УДК 539.3

В. П. Ревенко[✉]

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОВНИХ СИСТЕМ НЕОРТОГОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Знайдено аналітичні вирази температурних переміщень і напружень у циліндричній системі координат в осесиметричному випадку. Записано загальний розв'язок рівнянь осесиметричної теорії термопружності через три гармонічні функції. Розв'язано задачу теплопровідності для циліндра з теплоізольованою бічною поверхнею та теплообміном за законом Ньютона на торці. Обчислено відповідні температурні переміщення і напруження в циліндрі з використанням алгоритму, який ґрунтується на поділі загального термопружного стану циліндра на температурний (залежний лише від температури) і пружний напружений стан, використанні повних систем неортогональних функцій і задоволенні всіх крайових умов шляхом мінімізації узагальненої квадратичної форми. Показано, що для температурних розв'язків системи рівнянь Нав'є просторових статичних крайових задач термопружності сума нормальних напружень дорівнює нулю.

Ключові слова: *статична термопружність, крайові задачі, неортогональні функції, переміщення, пружний циліндр, нормальні напруження.*

Вступ. Задачі визначення термопружної поведінки твердих тіл внаслідок дії температурних полів є актуальними для багатьох галузей [16, 17]. Методи розв'язування статичних крайових задач термопружності у тривимірній постановці здебільшого ґрунтуються на побудові та використанні виразів з наперед заданою температурою [1, 10, 12, 13]. При дослідженні тривимірних статичних задач теорії термопружності [12, 13] використовують відомі розв'язки рівнянь теорії пружності, до яких долучають складові, що визначаються термопружним потенціалом [1, 17]. У [15] знайдено аналітичні розв'язки плоскої задачі термопружності за допомогою перетворення Фур'є. В [14] знаходження тривимірного термонапруженого стану пластини зведено до розв'язання двовимірної крайової задачі. В [19] на основі методу безпосереднього інтегрування розроблено методику аналітико-числового визначення температурних напружень у порожнистому циліндрі скінченної довжини. Метод перехресної суперпозиції використано в [2, 11] для побудови розв'язків осесиметричних задач теорії пружності та термопружності для суцільного циліндра скінченної довжини. В [7] застосовано підхід функцій Дуґолла для зведення тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра. У роботі [4] знайдено нові фізично обґрунтовані часткові розв'язки теорії термопружності в декартовій системі координат, без використання термопружного потенціалу. Там само на основі результатів [5] запропоновано нове подання загального розв'язку рівнянь термопружності через чотири гармонічні функції.

Для розв'язання крайових задач широко використовуються системи ортогональних функцій [12, 13, 16]. У [4, 6, 12] запропоновано новий аналітично-числовий метод розрахунку напруженого стану пружних тіл із використанням систем неортогональних функцій. Такі системи використано для розрахунку напружень у скінченному циліндрі [5], двошаровому циліндрі [3], неоднорідній прямокутній пластині [8].

Метою цієї роботи є побудова фізично обґрунтованих температурних розв'язків рівнянь Нав'є і розробка методики розв'язання крайових задач теплопровідності і термопружності в циліндричній системі координат для осесиметричного розподілу температури.

1. Побудова часткового розв'язку рівнянь Нав'є. Розглядаємо систему рівнянь Нав'є тривимірної статичної теорії термопружності в декартовій

[✉] victorrev@ukr.net

системі координат (x_1, x_2, x_3). Початкову температуру, коли відсутні напруження в тілі, покладемо рівною нулю. Вважаємо, що температура в тілі може змінюватися в межах, для яких пружні і теплофізичні характеристики матеріалу є сталими. Використаємо співвідношення Дюгамеля–Неймана для термопружних напружень [1, 13, 16] в однорідному твердому тілі

$$\sigma_k = 2G\left(\varepsilon_k + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T\right), \quad \sigma_{kj} = G\gamma_{kj}, \quad k \neq j, \tag{1}$$

де $e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – об'ємне розширення, $G = 0.5E / (1+\nu)$, E – модулі зсуву та Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, $\varepsilon_k = \partial u_k / \partial x_k$ – деформації видовження, $\gamma_{kj} = \partial u_j / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_j$ – деформації зсуву, u_k – пружні переміщення, σ_k, σ_{kj} – компоненти тензора напружень, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Підставимо співвідношення (1) у рівняння рівноваги термопружного тіла [10, 12, 17] та запишемо систему рівнянь Нав'є теорії термопружності

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{2}$$

де $\nabla^2 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ – оператор Лапласа.

