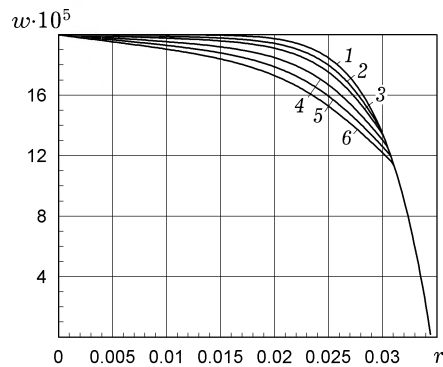


Рис. 3. Зміна форми штампа у моменти часу $\tau = 0.0025, 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ (криві 1–6).

Аналогічні розрахунки виконано при більшому зміщенні штампа $w_0 = -0.00035$ м. На рис. 4а наведено розподіл відносного контактного тиску p/E на початку процесу зношування $\tau = 0.005, 0.1, 0.2, 0.3$ (криві 1–4, відповідно). На рис. 4б наведено розподіл відносного контактного тиску p/E для «великих» значень часу $\tau = 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 2.5$ (криві 1–6, відповідно).

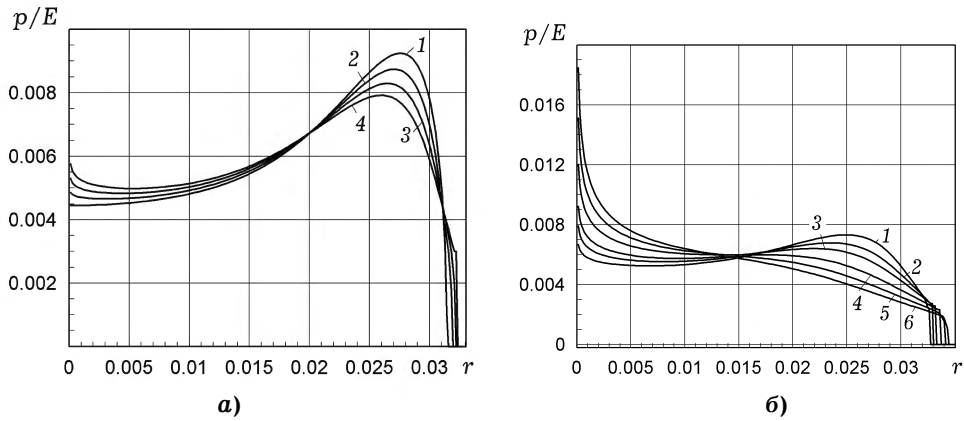


Рис. 4. Розподіл контактних тиску у моменти часу: **а)** – $\tau = 0.005, 0.1, 0.2, 0.3$ (криві 1–4); **б)** – $\tau = 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 2.5$ (криві 1–6).

Із аналізу рис. 2, рис. 4 випливає, що в процесі зношування контактний тиск зростає в околі центру штампів і водночас зменшується тиск біля його межі.

Ці дані узгоджуються із висновком Галіна [1] про те, що в процесі зношування в центрі штампів дотичні напруження дорівнюють нулеві, а тому зношування тут відсутнє. В області, що розміщена між центром штампів і його межею ($0.005 < r < 0.025$), контактний тиск практично не змінюється. У розглянутих випадках область контакту дещо зростає при зношуванні.

2.2. Оцінка точності розробленого алгоритму. Процес зношування при заглибленні штампів $w_0 = -0.0002$ м, $s = 0.1$ м, $m = 8$, $\nu = 0.3$ досліджували при однакових приростах часової координати $\Delta_k = \delta = 0.005$. Спочатку інтегральне рівняння розв'язували при виборі $N = 150$ вузлових точок. Розподіл відносного контактного тиску p/E для різних значень часу $\tau = 0.005, 0.1, 0.2, 0.3$ (криві 1–4, відповідно) наведено на рис. 5а.

