

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ПЕРІОДИЧНОГО ШТАМПА ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ ІЗ ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ

Досліджено періодичні контактні задачі для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі та виступів – штампів довільної форми. Задачі зведено до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма першого роду та визначено його аналітичний розв'язок. Проведено числовий аналіз отриманого контактного тиску, переміщення штампів як жорсткого тіла, прогину пружного шару та впливу його товщини, періодичності штампів і їхньої форми на розрахункові величини.

Ключові слова: періодичні контактні задачі, інтегральні рівняння Фредгольма, контактний тиск, зміщення штампів, фактична область контакту.

Вступ. Проблема взаємовпливу мікровиступів, величина фактичної та номінальної областей контакту під час фрикційної взаємодії шоретких поверхонь є головною при розрахунках надійності роботи фрикційних вузлів машин і механізмів [2, 5, 6]. Контактну задачу про взаємодію системи періодичних штампів із пружною основою, яка описується математичною моделлю з двома коефіцієнтами постелі, для виступів параболічної форми розв'язано в [3]. Однак для інших форм виступів, наприклад циліндричної, еліптичної, косинусоїдної тощо, запропонований у роботі [3] метод «не працює» (див. [4]).

У цій статті знайдено аналітичний розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма [6], що дало змогу отримати інженерні формули для різних форм штампів – виступів і провести числовий аналіз залежності контактного тиску, переміщень у пружній основі, величини області контакту від параметрів задачі.

1. Постановка задачі. Розглянемо плоску задачу про контактну взаємодію штампів періодичної структури з довільною формою виступів

$f(x)$: крива **1** – $f(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$, крива **2** – $f(x) = A \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell}\right)$,

крива **3** – $f(x) = \frac{x^2}{2R}$ (див. рис. 1).

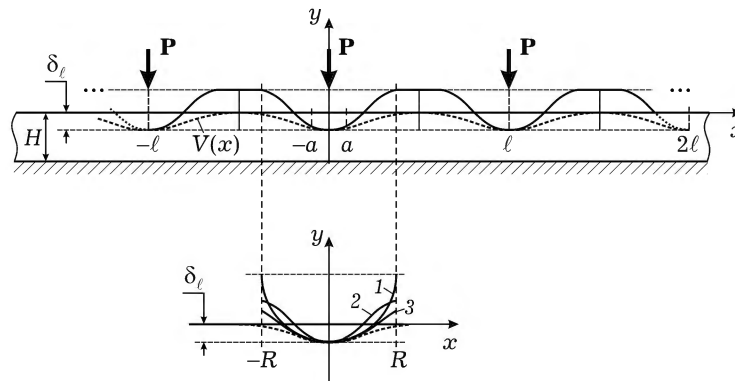


Рис. 1

На рис. 1 зображено взаємодію штампів періодичної будови з виступами різної форми $f(x)$. Тут позначено $V(x)$ – прогин поверхні шару, ℓ – період, δ_ℓ – зміщення штампів як жорсткого тіла, $-a \leq x \leq a$ – невідома область контакту, H – товщина пружного шару. На рис. 1 також показано

✉ ov.maksymuk@gmail.com

різні форми виступів: криві **1–3** відповідають циліндричній, косинусоїдній [1], параболічній формам виступів [3]. Для коректного порівняння результатів всі виступи вибрано з умови, що їхня кривина у точці дотику до поверхні пружного шару дорівнює $1/R$. Зміну кривини у початковій точці дотику для еліптичної та гіперболічної форм врахуємо, прийнявши для осей кривих другого порядку $a_1 = R$, $b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$ [4], і відповідно для еліпса і гіперболи отримаємо такі форми виступів: $f(x) = (1 \pm \varepsilon)(R - \sqrt{R^2 - x^2})$ і $f(x) = (1 \pm \varepsilon)(-R + \sqrt{R^2 + x^2})$. З тих самих міркувань для косинусоїдного виступу вибираємо $A = \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R}$.

Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду для визначення контактної тиску $p(x)$ під кожним виступом має такий вигляд [3]:

$$\delta_\ell - f(x) = C \int_{-a}^a p(\xi) \mathcal{K}_\ell(x, \xi) d\xi, \quad |x| \leq a, \quad (1)$$

де ядро

$$\mathcal{K}_\ell(x, \xi) = \frac{e^{-\alpha\ell} e^{\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha|x-\xi|}}{1 - e^{-\alpha\ell}}. \quad (2)$$

Тут $C = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{3(1-\nu)}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{6}{1-\nu}}$, ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга.

Легко пересвідчитися, що ядро (2) відповідає умові Фредгольма [6].

Переміщення поверхні пружного шару знаходимо за формулами [3]:

$$V(x) = \begin{cases} C \int_{-a}^a p(\xi) \frac{e^{-\alpha\ell} e^{-\alpha(x-\xi)} + e^{\alpha(x-\xi)}}{1 - e^{-\alpha\ell}} d\xi, & x < -a, \\ C \int_{-a}^a p(\xi) \frac{e^{-\alpha\ell} e^{\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha|x-\xi|}}{1 - e^{-\alpha\ell}} d\xi, & |x| \leq a, \\ C \int_{-a}^a p(\xi) \frac{e^{-\alpha\ell} e^{\alpha(x-\xi)} + e^{-\alpha(x-\xi)}}{1 - e^{-\alpha\ell}} d\xi, & x > a, \end{cases} \quad (3)$$

Область контакту $[-a, a]$ визначаємо з умови рівноваги штамп:

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx.$$

У статті [3] методом підстановки знайдено аналітичний розв'язок рівняння (1), однак для штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної та гіперболічної) цей підхід «не працює». У цій роботі знайдемо розв'язок для довільної правої частини рівняння (1).

2. Розв'язування інтегрального рівняння. Для визначення розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з довільною правою частиною ($f(x)$ – профілі виступів – штампів) двічі продиференціюємо рівняння (1) за змінною x . Для цього спочатку запишемо інтегральне рівняння (1) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \delta_\ell - f(x) &= C \int_{-a}^a p(\xi) \frac{e^{-\alpha\ell} e^{\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha|x-\xi|}}{1 - e^{-\alpha\ell}} d\xi = \\ &= C \left(\int_{-a}^x p(\xi) \frac{e^{-\alpha\ell} e^{\alpha(x-\xi)} + e^{-\alpha(x-\xi)}}{1 - e^{-\alpha\ell}} d\xi + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_x^a p(\xi) \frac{e^{-\alpha \ell} e^{\alpha(x-\xi)} + e^{-\alpha(x-\xi)}}{1 - e^{-\alpha \ell}} d\xi \Bigg).$$

Після диференціювання отримаємо

$$\begin{aligned} -\frac{f'(x)}{\alpha C} &= \int_{-a}^x p(\xi) \frac{e^{-\alpha \ell} e^{\alpha(x-\xi)} - e^{-\alpha(x-\xi)}}{1 - e^{-\alpha \ell}} d\xi + \\ &+ \int_x^a p(\xi) \frac{-e^{-\alpha \ell} e^{\alpha(x-\xi)} + e^{-\alpha(x-\xi)}}{1 - e^{-\alpha \ell}} d\xi, \\ -\frac{f''(x)}{\alpha C} &= -2p(x) + \alpha \int_{-a}^a p(\xi) \frac{e^{-\alpha \ell} e^{\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha|x-\xi|}}{1 - e^{-\alpha \ell}} d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставивши вирази (4) в інтегральне рівняння (1), знайдемо контактний тиск $p(x)$:

$$p(x) = \frac{\alpha}{2C} \left(\delta_\ell - f(x) + \frac{1}{\alpha^2} f''(x) \right). \quad (5)$$

Зміщення штамп δ_ℓ визначаємо з умови неперервності прогину поверхні пружного шару з урахуванням формули (3):

$$V(x)|_{x \leq a, x=a} = V(x)|_{x > a, x=a},$$

тобто

$$\delta_\ell - f(x)|_{x=a} = V(x)|_{x=a} = C \int_{-a}^a p(\xi) \mathcal{K}_\ell(x - \xi) d\xi |_{x=a}.$$