У тілі задано стаціонарний розподіл температурного поля, яке без внутрішнього виділення тепла задовольняє рівняння Лапласа

$$\nabla^2 T = 0. \tag{3}$$

Відтак ненульові праві частини диференціальних рівнянь (2) визначаються через гармонічний розподіл температури, знайдений із рівняння (3). Загальний розв'язок (2) подамо у вигляді суми однорідного і часткового розв'язку. Відомо, що частковий розв'язок визначається з точністю до деякого розв'язку однорідного рівняння.

Подамо пружні переміщення у вигляді

$$u_j = u_j^{\mathrm{e}} + u_j^{\tau}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

де u_j^{e} – компоненти вектора пружних переміщень, u_j^{τ} – компоненти температурних переміщень.

Означення. Частковий розв'язок u_j^{τ} системи рівнянь (2) називатимемо температурним, якщо він не містить пружних переміщень.

У [4] проаналізовано відомі часткові розв'язки системи рівнянь (2), отримані без застосування термопружного потенціалу [10, 13, 17]. Встановлено, що для цих температурних розв'язків виконуються такі залежності:

$$e^{\tau} = 3\alpha T, \quad \Theta^{\tau} = 0, \tag{5}$$

де $\Theta^{\tau} = \sigma_1^{\tau} + \sigma_2^{\tau} + \sigma_3^{\tau}$ – сума нормальних напружень.

Теорема 1. *Рівності* (5) *виконуються для всіх температурних розв'язків системи* (2), (3).

Д о в е д е н н я. З огляду на вирази для переміщень (4) запишемо

$$e = e^{\tau} + e^{\mathrm{e}}, \quad \Theta = \Theta^{\tau} + \Theta^{\mathrm{e}}. \tag{6}$$

У випадку відсутності температурного впливу залежність об'ємного розширення від суми нормальних напружень має вигляд [17]

$$e^{\mathrm{e}} = \frac{1-2\nu}{E}\Theta^{\mathrm{e}}. \tag{7}$$

Коли ж враховано лише вплив температури, ця залежність має вигляд

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\Theta + 3\alpha T\,.$$

Підставивши в цю формулу (6), (7), одержимо

$$e^{\tau} = \frac{1-2\nu}{E}\Theta^{\tau} + 3\alpha T\,. \tag{8}$$

Порівняння (8) із (5) завершує доведення сформульованої теореми. ♦

У [4] знайдено температурний розв'язок системи рівнянь (2)

$$u_j^{\tau} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} + \frac{4\alpha}{3}\Omega_j, \quad j = 1,2,3\,, \tag{9}$$

де T, $\Omega_j = \int \mathrm{T}dx_j$ – гармонічні функції, $\vartheta = -\frac{\alpha}{6}\sum_{j=1}^{3} x_j\Omega_j$ – бігармонічна основна функція. Зауважмо, що $\Omega_j = 0$ при $T = 0$. На основі подання (9) знайдено напруження

$$\sigma_j^{\tau} = 2G\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_j^2} + \frac{\alpha}{3}T\right), \quad \sigma_{jm}^{\tau} = 2G\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_j\partial x_m} + \frac{4\alpha G}{3}\left(\frac{\partial\Omega_j}{\partial x_m} + \frac{\partial\Omega_m}{\partial x_j}\right) \tag{10}$$

та встановлено, що об'ємне розширення, яке відповідає переміщенням (9), і сума нормальних напружень (10) задовольняють (5).