Далі, з метою оцінки точності отриманого числового розв'язку, інтегральне рівняння контактної задачі розв'язували зі збільшеною кількістю вузлових точок – при $N = 250$. Відносний контактний тиск для цього випадку наведено на рис. 5а кривими з кружечками. Як бачимо, криві практично накладаються. Звідси випливає, що розроблений алгоритм дозволяє з високою точністю знаходити контактний тиск при відносно невеликій кількості вузлових точок $N = 150$.

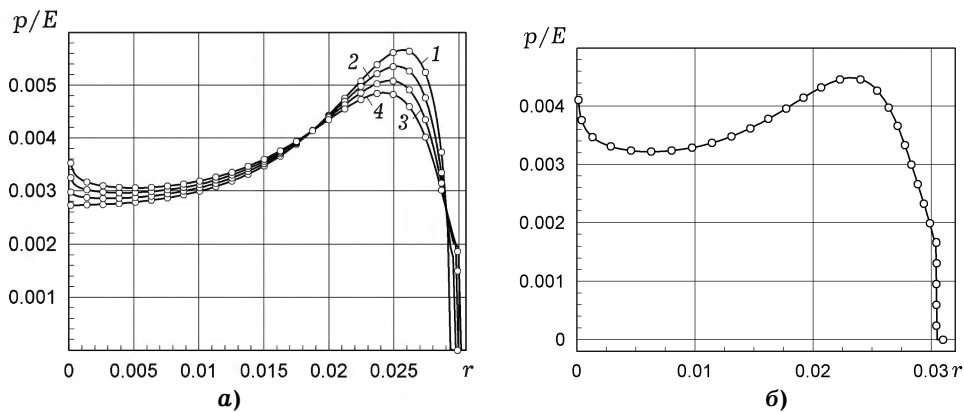


Рис. 5. Розподіл контактного тиску при $N = 150$ та $N = 250$: **а)** – у моменти часу $\tau = 0.005, 0.1, 0.2, 0.3$ (криві 1–4); **б)** – при $\delta = 0.005$ і $\delta = 0.0025$.

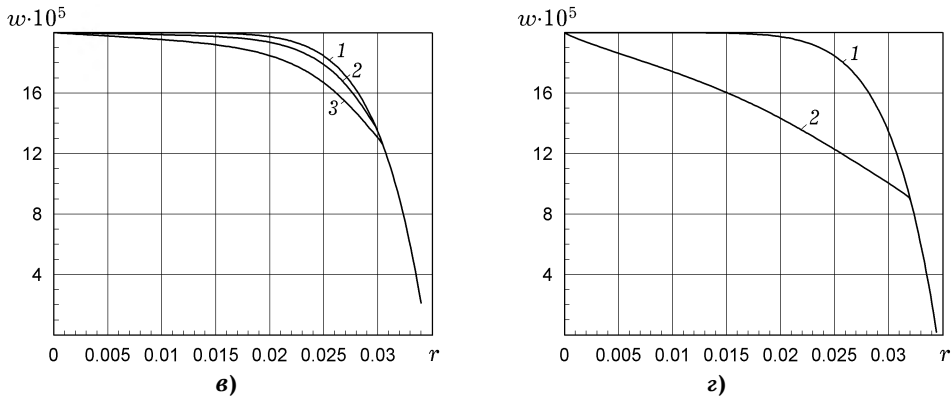


Рис. 5. Зміна форми штамп: **а)** – у моменти часу $\tau = 0.005, 0.15, 0.5$ (криві 1–3);
б) – у моменти часу $\tau = 0.005, 2.5$ (криві 1, 2).

Для оцінки точності застосованого покрокового методу проведено обчислення відносного контактного тиску при різних значеннях кроку за часом: при $\delta = 0.005$ і $\delta = 0.0025$. Результати обчислень наведено на рис. 5б суцільною кривою і кривою з кружечками, відповідно. Як бачимо, криві практично накладаються, що вказує про високу точність застосованого покрокового методу.

На рис. 5в наведено величину, пропорційну до форми w штамп, на початку процесу зношування $\tau = 0.005$ (крива 1) та при $\tau = 0.15$ і $\tau = 0.5$ (криві 2, 3). На рис. 5г наведено зміну форми штамп у моменти часу $\tau = 0.005$ і $\tau = 2.5$ (криві 1, 2).