З огляду на формулу (3) для визначення прогину $V(x)$ за умови $x > a$ маємо

$$\begin{aligned} V(x) &= C \int_{-a}^a p(\xi) \mathcal{K}_\ell(x - \xi) d\xi = \\ &= \frac{C}{1 - e^{-\alpha \ell}} \left(e^{-\alpha x} \int_{-a}^a p(\xi) e^{\alpha \xi} d\xi + e^{\alpha x} e^{-\alpha \ell} \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha \xi} d\xi \right). \end{aligned}$$

Підставимо в отриману формулу контактний тиск (5) та обчислимо інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a p(\xi) e^{\alpha \xi} d\xi &= \frac{\alpha}{2C} \int_{-a}^a \left(\delta_\ell - f(\xi) + \frac{1}{\alpha^2} f''(\xi) \right) e^{\alpha \xi} d\xi = \\ &= \frac{\alpha}{2C} \left(\frac{\delta_\ell}{\alpha} (e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) - \int_{-a}^a f(\xi) e^{\alpha \xi} d\xi + \frac{1}{\alpha^2} \left(e^{\alpha a} f'(a) - \right. \right. \\ &\left. \left. - e^{-\alpha a} f'(-a) - \alpha (e^{\alpha a} f(a) - e^{-\alpha a} f(-a)) \right) + \alpha^2 \int_{-a}^a f(\xi) e^{\alpha \xi} d\xi \right). \end{aligned}$$

Тут використано співвідношення

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f''(\xi) e^{\alpha \xi} d\xi &= e^{\alpha a} f'(a) - e^{-\alpha a} f'(-a) - \\ &- \alpha (e^{\alpha a} f(a) - e^{-\alpha a} f(-a)) + \alpha^2 \int_{-a}^a f(\xi) e^{\alpha \xi} d\xi. \end{aligned}$$

З огляду на умову парності $f(x) = f(-x)$, матимемо:

$$\int_{-a}^a p(\xi)e^{\alpha\xi} d\xi = \frac{\alpha}{2C} \left(e^{\alpha a} \left(\frac{\delta_\ell}{\alpha} + \frac{f'(a)}{\alpha^2} + \frac{f(a)}{\alpha} \right) + e^{-\alpha a} \left(-\frac{\delta_\ell}{\alpha} + \frac{f'(a)}{\alpha^2} + \frac{f(a)}{\alpha} \right) \right).$$

Аналогічну процедуру здійснюємо для інтеграла $\int_{-a}^a p(\xi)e^{-\alpha\xi} d\xi$.

Отже, при $x > a$ для прогину отримуємо

$$V(x) = \frac{f'(a)}{\alpha} \frac{e^{-\alpha x} + e^{\alpha x} e^{-\alpha \ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha \ell}},$$

а для зміщення штамп

$$\delta_\ell = f(a) + \frac{f'(a)}{\alpha} \psi(a, \ell), \quad \text{де} \quad \psi(a, \ell) = \frac{e^{-\alpha a} + e^{\alpha a} e^{-\alpha \ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha \ell}}.$$

Нескладно впевнитися, що при $\ell \rightarrow \infty$ отримуємо результат, коли діє один штамп довільної форми $f(x)$ [4].

Враховуючи рівність (5) і парність функції $f(x)$, отримуємо формулу для прогину поверхні шару ($y = 0$):

$$V(x) = \begin{cases} \frac{f'(a)}{\alpha^2} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} e^{-\alpha \ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha \ell}}, & x < -a, \\ f(a) + \frac{f'(a)}{\alpha} \psi(a, \ell) - f(x), & |x| \leq a, \\ \frac{f'(a)}{\alpha^2} \frac{e^{-\alpha x} + e^{\alpha x} e^{-\alpha \ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha \ell}}, & x > a. \end{cases}$$

На підставі отриманих загальних формул знайдемо формули для зміщення δ_ℓ , контактного тиску $p(x)$, сили P і прогину $V(x)$ поверхні основи ($y = 0$) для штамп конкретного профілю. Розглянемо циліндричну, гіперболічну і косинусоїдну форми виступів:

