УДК 512.64

Б. З. Шаваровський[✉]

ПРО ТРИКУТНУ ФОРМУ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ МАТРИЦІ ПРОСТОЇ СТРУКТУРИ ТА ЇЇ ІНВАРІАНТИ ВІДНОСНО НАПІВСКАЛЯРНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Для поліноміальних матриць простої структури побудовано орієнтовану за характеристичними коренями трикутну форму відносно напівскалярної еквівалентності. Знайдено деякі інваріанти орієнтованих за характеристичними коренями матриць відносно перетворень напівскалярної еквівалентності. Встановлено вигляд перетворювальних матриць.

Ключові слова: *матриця простої структури, напівскалярна еквівалентність матриць, спеціальна трикутна форма матриць, орієнтована за характеристичними коренями матриця.*

Вступ. Згідно з означенням [4] матриці $A(x), B(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$ називаються напівскалярно еквівалентними (скорочено нск.е.), якщо існують такі матриці $P \in GL(n, \mathbb{C})$, $Q(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$, що $PA(x)Q(x) = B(x)$ (позначення: $A(x) \approx B(x)$). У зв'язку з цим виникає задача класифікації матриць із $M(n, \mathbb{C}[x])$ з точністю до нск.е. Встановлена у праці [4] трикутна форма матриці відносно перетворень нск.е. через її неоднозначність визначення не вирішує цієї задачі. Тому доводиться розглядати окремі випадки, оскільки у загальному ця задача виявилась досить складною. Про складність цієї задачі свідчить її зв'язок з відомою проблемою подібності пар матриць. У цьому дослідженні обмежимося розглядом нск.е матриць простої структури. За означенням [3], поліноміальна матриця $A(x)$ має просту структуру, якщо всі її елементарні дільники є лінійними. Це означає, що алгебраїчна та геометрична кратності кожного характеристичного кореня такої матриці збігаються. Означення поліноміальної матриці простої структури у праці [3] введене за аналогією з таким означенням для числових матриць у монографії [1]. У літературі існують інші терміни стосовно вказаного класу матриць простої структури. Зокрема, в монографії [8] числові матриці з властивістю збігання алгебраїчної та геометричної кратностей їхніх власних значень називаються недефектними, а матриці з геометричною кратністю 1 кожного власного значення таких матриць − простими. Подібна термінологія використовується і в [10].

У працях автора [11−13] досліджується нск.е. матриць простої структури 3-го порядку. У цій статті уточнюється (доозначується) відома [4] трикутна форма матриці з інваріантними множниками на головній діагоналі: встановлено орієнтовану за характеристичними коренями форму матриці простої структури з першим одиничним інваріантним множником. Також знайдено деякі інваріанти матриць такої трикутної форми. Зокрема, доведено інваріантність розміщення нульових підрядків нижче від головної діагоналі. Позиції цих нульових підрядків можна визначити за вихідною матрицею. Встановлено, що ліва перетворювальна матриця при переході від одної до іншої напівскалярно еквівалентної орієнтованої за тими самими характеристичними коренями матриці має верхній блочно-трикутний вигляд. Ця обставина вказує на те, що встановлена таким чином орієнтована за характеристичними коренями матриця визначається точніше, аніж довільна трикутна матриця із праці [4]. Розміри діагональних блоків лівих перетворювальних матриць можна визначити за вихідними матрицями.

Слід зазначити, що еквівалентність матриць над різними (необов'язково поліноміальними) класами кілець розглянуто раніше у працях [9] та

✉ bshavarovskii@gmail.com

[2]. Зокрема, у [9] для матриць над квадратичними кільцями встановлено стандартну форму відносно (z,k)-еквівалентності, яка є аналогом напівскалярної еквівалентності для матриць над вказаними кільцями. А у [2] вивчається еквівалентність блочно-трикутних матриць над комутативними областями головних ідеалів. Результати цих праць, як і пропонованої статті, стосуються класифікаційних задач і мають застосування при розв'язуванні матричних різносторонніх рівнянь. Інші типи еквівалентностей матриць та пов'язані з ними класифікаційні задачі, які часто містять відому проблему пар матриць, досліджувались у недавніх працях [5–7].

Надалі через $0_{m\times n}$ і E_t будемо позначати нульову матрицю розміру $m\times n$ і одиничну матрицю порядку t відповідно. Інколи індекси пропускатимемо, якщо розміри матриць є зрозумілими з контексту. Якщо поліном $\varphi(x)\in\mathbb{C}[x]$ має всі прості (кратності 1) корені $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, то для довільної поліноміальної матриці $G(x)$ записи $N_{G(x)}(\varphi(x))$ або $N_{G(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]$ будуть означати числову матрицю вигляду $\|G(\alpha_1)\ \ldots\ G(\alpha_m)\|$. Матрицю $N_{G(x)}(\varphi(x))$ (як і $N_{G(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]$) називатимемо *рядковим значенням* матриці $G(x)$ на системі коренів полінома $\varphi(x)$. Матриця $N_{G(x)}(\varphi(x))$ залежить, очевидно, від нумерації коренів полінома $\varphi(x)$. При одночасному розгляді рядкових значень $N_{G(x)}(\varphi(x))$ і $N_{F(x)}(\varphi(x))$ матриць $G(x)$ і $F(x)$ на системі коренів того самого полінома $\varphi(x)$ вважатимемо, що система (нумерація) його коренів є фіксованою. Щоб відрізнити введене тут поняття рядкового значення матриці на системі коренів полінома від відомого [3] поняття значення матриці на системі коренів полінома, останнє (за потреби) називатимемо *стовпцевим значенням* матриці на системі коренів полінома.

Зауваження 1. Щоб поширити (узагальнити) у перспективі введене тут поняття для матриці $N_{G(x)}(\varphi(x))$ на випадок наявності у полінома $\varphi(x)$ кратних коренів, будемо говорити «рядкове значення матриці на системі коренів полінома» замість «рядкове значення матриці на множині коренів полінома».

Твердження 1. *При нск.е. перетворенні матриці ранг її рядкового значення на системі коренів довільного полінома не міняється.*

Д о в е д е н н я. Нехай $F(x),G(x)\in M(n,\mathbb{C}[x])$ і $F(x)\approx G(x)$, тобто виконується співвідношення $SF(x)=G(x)R(x)$, де $S\in GL(n,\mathbb{C})$, $R(x)\in$ $\in GL(n,\mathbb{C}[x])$, і $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ є системою коренів полінома $\varphi(x)$. Тоді рівність

$$N_{SF(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]=N_{G(x)R(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]$$

можемо записати у вигляді

$$SN_{F(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]=N_{G(x)R(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]\operatorname{diag}(R(\alpha_1),\ldots,R(\alpha_m)),$$

звідки і випливає істинність твердження 1. ♦

Зауваження 2. Доведене твердження 1 є правильним і для випадку стовпцевого значення матриці на системі коренів полінома (див. [3]).

Розглянемо матрицю простої структури вигляду

$$F(x)=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ f_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & \ldots & 0\\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & \varphi_2(x) & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & f_{n3}(x) & \ldots & \varphi_{n-1}(x)\end{matrix}\right\|, \tag{1}$$

де $1, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ – її інваріантні множники, $\deg \varphi_1(x) > 0$. Тоді $\varphi_i(x)$ ділить $\varphi_{i+1}(x)$, $f_{i+2,i+1}(x), \ldots, f_{n,i+1}(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Позначимо через K_{φ_i} множину коренів полінома $\varphi_i(x)$ і через $k_i := \operatorname{rank} N_{F(x)}(\varphi_i(x))$ – ранг матриці $N_{F(x)}(\varphi_i(x))$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тоді, очевидно, $1 \le k_1 \le \ldots \le k_{n-1} \le n$.

Означення 1. Нехай для матриці простої структури $F(x)$ вигляду (1) з формою Сміта $\operatorname{diag}(1, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x))$ для кожного $i = 1, \ldots, n-1$ маємо таку мінімальну підмножину $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_i}) \subseteq K_{\varphi_i}$, що $\operatorname{rank} N_{F(x)}[\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_i}] = k_i$, $1 \le r_1 \le \ldots \le r_{n-1} \le n$. Нехай також у матриці $N_{F(x)}[\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_i}]$ перші k_i лінійно незалежні стовпці утворюють підматрицю вигляду

$$\left\| \begin{matrix} N_{1i} \\ N_{0i} \end{matrix} \right\|, \qquad (2)$$

де $N_{0i} = 0_{(n-k_i)\times k_i}$ і N_{1i} – верхня блочно-трикутна матриця з діагональними (квадратними неособливими) блоками порядків $\le i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Таку матрицю $F(x)$ будемо називати орієнтованою за характеристичними коренями $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_{n-1}}$.

Зауваження 3. Нульовий блок N_{0i} у (2) для деякого i може бути відсутнім.

Теорема 1. *У класі нск.е. матриць простої структури з формою Сміта* $\operatorname{diag}(1, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x))$ *існує орієнтована за деякими характеристичними коренями* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_{n-1}}$ *матриця* $F(x)$ *вигляду* (1).

Д о в е д е н н я. Нехай для довільної матриці

$$G(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ g_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & \varphi_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & g_{n3}(x) & \ldots & \varphi_{n-1}(x) \end{matrix} \right\|$$

з формою Сміта $\operatorname{diag}(1, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x))$ маємо $\operatorname{rank} N_{G(x)}(\varphi_i(x)) = k_i$ і $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_i})$ – така мінімальна підмножина множини K_{φ_i}, що $\operatorname{rank} N_{G(x)}[\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_i}] = k_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тут, очевидно, $r_1 = k_1$, оскільки $\operatorname{rank} G(\alpha_j) = 1$ для кожного $\alpha_j \in K_{\varphi_1}$. Можемо вважати, що для елементів першого стовпця матриці $G(x)$ виконуються рівності $g_{21}(\alpha_1) = \ldots = g_{n1}(\alpha_1) = 0$. Це легко досягається додаванням першого рядка матриці $G(x)$, помноженого на деякі константи, до наступних її рядків. Якщо $r_1 > 1$, то припускаємо за індукцією, що матриця $N_{G(x)}[\alpha_1, \ldots, \alpha_t]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in K_{\varphi_1}$, $t < r_1$, після викреслення нульових стовпців набуває вигляду

$$\left\| \begin{matrix} 1 & & & \times \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & * \\ \hline & & 0_{(n-t)\times t} & \end{matrix} \right\|,$$

де символом «$*$» позначено ненульовий елемент, а «$\times$» – деякий елементи.

Можемо вважати, що в $G(x)$ маємо $g_{t+1,t}(\alpha_{t+1}) \neq 0$, $\alpha_{t+1} \in K_{\varphi_1}$. У протилежному випадку це досягається нск.е. перетворенням з лівою перетворювальною матрицею вигляду

$$P = \left\| \begin{array}{c|c|c} E_t & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \times \\ \hline 0 & 0 & E_{n-t-1} \end{array} \right\|,$$

якщо спеціально підібрати елементи, зображені символом «$\times$». Далі в матриці $G(x)$ додаванням ($t+1$)-го рядка, помноженого на деякі константи, до наступних її рядків переходимо до такої матриці $G'(x)$ аналогічного з $G(x)$ вигляду, що матриця $N_{G'(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\alpha_{t+1}]$ після викреслення нульових стовпців набуває вигляду

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & & \times \\ & * & \\ & & \ddots \\ 0 & & * \\ \hline 0_{(n-t-1)\times(t+1)} & & \end{array} \right\|,$$

де, як і вище, символом «$*$» позначено ненульові елементи. Тим самим індуктивно доведено існування такої матриці $F(x) \approx G(x)$ вигляду (1), що в $N_{F(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_1}]$ перші r_1 ненульові стовпці утворюють підматрицю вигляду (2) для $i=1$. Ці $r_1 = k_1$ стовпці, очевидно, є лінійно незалежними. Щоб не вводити нові позначення, будемо вважати, що вже матриця $G(x)$ має вказану властивість, тобто в матриці $N_{G(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_1}]$ перші r_1 ненульові стовпці (вони ж лінійно незалежні) утворюють підматрицю вигляду (2) для $i=1$.

Припустимо за індукцією, що для $G(x)$ перші k_j лінійно незалежні стовпці матриці $N_{G(x)}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_j}]$ утворюють підматрицю вигляду (2) для $i=j=1,\ldots,m$, $m<n-1$, $k_m<k_{n-1}$. Якщо $k_m<k_{m+1}$, то множина $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_{m+1}}) \backslash (\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_m})$ не є порожня. Позначимо через s_1 ранг матриці

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{k_m+1,1}(\alpha_{r_m+1}) & \ldots & a_{k_m+1,m+1}(\alpha_{r_m+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(\alpha_{r_m+1}) & \ldots & a_{n,m+1}(\alpha_{r_m+1}) \end{array} \right\|, \qquad (3)$$

яка є значенням відповідного блоку матриці $G(x)$ при $x=\alpha_{r_m+1}$. Будемо припускати, що перші s_1 рядки цієї матриці (3) є лінійно незалежними. В іншому разі це досягається нск.е перетвореннями матриці $G(x)$ з лівою перетворювальною матрицею вигляду

$$P = \left\| \begin{array}{c|c|c} E_{k_m} & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{s_1} & \times \\ \hline 0 & 0 & E_{n-k_m-s_1} \end{array} \right\|,$$

спеціально підібравши елементи, зображені символом «$\times$». При цьому перші k_m рядки перетворюваної матриці $G(x)$ не зміняться. Додаванням рядків матриці $G(x)$ з номерами $k_m+1,\ldots,k_m+s_1$, помножених на певні константи, до наступних її рядків можемо отримати матрицю, в якій блок на перетині перших $m+1$ стовпців та останніх $n-k_m-s_1$ рядків є нульовим при $x=\alpha_{r_m+1}$. Це означає, що для одержаної матриці $G(x)$ в матриці $N_{G(x)}[\alpha_1,\dots,\alpha_{r_m},\alpha_{r_m+1}]$ максимальна система перших лінійно незалежних стовпців утворює підматрицю вигляду

$$\begin{Vmatrix} N_1 \\ N_0 \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

де $N_0=0_{(n-k_m-s_1)\times(k_m+s_1)}$, а матриця N_1 є верхньою блочно-трикутною з діагональними блоками порядку $\le m+1$. Якщо $r_m+1<r_{m+1}$, то припускаємо за індукцією, що у матриці $N_{G(x)}[\alpha_1,\dots,\alpha_{r_m},\alpha_{r_m+1},\dots,\alpha_{r_m+t}]$, де $r_m+t<$ $<r_{m+1}$, максимальна система перших лінійно незалежних стовпців утворює підматрицю вигляду (4), де N_0 є нульовою матрицею розміру $(n-k_m-s_t)\times k_{m+s_t}$, $s_t\le t(m+1)$, і N_1 є верхньою блочно-трикутною матрицею з діагональними (квадратними неособливими) блоками порядку $\le m+1$. Нехай $s_{t+1}:=\operatorname{rank} N_{G(x)}[\alpha_1,\dots,\alpha_{r_m+t+1}]$. Тоді ранг матриці

$$\begin{Vmatrix} a_{k_m+s_t+1,1}(\alpha_{r_m+t+1}) & \dots & a_{k_m+s_t+1,m+1}(\alpha_{r_m+t+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\alpha_{r_m+t+1}) & \dots & a_{n,m+1}(\alpha_{r_m+t+1}) \end{Vmatrix},$$

яка є, очевидно, значенням блоку матриці $G(x)$ на перетині перших $m+1$ стовпців та останніх $n-k_m-s_t$ рядків при $x=\alpha_{r_m+t+1}$, дорівнює $s_{t+1}-s_t$. Можемо вважати, що перші $s_{t+1}-s_t$ рядки цієї матриці є лінійно незалежними. В іншому разі застосовуємо до $G(x)$ нск.е. перетворення з лівою перетворювальною матрицею вигляду

$$P=\left\Vert\begin{array}{c|c|c} E_{k_m+s_t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{s_{t+1}-s_t} & \times \\ \hline 0 & 0 & E_{n-k_m-s_{t+1}} \end{array}\right\Vert,$$

спеціально підібравши елементи, позначені символом «$\times$». При цьому перші k_m+s_t рядки матриці не змінюються. Якщо додати рядки матриці $G(x)$ з номерами $k_m+s_t+1,\dots,k_m+s_{t+1}$, помножені на деякі числа, до наступних її рядків, то можна отримати матрицю $G'(x)$, для якої в матриці

$$N_{G'(x)}[\alpha_1,\dots,\alpha_{r_m},\alpha_{r_m+1},\dots,\alpha_{r_m+t+1}]$$

максимальна система перших лінійно незалежних стовпців утворює підматрицю вигляду (4), де $N_0=0_{(n-k_m-s_{t+1})\times(k_m+s_{t+1})}$, а N_1 є верхньою блочно-трикутною матрицею з діагональними блоками порядку $\le m+1$. Отже, індуктивно доведено існування нск.е. з $G(x)$ матриці $F(x)$, яка є орієнтованою за деякими характеристичними коренями $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_{n-1}}$. ♦

Твердження 2. *В орієнтованої за характеристичними коренями матриці* $F(x)$ *вигляду* (1) *елементи* $a_{m+1,1}(x),\dots,a_{m+1,m}(x)$ *є нульовими, якщо* $\operatorname{rank} N_{F(x)}(\varphi_m(x))=m$, $1\le m\le n-1$.

Д о в е д е н н я. За виконання умови твердження 2 підматриця N_{0i} у матриці (2) для $i=m$ має розмір $(n-m)\times m$. Тому

$N_{\left\| a_{m+1,1}(x) \ \dots \ a_{m+1,m}(x) \right\|}(\varphi_m(x)) = 0$. Оскільки $\deg a_{m+1,t}(x) < \deg \varphi_m(x)$, то $a_{m+1,t}(x) \equiv 0$, $t = 1, \dots, m$. ♦

Твердження 3. *Якщо орієнтовані за тими самими характеристичними коренями* $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_{n-1}}$ *матриці* $F(x)$, $G(x)$ *є нск.е., то ліва перетворювальна матриця* $S \in GL(n, \mathbb{C})$ *у співвідношенні*

$$SF(x)Q(x) = G(x), \tag{5}$$

де $Q(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$, *має вигляд*

$$S = \begin{Vmatrix} S_1 & \times \\ 0 & S_0 \end{Vmatrix},$$

причому підматриця $\begin{Vmatrix} S_1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ *має однакову з матрицею* (2) *для* $i = n-1$ *верхню блочно-трикутну структуру,* $S_0 \in GL(n - k_{n-1}, \mathbb{C})$.

Д о в е д е н н я. Співвідношення (5) запишемо у вигляді

$$SF(x) = G(x)R(x), \qquad R(x) = Q^{-1}(x)$$

і перейдемо до рядкових значень матриць на системі коренів $(\alpha_1, \dots, \alpha_{r_{n-1}})$:

$$N_{SF(x)}[\alpha_1, \dots, \alpha_{r_{n-1}}] = N_{G(x)R(x)}[\alpha_1, \dots, \alpha_{r_{n-1}}].$$

Останню рівність можна подати у вигляді

$$S \left\| F(\alpha_1) \ \dots \ F(\alpha_{r_{n-1}}) \right\| =$$

$$= \left\| G(\alpha_1) \ \dots \ G(\alpha_{r_{n-1}}) \right\| \operatorname{diag}\left(R(\alpha_1), \dots, R(\alpha_{r_{n-1}})\right). \tag{6}$$

Якщо порівняти елементи в позиціях $(2,1), \dots, (n,1)$, $(3, 1+n), \dots, (n, 1+n)$, ..., $(r_1+1, 1+(r_1-1)n), \dots, (n, 1+(r_1-1)n)$ в обох частинах рівності (6), то отримаємо, що елементи $s_{21}, \dots, s_{n1}, \dots, s_{r_1+1, r_1}, \dots, s_{nr_1}$ у матриці $S = \left\| s_{ij} \right\|_1^n$ є нульовими. Це означає, що перші $r_1 = k_1$ стовпці матриці S утворюють підматрицю, аналогічну за виглядом до матриці (2) для $i = 1$. Припустимо за індукцією, що підматриця з перших k_t стовпців матриці S має таку саму блочну структуру, як і матриця (2) для $i = t$, $k_t < k_{t+1} < k_{n-1}$.

Нехай $\operatorname{rank} N_{F(x)}[\alpha_1, \dots, \alpha_{r_t}, \alpha_{r_t+1}] = k_t + s$, $1 \le s \le t+1$. Якщо в обох частинах рівності (6) порівняти елементи на перетині останніх $n - k_t - s$ рядків і наступних $t+1$ після перших $r_t n$ стовпців, то отримаємо, що в матриці S блок в останніх $n - k_t - s$ рядках і в наступних s після перших k_t стовпцях є нульовим. Це свідчить про те, що підматриця з перших $k_t + s$ стовпців матриці S і матриця (2) для $i = t+1$ мають однакову верхню блочно-трикутну будову. Цим твердження індуктивно доведено. ♦

Висновки. За допомогою напівскалярно еквівалентних перетворень доведено звідність довільної поліноміальної матриці простої структури до орієнтованої за характеристичними коренями матриці трикутної форми. Матриця вказаної форми визначається точніше, аніж довільна трикутна матриця, встановлена у праці [4]. На це вказує блочно-трикутний вигляд лівої перетворювальної матриці при переході від однієї орієнтованої за характеристичними коренями матриці до іншої такої матриці (орієнтованої за тими самими характеристичними коренями). Доведено інваріантність розміщення нульових підрядків нижче від головної діагоналі орієнтованої за характеристичними коренями матриці.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
   Gantmakher F. R. The theory of matrices. – New York: Chelsea Publ. Co., 1959. – Vol. 1: x+374 p.; Vol. 2: x+277 p.
2. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Еквівалентність матриць у кільці $M(n, R)$ та в його підкільцях // Укр. мат. журн. – 2021. – **73**, № 12. – С. 1612–1618. –https://doi.org/10.37863/umzh.v73i12.6858.
   Те саме: *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Equivalence of matrices in the ring $M(n, R)$ and its subrings // Ukr. Math. J. – 2022. – **73**, No. 12. – P. 1865–1872. – https://doi.org/10.1007/s11253-022-02034-0.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
5. *Alazemi A., Anđelić M., Fonseca C. M., Futorny V., Sergeichuk V. V.* Three representation types for systems of forms and linear maps // Mathematics. – 2021. – **9**, No. 5. – Art. 455. – https://doi.org/10.3390/math9050455.
6. *Belitskii G. R., Futorny V., Muzychuk M., Sergeichuk V. V.* Congruence of matrix spaces, matrix tuples, and multilinear maps // Linear Algebra Appl. – 2021. – **609.** – P. 317–331. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.09.018.
7. *Borges V. S., Kashuba I., Sergeichuk V. V., Sodré E. V., Zaidan A.* Classification of linear operators satisfying $(Au, v) = (u, A^r v)$ or $(Au, A^r v) = (u, v)$ on a vector space with indefinite scalar product // Linear Algebra Appl. – 2021. – **611**. – P. 118–134. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.12.005.
8. *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – 561 p.
9. *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M.* The number of standard forms of matrices over imaginary Euclidean quadratic rings with respect to the (z, k)-equivalence // Мат. студії. – 2022. – **57**, № 2. – С. 115–121. – https://doi.org/10.30970/ms.57.2.115-121.
10. *Lancaster P.* Theory of matrices. – New York: Acad. Press, 1969. – 326 p.
11. *Shavarovskii B. Z.* Conditions of semiscalar equivalence of one class 3 x 3 matrices of simple structure // Hindawi J. Math. – 2022. – **2022**. – Article ID 8395922. – 13 p. – https://doi.org/10.1155/2022/8395922.
12. *Shavarovskii B. Z.* On the triangular form of 3-by-3 matrix of simple structure relative to semiscalar equivalence // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65,** № 3-4. – С. 5–28.
13. *Shavarovskii B. Z.* Oriented by characteristic roots reduced matrices in the class of semiscalarly equivalent // Hindawi J. Math. – 2021. – **2021**. – Article ID 5592756. – 6 p. – https://doi.org/10.1155/2021/5592756.

ON THE TRIANGULAR FORM OF A POLYNOMIAL MATRIX OF SIMPLE STRUCTURE AND ITS INVARIANTS WITH RESPECT TO SEMISCALAR EQUIVALENCE

For polynomial matrices of simple structure, the oriented by characteristic roots triangular form with respect to semiscalar equivalence is constructed. Some invariants of matrices oriented by characteristic roots with respect to semiscalar equivalence transformations are found. The type of the transformation matrices is established.

Key words: *matrix of simple structure, semiscalar equivalence of matrices, special triangular form of matrices, oriented by characteristic roots matrix.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 21.10.22