Переконаємося, що залежності (5) є чинними і в циліндричній системі координат. Для цього запишемо зв'язок між декартовими (x_1, x_2, x_3) та циліндричними (r, φ, z) координатами [7]

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_r\cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi\sin\varphi, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi\cos\varphi + \mathbf{e}_r\sin\varphi, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_z\,,$$

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z\,, \tag{11}$$

де $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ та $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ – одиничні орти відповідно в декартовій і циліндричній системах координат. Зі співвідношень (11) випливає, що

$$u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi = (u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi)\mathbf{e}_r + (u_2\cos\varphi - u_1\sin\varphi)\mathbf{e}_\varphi\,,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial x_1}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\,,$$

$$u_r = u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi, \quad u_\varphi = u_2\cos\varphi - u_1\sin\varphi\,. \tag{12}$$

Тут і надалі u_r, u_φ, u_z – компоненти вектора переміщень у циліндричній системі координат. В осесиметричному випадку $u_\varphi = 0$, а температура задовольняє рівняння

$$\Delta T(r,z) = 0\,, \tag{13}$$

де $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$.

Співвідношення (11)–(13) дають змогу визначити пружні переміщення в циліндричній системі координат через переміщення в декартових координатах. За допомогою цих співвідношень перерахуємо інтеграли, наявні в (9), у циліндричній системі координат:

$$\Omega_1 = \int\frac{T}{\cos\varphi}dr, \quad \Omega_2 = \int\frac{T}{\sin\varphi}dr, \quad \Omega_z = \Omega_3 = \int Tdz\,, \tag{14}$$

При знаходженні інтеграла Ω_1 враховано що $dx_2 = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi = 0$, а для знаходження Ω_2 – $dx_1 = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi = 0$. Оскільки кут φ змінюється вздовж шляху інтегрування, то функції, залежні від кута φ, не можна винести за знак інтеграла. Із використанням співвідношень (9), (11), (14) запишемо

$$\vartheta(r,z) = -\frac{\alpha}{6}\big(2r\Omega_r(r,z) + z\Omega_z(r,z)\big), \tag{15}$$

де $\Omega_r(r,z) = \frac{1}{2}\left(\cos\varphi\int\frac{T}{\cos\varphi}dr + \sin\varphi\int\frac{T}{\sin\varphi}dr\right)$, $\Omega_z(r,z) = \Omega_1$. Зі співвідношень (9), (11), (14), (15) визначимо переміщення в осесиметричному випадку

$$u_r^\tau = \frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \frac{8\alpha}{3}\Omega_r, \qquad u_z^\tau = \frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \frac{4\alpha}{3}\Omega_z. \tag{16}$$

У вирази (16) входить функція Ω_r, яка визначається через інтеграли (14) і не залежить від кута φ, для знаходження якого треба розв'язати рівняння рівноваги термопружного тіла в осесиметричному випадку.

У випадку осесиметричного термопружного стану рівняння (2) переходять у таку систему диференціальних рівнянь [3, 8]:

$$\Delta u_r + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\Delta u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z} = 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{17}$$

де e − об'ємне розширення в осесиметричному випадку.

Для побудови часткового розв'язку рівнянь (17) врахуємо, що об'ємне розширення, залежне лише від температури, є інваріантним в ортогональних системах координат. Запишемо співвідношення (5) в циліндричній системі координат:

$$\sigma_r^\tau + \sigma_\varphi^\tau + \sigma_z^\tau = 0, \qquad e^\tau = \varepsilon_r^\tau + \varepsilon_\varphi^\tau + \varepsilon_z^\tau = 3\alpha T. \tag{18}$$

З урахуванням (18) рівняння (17) набувають вигляду

$$\Delta u_r^\tau - \frac{u_r^\tau}{r^2} = -\alpha\frac{\partial T}{\partial r}, \qquad \Delta u_z^\tau = -\alpha\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{19}$$

Підставивши в рівняння (19) переміщення (16), отримаємо рівняння

$$\Delta\Omega_r - \frac{1}{r^2}\Omega_r = 0, \qquad \Delta\vartheta = -\alpha T,$$

розв'язок яких визначається такими виразами:

$$\Omega_r = \frac{1}{r}\int rT\,dr, \qquad \vartheta(r,z) = -\frac{\alpha}{6}\left(2\int rT\,dr + z\Omega_z\right). \tag{20}$$

Отже, температурний розв'язок осесиметричних рівнянь теорії термопружності має вигляд (16), (20).

Теорема 2. *Загальний розв'язок системи рівнянь теорії термопружності в осесиметричному випадку можна подати у вигляді*

$$u_r = \frac{\partial P}{\partial r} + u_r^\tau, \qquad u_\varphi = 0, \qquad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi + u_z^\tau,$$

де $P = z\Phi + \Psi$; $\Phi(r,z)$, $\Psi(r,z)$ − *гармонічні функції переміщень* [5].

Д о в е д е н н я. Істинність теореми випливає з подання загального напруженого стану в пружному осесиметричному випадку [5] із доданим температурним розв'язком (16), (20). ♦

2. Побудова розв'язку задачі теплопровідності для довгого суцільного циліндра. Розглянемо довгий циліндр $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$, де $h / R > 7$. Бічна поверхня циліндра є теплоізольованою

$$\left.\frac{\partial T(r,z)}{\partial r}\right|_{r=R} = 0\,. \qquad (21)$$

На торці $z = 0$ задано теплообмін за законом Ньютона

$$\left.\frac{\partial T(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -æ_1\big(\theta_1(r) - T(r,0)\big)\,, \qquad (22)$$

а на торці $z = h$ підтримується задана температура

$$T(r,h) = \theta_2^{\text{а}}\,. \qquad (23)$$

Тут $æ_1 = æ / \lambda$, $æ$ − коефіцієнт теплообміну, λ − коефіцієнт теплопровідності, $\theta_1(r)$ − відома температура зовнішнього середовища біля торця $z = 0$, $\theta_2^{\text{а}}$ − відоме середнє значення температури на торці $z = h$.

Усереднимо задачу (13), (21)−(23) за радіусом з урахуванням того, що для умов (21)−(23) відмінною від нуля буде лише складова теплового потоку уздовж осі z. У результаті отримаємо крайову задачу

$$\frac{\partial^2\tilde{T}(z)}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{T}(0)}{\partial z} = -æ_1\big(\theta_1^{\text{а}} - \tilde{T}(0)\big), \quad \tilde{T}(h) = \theta_2^{\text{c}}\,. \qquad (24)$$

Тут $\{\tilde{T}(z), \theta_1^{\text{а}}\} = \frac{1}{R}\int\limits_0^R r\{T(r,z), \theta_1\}dr$. Розв’язок задачі (24) має вигляд

$$\tilde{T}(z) = \frac{1}{1 - hæ_1}\bigg(æ_1(\theta_1^{\text{а}} - \theta_2^{\text{а}})z + \theta_2^{\text{а}} - æ_1\theta_1^{\text{а}}h\bigg). \qquad (25)$$

Подамо температуру як суму лінійної (25) і збуреної складових:

$$T(r,z) = \tilde{T}(z) + T^{\text{p}}(r,z)\,. \qquad (26)$$

Збурену температуру T^{p} у виразі (26) шукатимемо з рівняння (13) за допомогою методу відокремлення змінних у вигляді

$$T^{\text{p}}(r,z) = aJ_0(\beta r)\exp(-\beta z)\,, \qquad (27)$$

де a − невідомий коефіцієнт, $\beta > 0$ − спектральний параметр, $J_0(\beta r)$ − функція Бесселя першого роду нульового порядку [9, 18].

Для визначення спектрального параметра β підставимо (27) в (21), звідки отримаємо $J_1(\beta R) = 0$. Якщо врахувати, що $J_1(0) = 0$, то для визначення спектрального параметра маємо задачу Штурма−Ліувілля [6, 8] для оператора $\Delta_\beta = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}\partial / \partial r + \beta^2$ на проміжку $[0,R]$. Позначимо власні значення через β_k і пронумеруємо їх у порядку зростання. У результаті функцію (27) подамо у вигляді

$$T(r,z) = \tilde{T}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r)\exp(-\beta_k z)\,, \qquad (28)$$

де $\tilde{T}(z)$ має вигляд (25). Відомо, що система функцій $J_0(\beta_k r)$, $k = 1, 2, \ldots$, є ортогональною на проміжку $[0,R]$:

$$\int\limits_0^R rJ_0(\beta_k r)J_0(\beta_j r)dr = 0, \;\; k \ne j, \qquad \int\limits_0^R rJ_0^2(\beta_k r)dr = \frac{R^2}{2}J_0^2(\beta_k R)\,. \qquad (29)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів a_k підставимо температуру (28) в крайову умову (22). З урахуванням того, що в (28) збурена температура є практично нульовою на другому торці $z = h$ внаслідок умови $h / R > 7$, із використанням співвідношень (29) знаходимо

$$a_k = \frac{\text{æ}_1}{A_k f_k} \int_0^R r J_0(\beta_k r) \theta_1(r) dr ,$$

де $f_k = R^2 J_0^2(\beta_k R) / 2$, $A_k = \text{æ}_1 + \beta_k$.

3. Побудова температурних переміщень. Нескладно показати, що переміщення, які відповідають розподілу температури (25), мають вигляд

$$u_{z,0}^{\tau} = \frac{\alpha}{2(1 - h\text{æ}_1)} \left(\text{æ}_1 (z^2 - r^2)(\theta_1^{a} - \theta_2^{a}) + 2z(\theta_2^{a} - \text{æ}_1 \theta_1^{a} h) \right),$$

$$u_{r,0}^{\tau} = \alpha r \tilde{T}(z). \tag{30}$$

Із використанням відомих рекурентних формул

$$\frac{d}{dr}\left(r J_1(\beta r) \right) = \beta r J_0(\beta r), \qquad \frac{dJ_0(\beta r)}{dr} = -\beta J_1(\beta r),$$

$$\frac{d}{dr}\left(r J_0(\beta r) \right) = J_0(\beta r) - \beta r J_1(\beta r)$$

знайдемо переміщення для базового розв'язку $a_n J_0(\beta_n r) \exp(-\beta_n z)$ у поданні (16), де

$$\Omega_z(r,z) = -\frac{a_n}{\beta_n} J_0(\beta_n r) \exp(-\beta_n z), \qquad \Omega_r = \frac{a_n}{\beta_n} J_1(\beta_n r) \exp(-\beta_n z),$$

$$\vartheta(r,z) = -\frac{\alpha}{6} \frac{a_n}{\beta_n} \left(2r J_1(\beta_n r) - z J_0(\beta_n r) \right) \exp(-\beta_n z).$$

З урахуванням цих формул із (28) знаходимо

$$u_r^{\tau} = u_{r,0}^{\tau} - \frac{\alpha}{6} \sum_{k=1}^{\infty} a_k A_{r,k}^1(r) \exp(-\beta_k z),$$

$$u_z^{\tau} = u_{z,0}^{\tau} - \frac{\alpha}{6} \sum_{k=1}^{\infty} a_k A_{z,k}^1(r) \exp(-\beta_k z), \tag{31}$$

де

$$A_{r,n}^1(r) = 2r J_0(\beta_n r) + (z - 16 / \beta_n) J_1(\beta_n r),$$

$$A_{z,n}^1(r) = (z + 7 / \beta_n) J_0(\beta_n r) - 2r J_0(\beta_n r).$$

4. Побудова температурних напружень. Нескладно показати, що переміщення (30) не спричинюють термонапружень.

Знайдемо деформації для переміщень (31) у вигляді ряду. Підставимо ці деформації у співвідношення Дюгамеля–Неймана в осесиметричному випадку і знайдемо загальне подання температурних напружень

$$\left\{ \sigma_r^{\tau}, \sigma_{\varphi}^{\tau}, \sigma_z^{\tau}, \sigma_{rz}^{\tau} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sigma_{r,n}^{\tau}, \sigma_{\varphi,n}^{\tau}, \sigma_{z,n}^{\tau}, \sigma_{rz,n}^{\tau} \right\}, \tag{32}$$

де

$$\sigma_{r,n}^{\tau} = \frac{\alpha G}{3} a_n \left(\left(\left(z - \frac{16}{\beta_n} \right) \frac{1}{r} + 2\beta r \right) J_1(\beta_n r) + (8 - \beta_n z) J_0(\beta_n r) \right) \exp(-\beta_n z),$$

$$\sigma_{\varphi,n}^{\tau} = \frac{\alpha G}{3} a_n \left(\left(\frac{16}{\beta_n} - z \right) \frac{1}{r} J_1(\beta_n r) - 8 J_0(\beta_n r) \right) \exp(-\beta_n z),$$

$$\sigma_{z,n}^{\tau} = \frac{\alpha G}{3} a_n \beta_n \left(zJ_0(\beta_n r) - 2rJ_1(\beta_n r) \right) \exp(-\beta_n z),$$

$$\sigma_{rz,n}^{\tau} = \frac{\alpha G}{3} a_n \left(2\beta r J_0(\beta_n r) + (\beta_n z - 5) J_1(\beta_n r) \right) \exp(-\beta_n z).$$

Напруження (32) виникають внаслідок неоднорідності температурного поля і швидко спадають при віддаленні від торця $z = 0$.

5. Напруження, які створює температурне поле за відсутності силових навантажень на поверхні циліндра. Розглянемо випадок, коли поверхня циліндра є вільною від силових навантажень. Тому на поверхні циліндра температурні напруження (32) мають врівноважуватись пружними напруженнями. Для визначення пружних напружень використаємо подання [5]

$$\frac{\sigma_r}{2G} = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \frac{\sigma_z}{2G} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2(2-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$\frac{\sigma_{rz}}{2G} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - 2(1-\nu)\Phi \right), \tag{33}$$

де $P = z\Phi + \Psi$, а гармонічні функції переміщень $\Phi(r,z)$, $\Psi(r,z)$ подано у вигляді

$$\Phi(r,z) = \sum_{k=1}^{N} b_k J_0(\eta_k r) \exp(-\eta_k z),$$

$$\Psi(r,z) = \sum_{k=1}^{N} d_k J_0(\eta_k r) \exp(-\eta_k z), \tag{34}$$

b_k, d_k – невідомі коефіцієнти, N – натуральне число, $\eta_k = \omega \beta_k$, $\omega = R/R_1$, $R_1 > 1.05R$, $k = 1, \ldots, N$. Зауважимо, що система функцій $\{J_0(\eta_k r)$, $k = 1, \ldots, N\}$ є ортогональною в нормі $L_2[0, R_1]$, а в нормі $L_2[0, R]$ є повною, але не ортогональною [1, 6].

Підставимо (34) у (33), знайшовши у такий спосіб вирази для пружних напружень:

$$\sigma_r = 2G \sum_{k=1}^{N} \left(2\nu b_k J_0(\eta_k r) - (b_k z + d_k) \frac{dJ_1(\eta_k r)}{dr} \right) \eta_k \exp(-\eta_k z),$$

$$\sigma_z = 2G \sum_{k=1}^{N} \left(\eta_k (b_k z + d_k) + (2-\nu) b_k \right) \eta_k J_0(\eta_k r) \exp(-\eta_k z),$$

$$\sigma_{rz} = 2G \sum_{k=1}^{N} \left(b_k (\eta_k z + 3 - 2\nu) + \eta_k d_k \right) \eta_k J_1(\eta_k r) \exp(-\eta_k z). \tag{35}$$

Оскільки циліндр довгий, умови на торці $z = h$ наближено задоволені. Для подань (32)–(35) запишемо крайові умови на торці $z = 0$

$$\sum_{k=1}^{N} (\eta_k d_k + (2-\nu) b_k) \eta_k J_0(\eta_k r) = P_1(r),$$

$$\sum_{k=1}^{N} ((3-2\nu) b_k + \eta_k d_k) \eta_k J_1(\eta_k r) = P_2(r) \tag{36}$$

та бічній поверхні циліндра

$$\sum_{k=1}^{N} ((2\nu - \eta_k z) b_k - \eta_k d_k) \eta_k J_0(\eta_k R) \exp(-\eta_k z) = P_3(z),$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left(b_k(\eta_k z+3-2\nu)+\eta_k d_k\right)\eta_k J_1(\eta_k R)\exp(-\eta_k z)=P_4(z)\,. \qquad (37)$$

Тут

$$P_1(r)=\frac{\alpha}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\beta_n rJ_1(\beta_n r), \qquad P_2(r)=\frac{\alpha}{6}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(5J_1(\beta_n r)-2\beta_n rJ_0(\beta_n r)\right),$$

$$P_3(z)=\frac{\alpha}{6}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\beta_n z-8)J_0(\beta_n R)\exp(-\beta_n z)\,,$$

$$P_4(z)=\frac{\alpha}{3}R\sum_{n=1}^{\infty}a_n\beta_n J_0(\beta_n R)\exp(-\beta_n z)\,.$$

Умови (36), (37) подамо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{M}c_k A_{m,k}(\gamma_m)=P_m(\gamma_m), \qquad \gamma_m\in[0,\,\alpha_m], \qquad m=1,2,3,4\,, \qquad (38)$$

де $M=2N$, $c_k=b_k$, $c_{k+N}=d_k$, $k=1,\ldots,N$, $\gamma_1=\gamma_2=r$, $\gamma_3=\gamma_4=z$, $\alpha_1=\alpha_2=R$, $\alpha_3=\alpha_4=h$, а коефіцієнти $A_{m,k}(\gamma_m)$ нескладно визначити з (36), (37).

Метод побудови розв'язку системи рівнянь (38) ґрунтується на мінімізації нев'язок

$$\left|\sum_{k=1}^{M}c_k A_{m,k}(\gamma_m)-P_m\right|, \qquad \gamma_m\in[0,\,\alpha_m], \qquad m=1,2,3,4\,. \qquad (39)$$

З використанням методики застосування неортогональних функцій [3, 5, 8], можна мінімізувати всі чотири нев'язки (39) у нормах $L_2[0,\alpha_m]$. Це дає змогу звести пошук невідомих c_k до знаходження мінімуму узагальненої квадратичної форми

$$\sum_{m=1}^{4}\left\|\sum_{k=1}^{M}c_k A_{m,k}(\gamma)-P_m(\gamma)\right\|_m^2=\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}c_k c_j W_{kj}-2\sum_{k=1}^{M}c_k V_k+P^2\,, \qquad (40)$$

де $\|f(\gamma)\|_m=\sqrt{\int_0^{\alpha_m}f^2(\gamma)d\gamma}$ – норма в просторі $L_2[0,\alpha_m]$, $P^2=\sum_{m=1}^{4}\|P_m(y)\|_m^2$,

$W_{k,j}=\sum_{m=1}^{4}\int_0^{\alpha_m}A_{m,k}(\gamma)A_{m,j}(\gamma)d\gamma$, $W_{k,j}=W_{j,k}$, $V_k=\sum_{m=1}^{4}\int_0^{\alpha_m}A_{m,k}(\gamma)P_m(\gamma)d\gamma$.

Мінімум [5, 8] узагальненої квадратичної форми (40) для заданого N позначимо $\Lambda(N)$, а невідомі c_k, на яких він досягається, позначимо c_k^N. Функції переміщень, які визначаються знайденими коефіцієнтами c_k^N, позначимо $\Phi_N(r,z)$, $\Psi_N(r,z)$. Підставлення їх у формули (33) дає змогу визначити пружні напруження, які разом з температурними напруженнями (32) описують напружений стан циліндра з вільною від навантажень повною поверхнею. В [5, 8] наведено критерії збіжності побудованого наближеного розв'язку у граничному переході за кількістю складових до точного.

Висновки. У теорії термопружності [10, 12, 13] використовують термопружний потенціал Φ

$$\mathbf{u}^p=\mathrm{grad}\Phi\,, \qquad (41)$$

який є частковим розв'язком системи рівнянь (2). Йому відповідає об'ємне розширення

$$e^p = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T\,, \tag{42}$$

Оскільки у вираз об'ємного розширення (42) входять пружні переміщення, він відрізняється від виразу для об'ємного розширення температурного розв'язку (5). Тому розв'язок (41) неточно враховує вплив температурного поля на переміщення і напруження в термопружному циліндрі.

Для часткового температурного розв'язку в осесиметричному термопружному циліндрі об'ємне розширення дорівнює $e = 3\alpha T$, а сума нормальних напружень є нульовою. У циліндрі з теплоізольованою бічною поверхнею, який підігрівається на торці, температура описується лінійною та збуреною функцією, яка має експонентне спадання при віддаленні від торця.

Розроблено аналітично-числову методику розв'язання крайових задач термопружності за допомогою неортогональних функцій і узагальнених квадратичних форм. Інтеграли, які визначають коефіцієнти узагальненої квадратичної форми, можна обчислити аналітично, що дає змогу суттєво підвищити швидкодію методу і знайти з високою точністю компоненти термонапруженого стану циліндра.

1. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 309 с.
2. *Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р.* Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 120–137.
   Те саме: *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V., Barber J. R.* Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 5. – P. 646–669. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0428-1.
3. *Ревенко В. П.* Визначення напружено-деформованого стану навантаженого на торцях двошарового циліндра // Наук. нотатки. – 2014. – Вип. 44. – С. 233–240.
4. *Ревенко В. П.* Визначення тривимірного напруженого стану багатошарового циліндра // Вісн. Тернопільського нац. техн. ун-ту. – 2014. – **74**, № 2. – С. 25–37.
5. *Ревенко В. П.* О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65.
   Те саме: *Revenko V. P.* Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 7. – P. 730–741. – https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4.
6. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Том I. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 276 с.
7. *Токовий Ю. В.* Зведення тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 49–60.
   Те саме: *Tokovyy Yu. V.* Reduction of a three-dimensional elasticity problem for a finite-length solid cylinder to the solution of systems of linear algebraic equations // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, No. 5. – P. 683–696. – https://doi.org/10.1007/s10958-013-1280-2.
8. *Bakulin V., Revenko V.* Computational method for solving boundary value problems of mechanics deformable body using non-orthogonal functions // MATEC Web of Conferences. – 2022. – **362**. – Article 01002. – 9 p. – https://doi.org/10.1051/matecconf/202236201002.
9. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review. – New York: Dover Publications, 2000. – 1151 p.
10. *Melan E., Parkus G.* Wärmespannungen: Infolge Stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 s.
11. *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, No. 1. – P. 143–166. – https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y.
12. *Noda N., Hetnarski R. B., Tanigawa Y.* Thermal stresses – New York: Taylor & Francis, 2003. – 507 p.

13. *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
14. *Revenko V. P.* Analytical solution of the problem of symmetric thermally stressed state of thick plates based on the 3D elasticity theory // J. Mech. Eng. – 2021. – **24**, No. 1. – P. 36–41. – https://doi.org/10.15407/pmach2021.01.036.
15. *Rychahivskyy A. V., Tokovyy Y. V.* Correct analytical solutions to the thermoselasticity problems in a semi-plane // J. Therm. Stresses. – 2008. – **31**, No. 11. – P. 1125–1145. – https://doi.org/10.1080/01495730802250854.
16. *Sadd M. H.* Elasticity: Theory, applications, and numeric. – Burlington: Acad. Press, 2009. – xii+461 p.
17. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 574 p.
18. *Watson T. G.* A treatise on the theory of Bessel functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 1980. – viii + 804 p.
19. *Yuzvyak M., Tokovyy Y., Yasinskyy A.* Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length // J. Therm. Stresses. – 2021. – **44**, No. 3. – P. 359–376. – https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1826376.

SOLVING AXISYMMETRIC THERMOELASTICITY PROBLEMS THROUGH THE USE OF COMPLETE SETS OF NON-ORTHOGONAL FUNCTIONS

Analytical expressions for the temperature displacements and stresses are found for the axisymmetric case within the cylindrical coordinates. A general solution of the equations of axisymmetric theory of thermoelasticity is given using three harmonic functions. A heat conduction problem is solved for a cylinder with thermally insulated lateral surface and heat exchange on the end face due to the Newton law. The corresponding thermal stresses and displacements are evaluated by making use of an algorithm that is based on the representation of the general thermostressed state of the cylinder by the thermal (those dependent on the temperature only) and elastic stress states, the use of complete sets of non-orthogonal functions, and the satisfaction of all boundary conditions through the minimization of a generalized quadratic form. It is demonstrated that for the temperature solutions of the system of Navier equations for the spatial static boundary value problems of thermoelasticity, the sum of normal stresses equals zero.

***Key words*:** *static thermoelasticity, boundary value problems, non-orthogonal functions, displacements, elastic cylinder, normal stresses.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів.

Одержано
27.11.22