1°) *циліндрична форма виступу* $f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$:

$$\delta_\ell = R - \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} \psi(a, \ell),$$

$$p(x) = \frac{\alpha}{2C} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} \psi(a, \ell) + \frac{1}{\alpha^2} \frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} \right),$$

$$P = \frac{\alpha}{2C} \left(-a\sqrt{R^2 - a^2} + \left(a^2 \psi(a, \ell) + \frac{a}{\alpha} \right) \frac{2}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} + R^2 \arcsin \frac{a}{R} \right),$$

$$V(x) = \begin{cases} \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} e^{-\alpha \ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha \ell}}, & x < -a, \\ \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} \psi(a, \ell), & |x| \leq a, \\ \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} \frac{e^{-\alpha x} + e^{\alpha x} e^{-\alpha \ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha \ell}}, & x > a. \end{cases}$$

2°) гіперболічна форма виступу $f(x) = (1 \pm \varepsilon)(-R + \sqrt{R^2 + x^2})$:

$$\delta_\ell = (1 \pm \varepsilon) \left(-R + \sqrt{R^2 + a^2} + \frac{a}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \psi(a, \ell) \right),$$

$$p(x) = \frac{\alpha}{2C} (1 \pm \varepsilon) \left(\sqrt{R^2 + a^2} - \sqrt{R^2 + x^2} + \frac{a}{\alpha} \frac{\psi(a, \ell)}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \right),$$

$$P = \frac{\alpha}{2C} (1 \pm \varepsilon) \left(a\sqrt{R^2 + a^2} + \frac{2a}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + a\psi(a, \ell) \right) \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{R^2}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{R^2 + a^2} + a}{\sqrt{R^2 + a^2} - a} \right| \right),$$

$$V(x) = \begin{cases} (1 \pm \varepsilon) \frac{a}{\alpha\sqrt{R^2 + a^2}} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} e^{-\alpha\ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha\ell}}, & x < -a, \\ (1 \pm \varepsilon) \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{a}{\alpha\sqrt{R^2 - a^2}} \psi(a, \ell) \right), & |x| \leq a, \\ (1 \pm \varepsilon) \frac{a}{\alpha\sqrt{R^2 + a^2}} \frac{e^{-\alpha x} + e^{\alpha x} e^{-\alpha\ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha\ell}}, & x > a. \end{cases}$$

Якщо у цих формулах покласти $\ell \rightarrow \infty$, то отримаємо результати для неперіодичної задачі [4].

3°) косинусоїдна форма виступу $f(x) = A \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\ell} \right)$, $A = \left(\frac{\ell}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{R}$:

$$\delta_\ell = A + A \left(\frac{2\pi}{\alpha\ell} \psi(a, \ell) \sin \frac{2\pi a}{\ell} - \cos \frac{2\pi a}{\ell} \right),$$

$$p(x) = \frac{\alpha A}{2C} \left(\left(1 + \left(\frac{2\pi}{\alpha\ell} \right)^2 \right) \cos \frac{2\pi x}{\ell} - \cos \frac{2\pi a}{\ell} + \frac{2\pi}{\alpha\ell} \psi(a, \ell) \sin \frac{2\pi a}{\ell} \right),$$

$$P = \frac{\alpha A}{2C} \left(\left[\frac{\ell}{\pi} \left(1 + \left(\frac{2\pi}{\alpha\ell} \right)^2 \right) + \frac{4\pi a}{\alpha\ell} \psi(a, \ell) \right] \sin \frac{2\pi a}{\ell} - 2a \cos \frac{2\pi a}{\ell} \right),$$

$$V(x) = \begin{cases} \frac{2\pi a}{\alpha\ell} \sin \frac{2\pi a}{\ell} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} e^{-\alpha\ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha\ell}}, & x < -a, \\ A \left(\frac{2\pi}{\alpha\ell} \sin \frac{2\pi a}{\ell} \cdot \psi(a, \ell) + \cos \frac{2\pi x}{\ell} - \cos \frac{2\pi a}{\ell} \right), & |x| \leq a, \\ \frac{2\pi a}{\alpha\ell} \sin \frac{2\pi a}{\ell} \frac{e^{-\alpha x} + e^{\alpha x} e^{-\alpha\ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha\ell}}, & x > a. \end{cases}$$