2.3. Штамп з локальним виступом. Розглянемо також штамп з гладкою основою, форма якої на ділянці малих розмірів має виступи. Форму такого штамп запишемо у вигляді

$$g(r) = g_0(r) + f(r),$$

де $g_0(r)$ – форма штамп з гладкою основою (визначеною вище) і

$$f(r) = -d \cos^2\left(0.5\pi \frac{r-r_0}{h}\right) \quad \text{при} \quad r_0 - h < r < r_0 + h,$$

$2h$ – ширина області з виступом, [м], r_0 – центр цієї області, d – висота виступу, [м].

На рис. 6–рис. 9 наведено розподіл відносного контактного тиску p/E за різних значень часової координати τ та різних значень розміщення центру виступу r_0 .

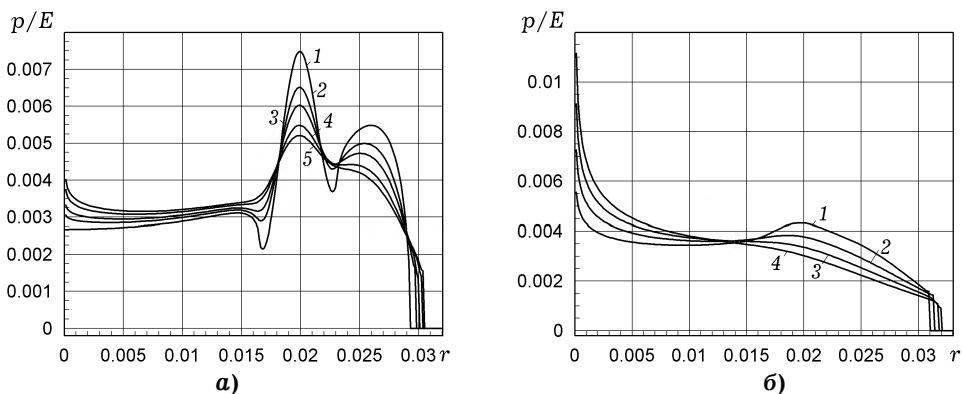


Рис. 6. Розподіл контактний тиску: **а)** – у моменти часу $\tau = 0.005, 0.15, 0.25, 0.4, 0.5$ (криві 1–5); **б)** – у моменти часу $\tau = 1, 1.5, 2, 2.5$ (криві 1–4).

На рис. 6а кривими 1–5 наведено розподіли контактної тиску у початкові моменти процесу зношування $\tau = 0.005, 0.15, 0.25, 0.4, 0.5$ при заглибленні штампа $w_0 = -0.0002$ м, $d = w_0/20$ м, $h = 0.0033$ м та при розміщенні центру виступу $r_0 = 0.0198$ м. На рис. 6б кривими 1–4 наведено аналогічні дані у моменти часу завершення процесу зношування $\tau = 1, 1.5, 2, 2.5$.

На рис. 7 суцільними кривими 1–3 наведено розподіл контактної тиску у моменти часу $\tau = 0.5, 1.0, 2.5$ для гладкого штампа, а штриховими кривими 1'–3' – аналогічні дані для штампа з виступом. Як бачимо на рис. 7, при «великих» часах криві для штампа з виступом і для гладкого штампа практично накладаються (рис. 7, криві 3 і 3' і крива з кружечками).

Обчислену зміну форми штампа внаслідок зношування після його втискування у моменти часу $\tau = 0.0025, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25$ наведено на рис. 8 (криві 1–6, відповідно).

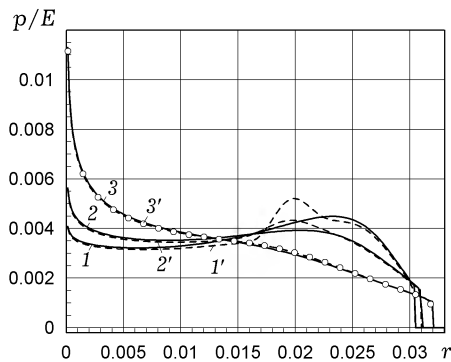


Рис. 7. Розподіл контактної тиску у моменти часу $\tau = 0.5, 1, 2.5$ (криві 1–3).

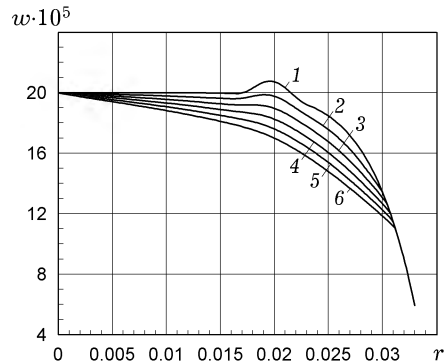


Рис. 8. Зміна форми штампа у моменти часу $\tau = 0.0025, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25$ (криві 1–6).

На рис. 6–рис. 8 бачимо, що для гладких штампів і штампів з виступами контактні напруження при достатньо «великих» значеннях часу зношування стають близькими. Тобто локальні нерівності вносять значний вплив на контактний тиск тільки в початкові моменти зношування і практично не впливають на напруження при тривалому процесі зношування.

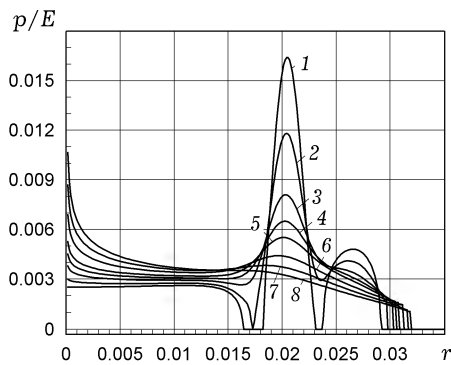


Рис. 9. Розподіл контактної тиску у моменти часу $\tau = 0.005, 0.2, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ (криві 1–8).

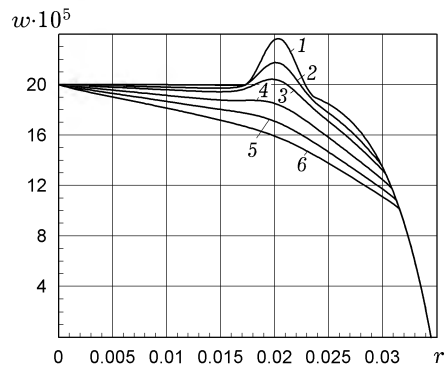


Рис. 10. Зміна форми штампа у моменти часу $\tau = 0.005, 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2$ (криві 1–6).

Розглянуто також виступи більших розмірів: $d = w_0/5$ м. На рис. 9 наведено розподіл контактних напружень у моменти часу $\tau = 0.005, 0.2, 0.5$,

0.75, 1, 1.5, 2, 2.5 (криві 1–8). Обчислення виконано при $h = 0.0033$ м, заглибленні штампа $w_0 = -0.0002$ м і розміщенні центра виступу в $r_0 = 0.022$ м.

Розраховану зміну форми штампа внаслідок зношування після втискування у моменти часу $\tau = 0.005, 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2$ (криві 1–6) наведено на рис. 10.

На рис. 11 криві 1–8 відповідають розподілу контактних напружень у моменти часу $\tau = 0.005, 0.1, 0.3, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ при $d = w_0/5$ м, заглибленні штампа $w_0 = -0.0002$, $h = 0.0033$ м і розміщенні центра виступу в $r_0 = 0.007$ м.

Як бачимо, в області виступу збільшених розмірів виникають ділянки відставання.

На рис. 12 наведено зміну форми штампа в процесі зношування у ці самі моменти часу (криві 1–8), відповідно, для тих самих параметрів форми штампа, що й на рис. 11.

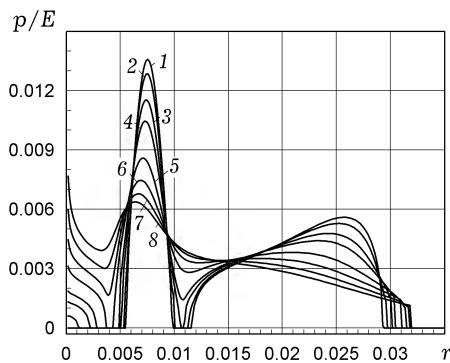


Рис. 11. Розподіл контактної тиску у моменти часу $\tau = 0.005, 0.2, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2, 2.5$ (криві 1–8).

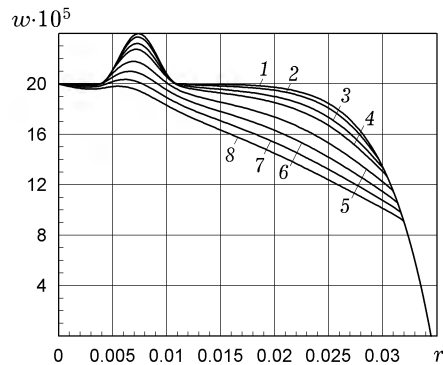


Рис. 12. Зміна форми штампа у моменти часу $\tau = 0.005, 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2$ (криві 1–8).

Як бачимо на рис. 9–рис. 12, біля виступів збільшених розмірів виникають ділянки відставання, а в їхніх центрах істотно зростають контактні напруження. При «великих» значеннях часу зношування контактний тиск за величиною є близьким до випадків гладкої форми штампа (без виступів).

Оцінимо точність отриманих результатів за допомогою побудованого алгоритму. З цією метою виконаємо обчислення контактних напружень для штампа з виступом, розміщеним у центрі $r_0 = 0.0019$ м при заглибленні штампа $w_0 = -0.0002$ м у момент часу $\tau = 0.5$ та при різній кількості вузлових точок, які вводились при числовому розв'язуванні інтегральних рівнянь. Обчислений відносний контактний тиск при $N = 150$ зображено на рис. 13 а (гладка крива). Розрахований контактний тиск при збільшеній кількості точок $N = 250$ зображено на цьому самому рисунку кривою з кружечками. Бачимо, що криві практично збігаються.

Наведені числові дані у табл. 1 додатково підтверджують, що знайдений вище контактний тиск при виборі $N = 150$ є практично точними.

Також досліджено точність застосованого покрокового методу розрахунку напружень при зношуванні. Для цього проведено розрахунки контактної тиску з різними кроками за часом. Обчислений відносний контактний тиск при кроці $\delta = 0.005$ зображено на рис. 13 б гладкою кривою. Аналогічні розрахунки при зменшеному вдвічі кроці $\delta = 0.0025$ зображено кривою з кружечками. Тобто і використаний покроковий метод дослідження процесу зношування за часом дозволяє проводити розрахунки з контрольованою точністю.

Наведені числові дані у табл. 2 додатково підтверджують високу точність виконаних в роботі досліджень.

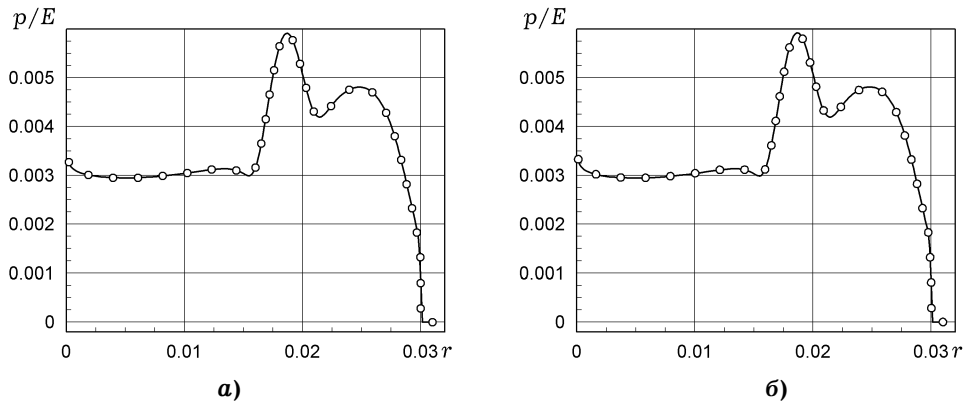


Рис 13. Розподіл контактного тиску: **а)** – у момент часу $\tau = 0.5$ при $N = 150$ та $N = 250$; **б)** – у момент часу $\tau = 0.5$ при $\delta = 0.005$ і $\delta = 0.0025$.

У табл. 1 подано розподіл залежності від радіальної координати r контактного тиску у момент часу $\tau = 0.5$ при різній кількості точок розбиття: $N = 150$ і $N = 250$.

Таблиця 1

r	p/E	
	$N = 150$	$N = 250$
0.0012400	0.0030488	0.0030487
0.0031000	0.0029658	0.0029660
0.0055800	0.0029496	0.0029497
0.0074400	0.0029725	0.0029726
0.0117800	0.0031022	0.0031023
0.0161200	0.0032491	0.0032493
0.0210800	0.0042522	0.0042518
0.0241800	0.0047789	0.0047792
0.0272800	0.0041623	0.0041633
0.0310000	0.0000000	0.0000000

У табл. 2 наведено розподіл залежності від радіальної координати r контактного тиску у момент часу $\tau = 0.5$ при різних кроках розбиття: $\delta = 0.005$ і $\delta = 0.0025$.

Таблиця 2

r	p/E	
	$\delta = 0.005$	$\delta = 0.0025$
0.0001240	0.0033229	0.0033300
0.0011160	0.0030558	0.0030598
0.0035960	0.0029546	0.0029571
0.0065720	0.0029569	0.0029588
0.0112840	0.0030839	0.0030853
0.0179800	0.0056040	0.0055981
0.0219480	0.0042772	0.0042771
0.0259160	0.0047058	0.0046994
0.0298840	0.0014960	0.0014868
0.0310000	0.0000000	0.0000000

Із аналізу результатів розрахунків випливає, що похибка обчислень не перевищує 0.6%, що свідчить про достатньо високу точність чисельного розв'язування інтегрального рівняння та застосованого покрокового методу до розв'язування розглядуваного класу задач.

Висновки. Досліджено контактну осесиметричну задачу для півпростору зі штампом. Між штампом і пружним півпростором діють сили тертя. Внаслідок дії сил тертя відбувається зношування основи штампа, яке залежить від контактних напружень. Задачу про зношування основи штампа розв'язано покроковим за часом методом. На кожному кроці розв'язуємо контактну задачу зі зміненою формою штампа. Цю задачу зводимо до розв'язування інтегральних рівнянь-нерівностей Сінборні, які з використанням квадратурних формул для інтегралів, що мають особливості, трансформуюмо до системи лінійних алгебричних рівнянь-нерівностей. Розв'язування цієї системи зводимо до знаходження мінімуму квадратичної форми за лінійних обмежень на невідомі контактні напруження. Показано, що побудований чисельний алгоритм, який базується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь-нерівностей та квадратичного програмування, є ефективним і дає змогу розв'язувати осесиметричні контактні задачі для півпростору з урахуванням сил тертя і зношування для штампів різної форми.

З використанням розробленого алгоритму досліджено осесиметричну задачу про зношування пружного півпростору за дії штампа з локальними нерівностями. Встановлено, що внаслідок зношення локальних нерівностей контактні напруження розподіляються, як у гладкому штампі. Зазначимо також, що в усіх розглянутих випадках, для яких проводились розрахунки, форма основи штампа в його центральній частині після зношування (при достатньо великих часах) виявилася конусоподібною.

Отримані результати можуть бути використані також у випадках, коли розподіл контактних напружень під штампамі нерівномірний і виникають області з високими напруженнями. Одним із способів оптимізації форми основи штампа може бути коригування форми шляхом їх попереднього обертання навколо осі. В роботі показано, що за рахунок зношування контактні напруження можуть бути істотно зменшені при оптимальному виборі параметрів форм штампа.

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
Te same: Johnson K. L. Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – xii+452 p.
3. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. – Москва: Моск. гос. акад. приборостроения и автоматики, 1997. – 338 с.
4. Максимович В. М., Коцюба А. Ю., Лавренчук С. В. Плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми. – Луцьк: Луцьк. нац. техн. ун-т, 2012. – 97 с.
Te same: Maksymovych O. V., Solyar T. Ya. Method of mechanical quadratures for solving integral equations of thermoelasticity for plates with heat exchange // J. Math. Sci. – 2011. – 174, No. 3. – P. 387–399.
5. Максимович О. В., Соляр Т. Я. Метод механічних квадратур для розв'язування інтегральних рівнянь термопружності для пластинок з тепловіддачею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 207–215.
Te same: Maksymovych O. V., Solyar T. Ya. Method of mechanical quadratures for solving integral equations of thermoelasticity for plates with heat exchange // J. Math. Sci. – 2011. – 174, No. 3. – P. 387–399.
6. Максимук О. В. Зношування анізотропних пластин з урахуванням зміни їх товщини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 4. – С. 117–119.
7. Максимук О. В. Математична модель зношування анізотропних пластин гарячим штампом // Проблеми трибології. – 1997. – Вип. 5. – С. 53–60.
8. Максимук О. В. Особливості контактної взаємодії і зношування тонкостінних елементів конструкцій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – 63, № 1. – С. 133–148.
Te same: Maksymuk O. V. Specific features of the contact interaction and wear

- of thin-walled structural elements // J. Math. Sci. – 2023. – **270**, No. 1. – P. 157–175. – <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06338-9>.
9. *Острик В. І.* Контактна механіка: Підруч. – Київ: ВПЦ «Київ. ун-т», 2015. – 560 с.
 10. *Сачук Ю. В., Максимук О. В.* Контактна задача про зношування штампами канонічної форми пружної півплощини з покриттям Вінклера // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 4. – С. 136–140.
Te same: *Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V.* Contact problem of wear of the elastic half plane with Winkler's coating caused by punches of canonical shapes // *J. Math. Sci.* – 2018. – **228**, No. 2. – P. 173–179.
 11. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
 12. *Kahya V., Birinci A., Erdol R.* Frictionless contact problem between two orthotropic elastic layers // *Int. J. Civil & Environment. Eng.* – 2007. – **1**, No. 1. – P. 7–13. – <https://publications.waset.org/2756/pdf>.
 13. *Kalker J. J.* Contact mechanical algorithms // *Commun. Appl. Numer. Meth.* – 1988. – **4**, No. 1. – P. 25–32. – <https://doi.org/10.1002/cnm.1630040105>.
 14. *Kalker J. J.* Variational principles of contact elastostatics // *IMA J. Appl. Math.* – 1977. – **20**, No. 2. – P. 199–219. – <https://doi.org/10.1093/imamat/20.2.199>.
 15. *Maksymovych O., Solyar T.* Determination of non-axisymmetric stresses in the bodies of revolution based on regularized integral equations // *Eur. J. Mech. A Solids.* – 2021. – **87**. – Art. 104218. – <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104218>.
 16. *Signorini A.* Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata // *Rendiconti di Matematica e delle Sue Applicazioni. Ser. V.* – 1959. – **18**, No. 1-2. – P. 95–139.
 17. *Soldatenkov I. A.* The periodic contact problem of the plane theory of elasticity. Taking friction, wear and adhesion into account // *J. Appl. Math. Mech.* – 2013. – **77**, No. 2. – P. 245–255.

AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM WITH REGARD FOR FRICTION AND WEAR

A numerical algorithm for solving the axisymmetric problem of the theory of elasticity on the pressing a stamp into a half-space due to wear caused by the action of frictional forces is presented. The contact problem is formulated in the form of Signorini's integral equations-inequalities, which, using quadrature formulas for singular integrals, are transformed into a system of linear algebraic equations-inequalities. Solving the system is reduced to finding the minimum of the quadratic form under linear constraints on the unknown contact stresses. The wear process is investigated by the method of steps along the time coordinate, in which the contact area and the stress distribution in it are found numerically. Using the developed algorithm, the axisymmetric problem of the interaction of an elastic half-space with a stamp having local irregularities is also considered.

Keywords: contact stresses, wear, frictional forces, stamp, method of integral equations, quadratic programming.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.12.22