3. Числові розрахунки. Для числового аналізу отриманих результатів переходимо до безрозмірних величин за формулами: $\bar{x} = \frac{x}{R}$, $\bar{\ell} = \frac{\ell}{R}$, $\bar{a} = \frac{a}{R}$,

$\bar{P} = \frac{P}{ER}$, $\bar{p}(x) = \frac{p(x)}{E}$, $\bar{\delta}_\ell = \frac{\delta_\ell}{R}$, $\bar{H} = \frac{H}{R}$, $\bar{V}(\bar{x}) = \frac{V(x)}{R}$, $\bar{\alpha} = \alpha R$. Надалі риси над літерами опускаємо. Всі обчислення проведено для $\nu = 0.3$.

На рис. 2 подано розподіли контактних тисків $p(x)$ для контактної взаємодії штампів параболічної (крива 1), циліндричної (крива 2), гіперболічної (крива 3) форм із пружною основою з двома коефіцієнтами постелі за таких значень параметрів: $H = 0.6$, $a = 0.1$, $\ell = 1.4$.

На рис. 3 зображено графіки залежності зміщення $\delta_\ell(a)$ від півширини області контакту для штампів параболічної (крива 1), циліндричної (крива 2), гіперболічної (крива 3) та косинусоїдної (крива 4) форм за тих самих значень параметрів: $H = 0.6$, $\ell = 1.4$.

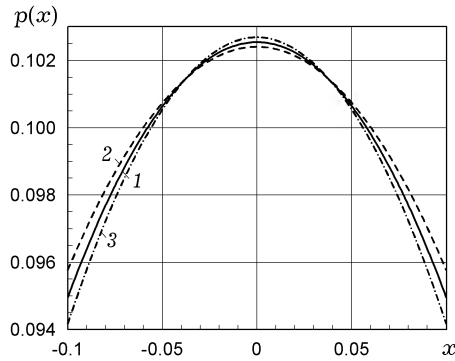


Рис. 2

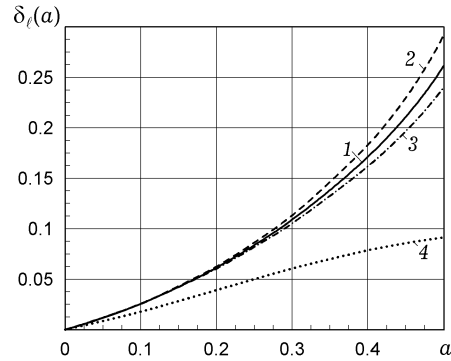


Рис. 3

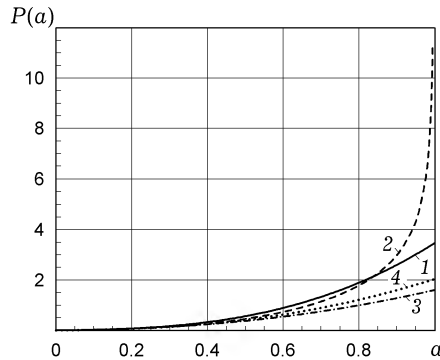


Рис. 4

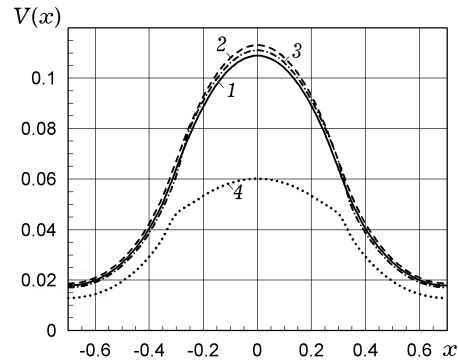


Рис. 5

Рис. 4 ілюструє залежність сили P від півширини області контакту для штампів параболічної (крива 1), циліндричної (крива 2), гіперболічної (крива 3) та косинусоїдної (крива 4) форм із пружною основою з двома коефіцієнтами постелі, коли $H = 0.5$, $\ell = 6$. Важливо відмітити, що для штампів скінченної форми (зокрема, циліндричної та еліптичної) існує асимптота залежності сили притискування від області контакту.

На рис. 5 наведено графіки залежності прогину $V(x)$ поверхні пружного шару для контактної взаємодії періодичної системи штампів параболічної (крива 1), циліндричної (крива 2), гіперболічної (крива 3) та косинусоїдної (крива 4) форм з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі, якщо $H = 0.6$, $a = 0.3$, $\ell = 1.4$.

На рис. 6 подано графіки залежності прогину $V(x)$ поверхні пружного шару при контактній взаємодії штампа циліндричної форми з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі за фіксованої півширини

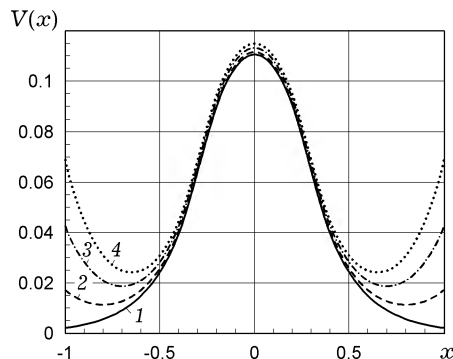


Рис. 6

ни області контакту $a = 0.3$ ($H = 0.6$) для різних значень величини періоду ℓ . Крива **1** відповідає одному штампі, а криві **2, 3, 4** – періодичній системі циліндричних штампів для значень періодів $\ell = 1.6, 1.4, 1.3$ відповідно.

Висновки. Структура реальних поверхонь зазвичай є нерегулярною. Однак, наприклад, поверхні, оброблені токарним або прокатним способом, мають уже регулярну структуру і в першому наближенні їх можна моделювати одновимірною шорсткістю [6]. У роботі вибрано плоску періодичну модель шорсткості поверхні з жорсткими виступами довільної форми. При цьому висота виступів є значно меншою від періоду, що відповідає умові пружної роботи в контакті. Модель пружної основи – шар із двома коефіцієнтами постелі [3]. У роботі [3] розв’язано періодичну задачу для штампів – виступів параболічної форми, але для інших форм, наприклад циліндричної чи еліптичної, запропонований підхід «не працює». У цій статті з урахуванням особливості ядра інтегрального рівняння знайдено розв’язок для довільної форми штампів – виступів. Отримано інженерні формули розрахунку основних параметрів задачі та проведено числовий аналіз.

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
Те саме: Johnson K. L. Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – xii+452 p.
2. Кіндрачук М. В., Хабутель В. Ф., Пашечко М. І., Корбут С. В. Трибологія. – Київ: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 232 с.
3. Максимук О. В., Васильків І. М., Сачук Ю. В. Періодична контактна задача для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 4. – С. 117–123.
Те саме: Maksymuk O. V., Vasylykiv I. M., Sachuk Yu. V. Periodic contact problem for an elastic foundation with two bedding coefficients // J. Math. Sci. – 2024. – **279**, No. 2. – P. 260–269. – <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07009-z>.
4. Максимук О. В., Сачук Ю. В., Муzychuk Ю. В. Взаємодія штампів канонічної форми з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 3. – С. 150–156.
Те саме: Maksymuk O. V., Sachuk Yu. V., Muzychuk Yu. V. Interaction of punches of canonical shape with an elastic foundation with two bedding coefficients // J. Math. Sci. – 2024. – **278**, No. 5. – P. 918–927. – <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06969-6>.
5. Максимук О. Періодична контактна задача про взаємодію зубчастої та плоскої поверхонь // Машинознавство. – 2001. – № 2. – С. 13–17.
6. Pipkin A. C. A course on integral equations. – New York: Springer, 1991. – 281 p.

CONTACT INTERACTION OF PERIODIC PUNCH OF ARBITRARY FORM WITH ELASTIC FOUNDATION WITH TWO BEDDING COEFFICIENTS

Periodic contact problems for an elastic foundation with two bedding coefficients and protrusions – punches of arbitrary shape are studied. The problems are reduced to solving the Fredholm integral equation of the first kind and its analytical solution is obtained. The numerical analysis of the obtained contact pressure distribution, punch displacement as a rigid body, deflection of the elastic layer and the effect of its thickness, periodicity of punches and their shape on the calculated values are carried out.

Key words: periodic contact problems, Fredholm integral equation, contact pressure, punch displacement, actual contact area.

¹ Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів,

² Волин. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк