УДК 512.64

В. М. Прокіп[1✉], О. М. Мельник[2], Р. В. Коляда[3]

ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ ІЗ ОСТАЧЕЮ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД ДОВІЛЬНИМ ПОЛЕМ

Досліджується задача про подільність многочленних матриць із остачею над довільним полем F. Встановлено умови, за яких для пари многочленних матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ над полем F існує єдина пара многочленних матриць $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ над F таких, що $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$. Наведено застосування отриманих результатів для знаходження мінімальних розв'язків матричного рівняння Сильвестра. Доведено, що неособливі многочленні матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ мають взаємно прості визначники тоді й тільки тоді, коли для довільної ненульової матриці $C(\lambda)$ матричне рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ має єдиний мінімальний розв'язок.

Ключові слова: *многочленна матриця, подільність матриць, матричне рівняння, мінімальний розв'язок, матриці із взаємно простими визначниками.*

Вступ. Нехай F – поле. Введемо позначення: $F_{m,n}$ і $F_{m,n}[\lambda]$ – множини $m \times n$-матриць над полем F і кільцем многочленів $F[\lambda]$, відповідно, $0_{m,n}$ – нульова $m \times n$-матриця, I_m – одинична $m \times m$-матриця. Символом «$\top$» позначаємо операцію транспонування матриці. Матриця $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$, яку запишемо у вигляді

$$A(\lambda) = A_0\lambda^r + A_1\lambda^{r-1} + \ldots + A_r, \qquad \text{де} \qquad A_i \in F_{n,n}, \quad i = 0,1,\ldots,r,$$

називається *неособливою*, якщо $\det A(\lambda) \neq 0$, і *регулярною многочленною* матрицею степеня r, якщо $\det A_0 \neq 0$ [1]. Надалі через $A^*(\lambda)$ позначатимемо *взаємну* матрицю для неособливої матриці $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$, тобто

$$A(\lambda)A^*(\lambda) = A^*(\lambda)A(\lambda) = I_n \det A(\lambda).$$

Відомо [19], що для многочленів $a(\lambda) \neq 0, b(\lambda) \in F[\lambda]$ існує єдина пара многочленів $p(\lambda), q(\lambda) \in F[\lambda]$ таких, що

$$b(\lambda) = a(\lambda)p(\lambda) + q(\lambda), \qquad \text{де} \quad q(\lambda) = 0 \quad \text{або} \quad \deg q(\lambda) < \deg a(\lambda).$$

Таке зображення називають *діленням* $b(\lambda)$ на $a(\lambda)$ із остачею. Закономірно виникає задача про перенесення цього твердження на комутативні кільця і матриці над ними. Зазначимо, що кільце матриць є некомутативним, і в ньому існують дільники нуля. Отже, встановлення умов подільності матриць із остачею над комутативними кільцями пов'язане з подоланням вказаних труднощів та вимагає нових ідей і підходів.

Теорія подільності з остачею над комутативними кільцями є класичною задачею алгебри [5, 8, 10–12, 20–23, 25, 26]. Конструктивний критерій існування алгоритму Евкліда в області цілісності R встановлено в [22]. P. Samuel [25] довів існування найменшого алгоритму подільності з остачею для будь-якого евклідового кільця і поставив таке питання: *чи існує мінімальний скінченний алгоритм для областей цілісності*? Виходячи з поняття алгоритму Евкліда, в роботі [25] також наведено приклади евклідових кілець, для яких найменший алгоритм не є скінченним. Подільність матриць із остачею при деяких обмеженнях виконується для матричних кілець над

✉ v.prokip@gmail.com

евклідовими областями, тобто алгебра матриць над евклідовою областю є лівим та правим евклідовим кільцем [5]. У статті [8] доведено, що кільце $n \times n$-матриць над лівою/правою евклідовою областю є лівим/правим евклідовим кільцем. Узагальнення властивостей алгоритму Евкліда над комутативними кільцями з одиницею наведено в [11].

У статті [21] доведено, що алгебра матриць над комутативним кільцем K з одиницею є лівим та правим евклідовим кільцем тоді й тільки тоді, коли K є кільцем головних ідеалів. Умови, за яких подільність матриць з остачею над областю головних ідеалів визначена однозначно, встановлено в [3]. У статті [26] наведено аналог алгоритму Евкліда для кілець з інволюцією. Там встановлено також, що багато властивостей евклідових кілець справджуються і для кілець з інволюцією.

Зрозуміло, що для матриць $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ і $B(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ існують матриці $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ із $F_{n,m}[\lambda]$ такі, що $\deg Q(\lambda) < \deg A(\lambda)$ і

$$B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda). \tag{1}$$

Якщо $Q(\lambda) \neq 0_{n,m}$, то зображення (1) для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ називається *подільністю матриць із остачею*. Умови, за яких для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існує подільність без остачі, тобто $Q(\lambda) = 0_{n,m}$, наведено у роботі [2] у термінах рангів матриць, які побудовано за коефіцієнтами $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$. Згідно з [4], $Q(\lambda) = 0_{n,m}$ тоді й тільки тоді, коли матриці $\begin{Vmatrix} A(\lambda) & 0_{n,m} \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \end{Vmatrix}$ правоеквівалентні, тобто їхні (праві) форми Ерміта збігаються.

Проте неважко переконатись у тому, що в рівності (1) для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ матриці $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ не завжди визначені однозначно. Якщо матриця $A(\lambda)$ регулярна, то матриці $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ у рівності (1) визначені однозначно (див. [1, Гл. IV]). У роботі [23] цей результат узагальнено і доведено. Нехай неособлива матриця $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ правоеквівалентна регулярній многочленній матриці, тобто для $A(\lambda)$ існує матриця $W(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$ така, що $A(\lambda)W(\lambda) = D(\lambda)$ − регулярна матриця. Тоді для матриці $A(\lambda)$ та матриці $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ існує єдина пара матриць $P(\lambda), Q(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ таких, що

$$B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda), \quad \text{де} \quad Q(\lambda) = 0_{n,n} \ \text{ або } \ \deg Q(\lambda) < \deg D(\lambda).$$

У цій роботі встановимо умови, за яких для матриць $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ і $B(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ існує єдина пара матриць $P(\lambda), Q(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ таких, що для $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існує зображення $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$. На підставі отриманих результатів наведемо умови існування єдиного мінімального розв'язку матричного рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$, тобто такого, що $\deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)$.

1. Основні результати. Нехай $\overline{b}(\lambda) = \begin{Vmatrix} b_1(\lambda) & b_2(\lambda) & \ldots & b_m(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{1,m}[\lambda]$ і $a(\lambda) \in F[\lambda]$, $a(\lambda) \neq 0$. Для елементів $b_i(\lambda)$ рядка $\overline{b}(\lambda)$ існують зображення $b_i(\lambda) = a(\lambda)p_i(\lambda) + q_i(\lambda)$, де $q_i(\lambda) = 0$ або $\deg q_i(\lambda) < \deg a(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Отже, для рядка $\overline{b}(\lambda)$ і многочлена $a(\lambda)$ існує єдина пара рядків $\overline{p}(\lambda), \overline{q}(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$ таких, що $\overline{b}(\lambda) = a(\lambda)\overline{p}(\lambda) + \overline{q}(\lambda)$, де $\overline{q}(\lambda) = 0_{1,m}$ або $\deg \overline{q}(\lambda) < \deg a(\lambda)$. Очевидно, що, якщо $a(\lambda) = \mathrm{const} \neq 0$, то $\overline{q}(\lambda) = 0_{1,m}$. У цьому розділі встановимо умови подільності матриць із остачею.

Теорема 1. *Нехай*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(\lambda) & a_{n-1,2}(\lambda) & \dots & a_{n-1,n-1}(\lambda) & 0 \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{n,n-1}(\lambda) & a_n(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{n,n}[\lambda]$$

– неособлива нижня трикутна матриця і $B(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$. *Тоді для матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $P(\lambda), Q(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ *таких, що* $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$, *де* $Q(\lambda) = 0_{n,m}$ *або степені елементів* k*-го рядка матриці* $Q(\lambda)$ *є меншими, ніж степінь многочлена* $a_k(\lambda)$, *тобто*

$$\deg \begin{Vmatrix} q_{k1}(\lambda) & q_{k2}(\lambda) & \dots & q_{km}(\lambda) \end{Vmatrix} < \deg a_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Д о в е д е н н я. Матрицю $B(\lambda)$ запишемо у вигляді $B(\lambda) = \begin{Vmatrix} \overline{b}_1(\lambda) \\ \overline{b}_2(\lambda) \\ \vdots \\ \overline{b}_n(\lambda) \end{Vmatrix}$, де $\overline{b}_i(\lambda) = \begin{Vmatrix} b_{i1}(\lambda) & b_{i2}(\lambda) & \dots & b_{im}(\lambda) \end{Vmatrix}$ – i-й рядок $B(\lambda)$. Елементи рядка $\overline{b}_1(\lambda)$ поділимо на $a_1(\lambda)$ з остачею. Як результат дістаємо, що для елемента $a_1(\lambda)$ і рядка $\overline{b}_1(\lambda)$ існує єдина пара рядків $\overline{p}_1(\lambda), \overline{q}_1(\lambda) = F_{1,m}[\lambda]$ таких, що $\overline{b}_1(\lambda) = a_1(\lambda)\overline{p}_1(\lambda) + \overline{q}_1(\lambda)$, де $\overline{q}_1(\lambda) = 0_{1,m}$ або $\deg \overline{q}_1(\lambda) < \deg a_1(\lambda)$.

За другим рядком $\overline{b}_2(\lambda)$ матриці $B(\lambda)$ та отриманим рядком $\overline{p}_1(\lambda)$ побудуємо рядок $\overline{d}_2(\lambda) = \overline{b}_2(\lambda) - a_{21}(\lambda)\overline{p}_1(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$. Елементи цього рядка поділимо на $a_2(\lambda)$ із остачею. Отже, для многочлена $a_2(\lambda)$ і рядка $\overline{d}_2(\lambda)$ існує єдина пара рядків $\overline{p}_2(\lambda), \overline{q}_2(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$ таких, що $\overline{d}_2(\lambda) = a_2(\lambda)\overline{p}_2(\lambda) + \overline{q}_2(\lambda)$, де $\overline{q}_2(\lambda) = 0_{1,m}$ або $\deg \overline{q}_2(\lambda) < \deg a_2(\lambda)$. Таким чином, для рядка $\overline{b}_2(\lambda)$ існує зображення у вигляді $\overline{b}_2(\lambda) = a_{21}(\lambda)\overline{p}_1(\lambda) + a_2(\lambda)\overline{p}_2(\lambda) + \overline{q}_2(\lambda)$.

За рядком $\overline{b}_3(\lambda)$ матриці $B(\lambda)$ та отриманими рядками $\overline{p}_1(\lambda)$ і $\overline{p}_2(\lambda)$ побудуємо рядок $\overline{d}_3(\lambda) = \overline{b}_3(\lambda) - a_{31}(\lambda)\overline{p}_1(\lambda) - a_{32}(\lambda)\overline{p}_2(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$. Елементи цього рядка поділимо на $a_3(\lambda)$ із остачею. Для $a_3(\lambda)$ і $\overline{d}_3(\lambda)$ існує єдина пара рядків $\overline{p}_3(\lambda), \overline{q}_3(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$ таких, що $\overline{d}_3(\lambda) = a_3(\lambda)\overline{p}_3(\lambda) + \overline{q}_3(\lambda)$, де $\overline{q}_3(\lambda) = 0_{1,m}$ або $\deg \overline{q}_3(\lambda) < \deg a_3(\lambda)$. Отже, для рядка $\overline{b}_3(\lambda)$ існує зображення $\overline{b}_3(\lambda) = a_{31}(\lambda)\overline{p}_1(\lambda) + a_{32}(\lambda)\overline{p}_2(\lambda) + a_3(\lambda)\overline{p}_3(\lambda) + \overline{q}_3(\lambda)$.

Продовжуючи ці міркування далі, остаточно за останнім рядком $\overline{b}_n(\lambda)$ матриці $B(\lambda)$ та отриманими рядками $\overline{p}_1(\lambda), \overline{p}_2(\lambda), \dots, \overline{p}_{n-1}(\lambda)$ побудуємо рядок $\overline{d}_n(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$, який визначимо так:

$$\overline{d}_n(\lambda) = \overline{b}_n(\lambda) - a_{n1}(\lambda)\overline{p}_1(\lambda) - a_{n2}(\lambda)\overline{p}_2(\lambda) - \dots - a_{n,n-1}(\lambda)\overline{p}_{n-1}(\lambda).$$

Елементи цього рядка поділимо на многочлен $a_n(\lambda)$ із остачею. Для $a_n(\lambda)$ і рядка $\overline{d}_n(\lambda)$ існує єдина пара рядків $\overline{p}_n(\lambda), \overline{q}_n(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$ таких, що

$\overline{d}_n(\lambda) = a_n(\lambda)\overline{p}_n(\lambda) + \overline{q}_n(\lambda)$, де $\overline{q}_n(\lambda) = 0_{1.m}$ або $\deg \overline{q}_n(\lambda) < \deg a_n(\lambda)$. Таким чином, для рядка $\overline{b}_n(\lambda)$ існує зображення

$$\overline{b}_n(\lambda) = a_{n1}(\lambda)\overline{p}_1(\lambda) + a_{n2}(\lambda)\overline{p}_2(\lambda) + \ldots + a_n(\lambda)\overline{p}_n(\lambda) + \overline{q}_n(\lambda).$$

Отже, для матриць $P(\lambda) = \begin{Vmatrix} \overline{p}_1(\lambda) \\ \overline{p}_2(\lambda) \\ \vdots \\ \overline{p}_n(\lambda) \end{Vmatrix}$, $Q(\lambda) = \begin{Vmatrix} \overline{q}_1(\lambda) \\ \overline{q}_2(\lambda) \\ \vdots \\ \overline{q}_n(\lambda) \end{Vmatrix}$, які побудовано за рядками $\overline{p}_i(\lambda)$ і $\overline{q}_i(\lambda)$, відповідно, виконується рівність

$$B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda). \tag{2}$$

Зазначимо, що, якщо $a_{i_0}(\lambda) = \text{const}$, то $\overline{q}_{i_0}(\lambda) \equiv 0_{1,m}$. Якщо ж $\deg a_{i_0}(\lambda) \geq 1$, то $\deg \overline{q}_{i_0}(\lambda) < \deg a_{i_0}(\lambda)$.

Припустимо, що для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існує ще одна пара матриць $\tilde{P}(\lambda), \tilde{Q}(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$, відмінна від пари матриць $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, така, що

$$B(\lambda) = A(\lambda)\tilde{P}(\lambda) + \tilde{Q}(\lambda). \tag{3}$$

Зауважимо, що на рядки матриці $\tilde{Q}(\lambda)$ накладено такі самі обмеження, як і на рядки матриці $Q(\lambda)$, про які було сказано вище. Тепер із рівностей (2) і (3) маємо

$$A(\lambda)(P(\lambda) - \tilde{P}(\lambda)) = \tilde{Q}(\lambda) - Q(\lambda). \tag{4}$$

Із рівності (4) отримуємо $P(\lambda) - \tilde{P}(\lambda) \neq 0_{n,m}$, $\tilde{Q}(\lambda) - Q(\lambda) \neq 0_{n,m}$. Тому $\overline{\tilde{q}}_1(\lambda) - \overline{q}_1(\lambda) = 0_{1,m} \pmod{a_1(\lambda)}$. Оскільки $\deg\left(\overline{\tilde{q}}_1(\lambda) - \overline{q}_1(\lambda)\right) < \deg a_1(\lambda)$, то остання рівність можлива лише тоді, коли $\overline{\tilde{q}}_1(\lambda) = \overline{q}_1(\lambda)$. Отже, $\overline{p}_1(\lambda) = \overline{\tilde{p}}_1(\lambda)$.

Тепер із рівності (4) отримуємо $\overline{\tilde{q}}_2(\lambda) - \overline{q}_2(\lambda) = 0_{1,m} \pmod{a_2(\lambda)}$. Оскільки $\deg\left(\overline{\tilde{q}}_2(\lambda) - \overline{q}_2(\lambda)\right) < \deg a_2(\lambda)$ то остання рівність можлива лише тоді, коли $\overline{\tilde{q}}_2(\lambda) = \overline{q}_2(\lambda)$. Отже, $\overline{p}_2(\lambda) = \overline{\tilde{p}}_2(\lambda)$.

Провівши аналогічні міркування з решту рядками у лівій і правій частинах рівності (4), отримуємо $\tilde{Q}(\lambda) = Q(\lambda)$ і $\tilde{P}(\lambda) = P(\lambda)$. Таким чином, доведено, що за умов теореми 1 зображення для неособливої нижньої трикутної матриці $A(\lambda)$ та матриці $B(\lambda)$ у вигляді $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$ є єдиним. Крім цього, із доведення теореми отримуємо метод побудови шуканого зображення. Теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Нехай*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) & \ldots & a_{1,n-1}(\lambda) & a_{1n}(\lambda) \\ 0 & a_2(\lambda) & a_{23}(\lambda) & \ldots & a_{2,n-1}(\lambda) & a_{2n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1}(\lambda) & a_{n-1,n}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{n,n}[\lambda]$$

– неособлива верхня трикутна матриця і $B(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$. *Тоді для матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $S(\lambda), R(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ *таких, що* $B(\lambda) = A(\lambda)S(\lambda) + R(\lambda)$, *де* $R(\lambda) = 0_{n,m}$ *або степені елементів* k*-го рядка матриці* $R(\lambda)$ *є меншими від степенів многочлена* $a_k(\lambda)$, *тобто*

$$\deg \begin{Vmatrix} r_{k1}(\lambda) & r_{k2}(\lambda) & \ldots & r_{km}(\lambda) \end{Vmatrix} < \deg a_k(\lambda), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Д о в е д е н н я. Матрицю $B(\lambda)$ запишемо у вигляді $B(\lambda) = \begin{Vmatrix} \bar{b}_1(\lambda) \\ \bar{b}_2(\lambda) \\ \vdots \\ \bar{b}_n(\lambda) \end{Vmatrix}$,

де $\bar{b}_i(\lambda) = \| b_{i1}(\lambda) \quad b_{i2}(\lambda) \quad \dots \quad b_{im}(\lambda) \|$ – i-й рядок $B(\lambda)$. Елементи останнього рядка $\bar{b}_n(\lambda)$ матриці $B(\lambda)$ поділимо на $a_n(\lambda)$ із остачею. Зрозуміло, що для рядка $\bar{b}_n(\lambda)$ і многочлена $a_n(\lambda)$ існує єдина пара рядків $\bar{s}_n(\lambda), \bar{r}_n(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$ таких, що $\bar{b}_n(\lambda) = a_n(\lambda)\bar{s}_n(\lambda) + \bar{r}_n(\lambda)$, де $\bar{r}_n(\lambda) = 0_{1,m}$ або $\deg \bar{r}_n(\lambda) < \deg a_n(\lambda)$.

За рядком $\bar{b}_{n-1}(\lambda)$ матриці $B(\lambda)$ і отриманим рядком $\bar{s}_n(\lambda)$ побудуємо рядок $\bar{d}_{n-1}(\lambda) = \bar{b}_{n-1}(\lambda) - a_{n-1,n}(\lambda)\bar{s}_n(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$. Для многочлена $a_{n-1}(\lambda)$ і рядка $\bar{d}_{n-1}(\lambda)$ існує єдина пара рядків $\bar{s}_{n-1}(\lambda), \bar{r}_{n-1}(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$ таких, що $\bar{d}_{n-1}(\lambda) = a_{n-1}(\lambda)\bar{s}_{n-1}(\lambda) + \bar{r}_{n-1}(\lambda)$, де $\bar{r}_{n-1}(\lambda) = 0_{1,m}$ або $\deg \bar{r}_{n-1}(\lambda) < \deg a_{n-1}(\lambda)$. Отже, для рядка $\bar{b}_{n-1}(\lambda)$ існує зображення у вигляді

$$\bar{b}_{n-1}(\lambda) = a_{n-1}(\lambda)\bar{s}_{n-1}(\lambda) + a_{n-1,n}(\lambda)\bar{s}_n(\lambda) + \bar{r}_{n-1}(\lambda).$$

За рядком $\bar{b}_{n-2}(\lambda)$ матриці $B(\lambda)$ та отриманими рядками $\bar{s}_{n-1}(\lambda)$ і $\bar{s}_n(\lambda)$ побудуємо рядок $\bar{d}_{n-2}(\lambda) = \bar{b}_{n-2}(\lambda) - a_{n-2,n-1}(\lambda)\bar{s}_{n-1}(\lambda) - a_{n-2,n}(\lambda)\bar{s}_n(\lambda)$. Для рядка $\bar{d}_{n-2}(\lambda)$ та многочлена $a_{n-2}(\lambda)$ існує єдина пара рядків $\bar{s}_{n-2}(\lambda)$, $\bar{r}_{n-2}(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$ таких, що $\bar{d}_{n-2}(\lambda) = a_{n-2}(\lambda)\bar{s}_{n-2}(\lambda) + \bar{r}_{n-2}(\lambda)$, де $\bar{r}_{n-2}(\lambda) = 0_{1,m}$ або $\deg \bar{r}_{n-2}(\lambda) < \deg a_{n-2}(\lambda)$. Отже, для $\bar{b}_{n-2}(\lambda)$ існує зображення у вигляді

$$\bar{b}_{n-2}(\lambda) = a_{n-2}(\lambda)\bar{s}_{n-2}(\lambda) + a_{n-2,n-1}(\lambda)\bar{s}_{n-1}(\lambda) + a_{n-2,n}(\lambda)\bar{s}_n(\lambda) + \bar{r}_{n-2}(\lambda).$$

Продовжуючи ці міркування, через скінченне число кроків за першим рядком $\bar{b}_1(\lambda)$ та отриманими рядками $\bar{s}_2(\lambda), \dots, \bar{s}_{n-1}(\lambda), \bar{s}_n(\lambda)$ побудуємо рядок $\bar{d}_1(\lambda) = \bar{b}_1(\lambda) - a_{1,2}(\lambda)\bar{s}_2(\lambda) - \dots - a_{1,n-1}(\lambda)\bar{s}_{n-1}(\lambda) - a_{1,n}(\lambda)\bar{s}_n(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$. Елементи цього рядка поділимо на $a_1(\lambda)$ із остачею. В результаті дістаємо $\bar{d}_1(\lambda) = a_1(\lambda)\bar{s}_1(\lambda) + \bar{r}_1(\lambda)$, де $\bar{s}_1(\lambda), \bar{r}_1(\lambda) \in F_{1,m}[\lambda]$ і $\bar{r}_1(\lambda) = 0_{1,m}$ або $\deg \bar{r}_1(\lambda) < \deg a_1(\lambda)$. Очевидно, що для рядка $\bar{b}_1(\lambda)$ існує зображення у вигляді

$$\bar{b}_1(\lambda) = a_1(\lambda)\bar{s}_1(\lambda) + a_{12}(\lambda)\bar{s}_2(\lambda) + \dots + a_{1n}(\lambda)\bar{s}_n(\lambda) + \bar{r}_n(\lambda).$$

Отже, для $n \times m$-матриць $S(\lambda) = \begin{Vmatrix} \bar{s}_1(\lambda) \\ \bar{s}_2(\lambda) \\ \vdots \\ \bar{s}_n(\lambda) \end{Vmatrix}$, $R(\lambda) = \begin{Vmatrix} \bar{r}_1(\lambda) \\ \bar{r}_2(\lambda) \\ \vdots \\ \bar{r}_n(\lambda) \end{Vmatrix}$, які побудовано за рядками $\bar{s}_i(\lambda)$ і $\bar{r}_i(\lambda)$, відповідно, виконується рівність

$$B(\lambda) = A(\lambda)S(\lambda) + R(\lambda). \tag{5}$$

Зауважимо, що, якщо $a_{i_0}(\lambda) = \text{const}$, то $\bar{r}_{i_0}(\lambda) \equiv 0_{1,m}$. Якщо ж $\deg a_{i_0}(\lambda) \geq 1$, то $\deg \bar{r}_{i_0}(\lambda) < \deg a_{i_0}(\lambda)$.

Припустимо, що для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існує ще одна пара матриць $\tilde{S}(\lambda), \tilde{R}(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$, відмінна від пари матриць $S(\lambda)$, $R(\lambda)$, така, що

$$B(\lambda) = A(\lambda)\tilde{S}(\lambda) + \tilde{R}(\lambda). \qquad (6)$$

Зазначимо, що на рядки матриць $\tilde{S}(\lambda)$ і $\tilde{R}(\lambda)$ накладено такі самі обмеження, як і на рядки матриць $S(\lambda)$ і $R(\lambda)$, про які було сказано вище. Тепер із рівностей (5) і (6) маємо

$$A(\lambda)(S(\lambda) - \tilde{S}(\lambda)) = \tilde{R}(\lambda) - R(\lambda). \qquad (7)$$

Звідси випливає, що для останнього рядка матриці $\tilde{R}(\lambda) - R(\lambda)$ виконується $\bar{\bar{r}}_n(\lambda) - \bar{r}_n(\lambda) = 0 \,(\operatorname{mod} a_n(\lambda))$. Оскільки $\deg\left(\bar{\bar{r}}_n(\lambda) - \bar{r}_n(\lambda)\right) < \deg a_n(\lambda)$, то рівність (7) виконується лише тоді, коли $\bar{\bar{r}}_n(\lambda) = \bar{r}_n(\lambda)$. Отже, $\bar{s}_n(\lambda) = \bar{\bar{s}}_n(\lambda)$.

Тепер із рівності (7) дістаємо, що $\bar{\bar{r}}_{n-1}(\lambda) - \bar{r}_{n-1}(\lambda) = 0 \,(\operatorname{mod} a_{n-1}(\lambda))$. Оскільки $\deg(\bar{\bar{r}}_{n-1}(\lambda) - \bar{r}_{n-1}(\lambda)) < \deg a_{n-1}(\lambda)$, то остання рівність можлива лише у випадку, коли $\bar{\bar{r}}_{n-1}(\lambda) = \bar{r}_{n-1}(\lambda)$. Отже, $\bar{s}_{n-1}(\lambda) = \bar{\bar{s}}_{n-1}(\lambda)$.

Провівши аналогічні міркування з решту рядками у лівій та правій частинах рівності (7), отримуємо $\tilde{R}(\lambda) = R(\lambda)$ і $\tilde{S}(\lambda) = S(\lambda)$. Тим самим доводимо, що за умов теореми 2 для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існує єдине зображення у вигляді $B(\lambda) = A(\lambda)S(\lambda) + R(\lambda)$. Крім цього, з доведення теореми отримуємо метод побудови шуканого зображення. Теорему доведено. ♦

Наведене в теоремах 1 і 2 ділення матриці із $F_{n,m}[\lambda]$ з остачею *зліва* на неособливу трикутну матрицю із $F_{n,n}[\lambda]$ будемо називати *лівим діленням* матриць із остачею. На підставі цих теорем отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) & \dots & a_{1,n-1}(\lambda) & a_{1n}(\lambda) \\ 0 & a_2(\lambda) & a_{23}(\lambda) & \dots & a_{2,n-1}(\lambda) & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}(\lambda) & a_{n-1,n}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{n,n}[\lambda]$$

– неособлива верхня трикутна матриця і $B(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. *Тоді для матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $S(\lambda), R(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ *таких, що* $B(\lambda) = S(\lambda)A(\lambda) + R(\lambda)$, *де* $R(\lambda) = 0_{m,n}$ *або степені елементів* k*-го стовпця матриці* $R(\lambda)$ *є меншими від степеня многочлена* $a_k(\lambda)$, *тобто*

$$\deg \begin{Vmatrix} r_{1k}(\lambda) & r_{2k}(\lambda) & \dots & r_{mk}(\lambda) \end{Vmatrix}^{\top} < \deg a_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 1, для неособливої нижньої трикутної матриці $A^{\top}(\lambda)$ та матриці $B^{\top}(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ існує єдина пара матриць $P(\lambda), Q(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ таких, що $B^{\top}(\lambda) = A^{\top}(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$, де $Q(\lambda) = 0_{n,m}$ або степені елементів k-го рядка матриці $Q(\lambda)$ є меншими від степеня многочлена $a_k(\lambda)$, тобто

$$\deg \begin{Vmatrix} q_{k1}(\lambda) & q_{2k}(\lambda) & \dots & q_{km}(\lambda) \end{Vmatrix} < \deg a_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Транспонуючи обидві частини рівності $B(\lambda)^{\top} = A(\lambda)^{\top} P(\lambda) + Q(\lambda)$, отримуємо $B(\lambda) = P^{\top}(\lambda)A(\lambda) + Q^{\top}(\lambda)$. Очевидно, що степені елементів k-го стовпця матриці $Q^{\top}(\lambda)$ є меншими від степеня многочлена $a_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Покладемо $P^{\top}(\lambda) = S(\lambda)$ і $Q^{\top}(\lambda) = R(\lambda)$.

Отже, для неособливої верхньої трикутної матриці $A(\lambda)$ і матриці $B(\lambda)$ існує зображення $B(\lambda) = S(\lambda)A(\lambda) + R(\lambda)$, де $R(\lambda) = 0_{m,n}$ або степені елементів k-го стовпця матриці $R(\lambda)$ є меншими від степеня многочлена $a_k(\lambda)$, тобто $\deg\left\| r_{1k}(\lambda) \quad r_{2k}(\lambda) \quad \dots \quad r_{mk}(\lambda) \right\|^{\top} < \deg a_k(\lambda)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$.

Теорему доведено. ♦

Теорема 4. *Нехай*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(\lambda) & a_{n-1,2}(\lambda) & \dots & a_{n-1,n-1}(\lambda) & 0 \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{n,n-1}(\lambda) & a_n(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{n,n}[\lambda]$$

– неособлива нижня трикутна матриця і $B(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. *Тоді для матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $P(\lambda), Q(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ *таких, що* $B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda) + Q(\lambda)$, *де* $Q(\lambda) = 0_{m,n}$ *або степені елементів* k*-го стовпця матриці* $Q(\lambda)$ *є меншими від степеня многочлена* $a_k(\lambda)$, *тобто*

$$\deg\left\| q_{1k}(\lambda) \quad q_{2k}(\lambda) \quad \dots \quad q_{mk}(\lambda) \right\|^{\top} < \deg a_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 2, для верхньої трикутної матриці $A^{\top}(\lambda)$ і матриці $B^{\top}(\lambda)$ існує єдина пара матриць $S(\lambda), R(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ таких, що $B^{\top}(\lambda) = A^{\top}(\lambda)S(\lambda) + R(\lambda)$, де $R(\lambda) = 0_{n,m}$ або степені елементів k-го рядка матриці $R(\lambda)$ є меншими від степеня многочлена $a_k(\lambda)$, тобто

$$\deg\left\| r_{k1}(\lambda) \quad r_{k2}(\lambda) \quad \dots \quad r_{km}(\lambda) \right\| < \deg a_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Зрозуміло, що для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існує зображення у вигляді $B(\lambda) = S^{\top}(\lambda)A(\lambda) + R^{\top}(\lambda)$. Покладемо $S^{\top}(\lambda) = P(\lambda)$ і $R^{\top}(\lambda) = Q(\lambda)$.

Отже, для $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ існує єдина пара матриць $P(\lambda), Q(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ таких, що $B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda) + Q(\lambda)$, де $Q(\lambda) = 0_{m,n}$ або степені елементів k-го стовпця матриці $Q(\lambda)$ є меншими від степеня многочлена $a_k(\lambda)$, тобто

$$\deg\left\| q_{1k}(\lambda) \quad q_{2k}(\lambda) \quad \dots \quad q_{mk}(\lambda) \right\|^{\top} < \deg a_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорему доведено. ♦

2. Застосування. Нехай $a(\lambda) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^{p-i}$, $b(\lambda) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^{q-j}$ і $c(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} c_k x^{r-k}$ – многочлени над полем F. Надалі будемо вважати, що $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ і $c(\lambda) \neq 0$. Розглянемо неоднорідне діофантове рівняння

$$a(\lambda)x(\lambda) + b(\lambda)y(\lambda) = c(\lambda). \tag{8}$$

Відомо, що рівняння (8) є розв'язним тоді й тільки тоді, коли найбільший спільний дільник $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ є дільником $c(\lambda)$, тобто $\left(a(\lambda), b(\lambda)\right) \mid c(\lambda)$. Зауважимо, якщо $a(\lambda) = \text{const} \neq 0$ або $b(\lambda) = \text{const} \neq 0$, то рівняння (8) є розв'язним для довільного многочлена $c(\lambda)$. Не обмежуючи загальності, надалі будемо вважати, що $\deg a(\lambda) \ge 1$ і $\deg b(\lambda) \ge 1$.

Нехай $x_0(\lambda), y_0(\lambda) \in F[\lambda]$ – розв'язок рівняння (8). Тоді для довільного $g(\lambda) \in F[\lambda]$ пара многочленів $\tilde{x}(\lambda) = x_0(\lambda) + g(\lambda)b(\lambda)$ і $\tilde{y}(\lambda) = y_0(\lambda) - g(\lambda)a(\lambda)$ також є розв'язком рівняння (8). Якщо ж для розв'язку $x_0(\lambda), y_0(\lambda)$ виконується одна з умов $\deg y_0(\lambda) < \deg a(\lambda)$ або $\deg x_0(\lambda) < \deg b(\lambda)$, то такий розв'язок називають мінімальним [6, 14, 16].

Нехай для розв'язку $\tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda) \in F[\lambda]$ рівняння (8) не виконуються умови мінімального розв'язку. Поділимо $\tilde{y}(\lambda)$ на $a(\lambda)$ з остачею, тобто $\tilde{y}(\lambda) = p(\lambda)a(\lambda) + y_0(\lambda)$, де $y_0(\lambda) = 0$ або $\deg y_0(\lambda) < \deg a(\lambda)$. Очевидно, що пара $x'(\lambda) = \tilde{x}(\lambda) + p(\lambda)b(\lambda)$, $y_0(\lambda)$ є мінімальним розв'язком рівняння (8). Якщо $\tilde{x}(\lambda) = q(\lambda)b(\lambda) + x_0(\lambda)$, де $x_0(\lambda) = 0$ або $\deg x_0(\lambda) < \deg b(\lambda)$, то в цьому випадку $x_0(\lambda)$ та $y'(\lambda) = \tilde{y}(\lambda) + q(\lambda)a(\lambda)$ є мінімальним розв'язком рівняння (8). Отже, якщо рівняння (8) є розв'язним, то серед його розв'язків існують мінімальні.

Приклад 1. Нехай $a(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2$, $b(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ і $c(\lambda) = \lambda$ – многочлени над полем дійсних чисел. Розв'язками рівняння $a(\lambda)x(\lambda) + b(\lambda)y(\lambda) = c(\lambda)$ є пари многочленів $x_1(\lambda) = 0.5$, $y_1(\lambda) = -0.5\lambda - 1$ і $x_2(\lambda) = 0.5\lambda$, $y_2(\lambda) = -0.5\lambda^2 -$ $- \lambda - 1$, які є мінімальними розв'язками цього рівняння.

З ***прикладу 1*** випливає, що мінімальні розв'язки рівняння (8) не завжди визначаються однозначно. Нижче встановимо умови, за яких для рівняння (8) існують єдині мінімальні розв'язки.

Твердження 1. *Нехай* $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda) \in F[\lambda]$. *Нехай, далі,* $\deg a(\lambda) = p \ge 1$, $\deg b(\lambda) = q \ge 1$ *і* $\deg c(\lambda) = r \ge 0$. *Рівняння* (8) *має єдиний мінімальний розв'язок* $x(\lambda) = x_0(\lambda)$, $y(\lambda) = y_0(\lambda)$ *такий, що* $\deg y_0(\lambda) < \deg a(\lambda)$, *тоді й тільки тоді, коли многочлени* $a(\lambda)$ *і* $b(\lambda)$ *є взаємно простими.*

Д о в е д е н н я. *Достатність.* Многочленам $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ поставимо у відповідність результантну матрицю

$$R(a,b) = \left\| \begin{array}{cccccccc} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & & \vdots & b_1 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & a_1 & & \vdots & \vdots & b_1 & & \vdots \\ a_{p-1} & \vdots & \ddots & 0 & b_{q-1} & \vdots & \ddots & 0 \\ a_p & a_{p-1} & \ddots & a_0 & b_q & b_{q-1} & \ddots & b_0 \\ 0 & a_p & & a_1 & 0 & b_q & & b_1 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{p-1} & \vdots & \vdots & \ddots & b_{q-1} \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \quad a_p}_{q} & & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad \quad b_q}_{p} & & & \end{array} \right\| \in F_{p+q,p+q}.$$

Нехай, далі, пара многочленів $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ – єдиний мінімальний розв'язок рівняння (8) такий, що $\deg v(\lambda) < \deg a(\lambda)$ і

$$a(\lambda)u(\lambda) + b(\lambda)v(\lambda) = c(\lambda). \tag{9}$$

Для $\deg c(\lambda) = r$ виконується одна з умов $p + q \ge r - 1$ або $p + q \le r$.

Нехай $p + q \ge r - 1$. Многочлену $c(\lambda)$ поставимо у відповідність стовпець $L_c = \| \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{\ell} \ \underbrace{c_0 \ \ c_1 \ \dots \ c_{r-1} \ \ c_r}_{r+1} \|^{\top} \in F_{p+q,1}$, де $\ell = p + q - r - 1$.

Оскільки $p+q \geq r-1$, то з рівності (9) отримуємо, що $\deg u(\lambda) < < \deg b(\lambda)$. Отже,

$$u(\lambda) = u_0\lambda^{q-1} + u_1\lambda^{q-2} + \ldots + u_{q-1}, \quad v(\lambda) = v_0\lambda^{p-1} + v_1\lambda^{p-2} + \ldots + v_{p-1}.$$

Виконавши множення у лівій частині рівності (9) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях λ в обох частинах рівності (9), отримуємо, що для стовпця

$$Z_c = \left\| u_0 \quad u_1 \quad \ldots \quad u_{q-1} \quad v_0 \quad v_1 \quad \ldots \quad v_{p-1} \right\|^{\top} \in F_{p+q,1}$$

виконується рівність $R(a,b)Z_c = L_c$, тобто рівняння $R(a,b)Z = L_c$ є розв'язним. Оскільки пара многочленів $u(\lambda), v(\lambda)$ – єдиний мінімальний розв'язок рівняння (8), то стовпець Z_c – єдиний розв'язок рівняння $R(a,b)Z = L_c$. Отже, $\det R(a,b) \neq 0$, тобто многочлени $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ є взаємно простими.

Розглянемо тепер випадок, коли $p+q \leq r$. Оскільки $\deg a(\lambda) > > \deg v(\lambda)$, то з рівності (9) отримуємо $\deg u(\lambda) = \deg c(\lambda) - p = r - p$. Отже,

$$u(\lambda) = u_0\lambda^{r-p} + u_1\lambda^{r-p-1} + \ldots + u_{r-p}, \quad v(\lambda) = v_0\lambda^{p-1} + v_1\lambda^{p-2} + \ldots + v_{p-1}.$$

Покладемо $k = r+1-p-q$. У цьому випадку многочленам $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ поставимо у відповідність матрицю

$$\tilde{R}(a,b) = \left\| \begin{matrix} L(a) & 0_{k,p+q} \\ 0_{k,p+k} & R(a,b) \end{matrix} \right\| \in F_{r+1,r+1},$$

де

$$L(a) = \left\| \begin{matrix} a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & & \vdots \\ \vdots & a_1 & & \vdots \\ a_{p-1} & \vdots & \ddots & 0 \\ a_p & a_{p-1} & \ddots & a_0 \\ 0 & a_p & & a_1 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{p-1} \\ 0 & 0 & & a_p \end{matrix} \right\| \in F_{p+k,k},$$

а многочлену $c(\lambda)$ поставимо у відповідність стовпець

$$\tilde{L}_c = \left\| c_0 \quad c_1 \quad \ldots \quad c_{r-1} \quad c_r \right\|^{\top} \in F_{r+1,1}.$$

Виконавши множення в лівій частині рівності (9) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях λ у лівій та правій частинах, отримуємо, що для вектора $\tilde{Z}_c = \left\| u_0 \quad u_1 \quad \ldots \quad u_{r-p} \quad v_0 \quad v_1 \quad \ldots \quad v_{p-1} \right\|^{\top} \in F_{r+1,1}$ виконується рівність $\tilde{R}(a,b)\tilde{Z}_c = \tilde{L}_c$. Оскільки пара многочленів $u(\lambda), v(\lambda)$ – єдиний розв'язок рівняння (8), то очевидно, що стовпець $\tilde{Z}_c$ є єдиним розв'язком рівняння $\tilde{R}(a,b)Z = \tilde{L}_c$.

Оскільки $\tilde{R}(a,b) \in F_{r+1,r+1}$ і рівняння $\tilde{R}(a,b)Z = \tilde{L}_c$ має єдиний розв'язок, то $\det \tilde{R}(a,b) \neq 0$. Оскільки $\tilde{R}(a,b)$ є нижньою блочно-трикутною матрицею, то $\det R(a,b) \neq 0$. Отже, многочлени $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ є взаємно простими.

Необхідність. Оскільки многочлени $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ взаємно прості, то рівняння (8) є розв'язним. Нехай дві пари многочленів $u_1(\lambda), v_1(\lambda) \in F[\lambda]$ та $u_2(\lambda), v_2(\lambda) \in F[\lambda]$ є мінімальними розв'язками рівняння (8), тобто

$$a(\lambda)u_1(\lambda) + b(\lambda)v_1(\lambda) = c(\lambda), \qquad \deg v_1(\lambda) < \deg a(\lambda)$$

та

$$a(\lambda)u_2(\lambda) + b(\lambda)v_2(\lambda) = c(\lambda), \qquad \deg v_2(\lambda) < \deg a(\lambda).$$

Отже, маємо

$$a(\lambda)\big(u_1(\lambda) - u_2(\lambda)\big) = b(\lambda)\big(v_2(\lambda) - v_1(\lambda)\big).$$

Оскільки многочлени $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ взаємно прості і $\deg\big(v_2(\lambda) - v_1(\lambda)\big) < \deg a(\lambda)$, то остання рівність можлива лише у випадку, коли $v_2(\lambda) = v_1(\lambda)$. Звідси маємо $u_2(\lambda) = u_1(\lambda)$, що й доводить єдиність мінімального розв'язку.

Твердження доведено. ♦

Аналогічно доводимо і наступне

Твердження 2. *Нехай* $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda) \in F[\lambda]$, $\deg a(\lambda) = p \ge 1$, $\deg b(\lambda) = q \ge \ge 1$ *і* $\deg c(\lambda) = r$. *Рівняння* (8) *має єдиний мінімальний розв'язок* $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$ *такий, що* $\deg x_0(\lambda) < \deg b(\lambda)$, *тоді й тільки тоді, коли многочлени* $a(\lambda)$ *і* $b(\lambda)$ *є взаємно простими.*

З огляду на доведення твердження 1, зазначимо наступне. Нехай многочлени $a(\lambda), b(\lambda) \in F[\lambda]$ є взаємно простими і $\deg a(\lambda) + \deg b(\lambda) \ge \deg c(\lambda) - 1$. Тоді для рівняння (8) існує єдиний мінімальний розв'язок $x_0(\lambda), y_0(\lambda)$ такий, що $\deg y_0(\lambda) < \deg a(\lambda)$ і $\deg x_0(\lambda) < \deg b(\lambda)$.

Якщо ж многочлени $a(\lambda), b(\lambda) \in F[\lambda]$ є взаємно простими і $\deg a(\lambda) + + \deg b(\lambda) \le \deg c(\lambda)$, то для рівняння (8) існують два мінімальні розв'язки $x_0(\lambda)$, $y_a(\lambda)$ та $x_b(\lambda)$, $y_0(\lambda)$ такі, що перша пара многочленів є мінімальним розв'язком за степенем $a(\lambda)$, тобто $\deg y_a(\lambda) < \deg a(\lambda)$, а друга пара – мінімальним розв'язком за степенем $b(\lambda)$, тобто $\deg x_b(\lambda) < \deg b(\lambda)$.

Закономірно виникає задача про узагальнення тверджень 1 і 2 для многочленних матриць над полем. Розглянемо матричне рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda), \tag{10}$$

де $A(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$, $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$, $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$, а $X(\lambda)$ та $Y(\lambda)$ – невідомі матриці з $F_{m,n}[\lambda]$. Рівняння (10) є розв'язним тоді й тільки тоді, коли матриці $\begin{Vmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ 0_{n,m} & B(\lambda) \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} A(\lambda) & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & B(\lambda) \end{Vmatrix}$ еквівалентні [15, 17, 24]. Очевидно, що, якщо в рівнянні (10) матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є неособливими матрицями із взаємно простими визначниками, то рівняння (10) є розв'язним для довільної матриці $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. Відмітимо, що рівняння (10) має застосування в теорії систем керування як спеціальний математичний об'єкт, використання якого дозволяє ефективно розв'язувати широкий спектр задач систем керування (див. [7, 19, 28]).

Нехай пара матриць $X_0(\lambda), Y_0(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ є розв'язком рівняння (10). Кажуть, що *пара матриць* $X_0(\lambda), Y_0(\lambda)$ *є мінімальним розв'язком*, якщо виконується одна з умов: $\deg X_0(\lambda) < B(\lambda)$ або $\deg Y_0(\lambda) < \deg A(\lambda)$ [6]. S. Barnett [6] довів, що регулярні матриці $A(\lambda) \in M_{m,m}(F[\lambda])$ і $B(\lambda) \in M_{n,n}(F[\lambda])$ мають взаємно прості визначники тоді й тільки тоді, коли для довільної матриці $C(\lambda) \in M_{m,n}(F[\lambda])$ такої, що $\deg C(\lambda) \le \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda) - 1$, рівняння (6) має єдиний мінімальний розв'язок. Цей результат стимулював пошук інших підходів до встановлення умов існування мінімальних розв'язків для ширшого класу многочленних матриць (див. [3, 9, 13, 14, 18, 23, 27] та цитовану в них літературу). У [14] доведено, що умову Barnett-а про існування єдиного мінімального розв'язку можна послабити: *єдиний мінімальний розв'язок для рівняння* (10) *існує тоді й тільки тоді, коли* $(\deg A(\lambda), \deg B(\lambda)) = 1$ *і одна з матриць* $A(\lambda)$ *або* $B(\lambda)$ *є регулярною.*

У статті [23] доведено, що, якщо хоча б одна з неособливих і нерегулярних матриць $A(\lambda)$ або $B(\lambda)$ із взаємно простими визначниками регуляризується ($A(\lambda)$ зліва або $B(\lambda)$ справа [2]), то для рівняння (10) існує єдиний мінімальний розв'язок. Отже, умови зі статті [23] охоплюють значно ширший клас рівнянь вигляду (10), для яких існує єдиний мінімальний розв'язок. Методи побудови розв'язків рівняння (10) при тих чи інших обмеженнях наведено в роботах [3, 9, 14, 23, 27]. Нижче встановимо умови, за яких для рівняння (10) існують мінімальні розв'язки.

Твердження 3. *Нехай*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1}(\lambda) & a_{m-1,2}(\lambda) & \dots & a_{m-1,m-1}(\lambda) & 0 \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{m,m-1}(\lambda) & a_m(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{m,m}[\lambda]$$

– *неособлива нижня трикутна матриця,* $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ *і* $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. *Якщо рівняння* (10) *розв'язне, то серед його розв'язків існує розв'язок* $\tilde{X}(\lambda), \tilde{Y}(\lambda)$ *такий, що* $\tilde{Y}(\lambda) = 0_{m,n}$ *або степені елементів* k*-го рядка* $\|\tilde{y}_{k1}(\lambda) \;\; \tilde{y}_{k2}(\lambda) \;\; \dots \;\; \tilde{y}_{kn}(\lambda)\|$ *матриці* $\tilde{Y}(\lambda)$ *менші від степеня многочлена* $a_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Д о в е д е н н я. Нехай $X_0(\lambda), Y_0(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ – розв'язок рівняння (10), тобто $A(\lambda)X_0(\lambda) + Y_0(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$. Оскільки $A(\lambda)$ – неособлива нижня трикутна матриця, то, згідно з теоремою 1, для матриці $Y_0(\lambda)$ існує зображення $Y_0(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + \tilde{Y}(\lambda)$, де $P(\lambda), \tilde{Y}(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. Крім цього, $\tilde{Y}(\lambda) = 0_{m,n}$ або степені елементів k-го рядка матриці $\tilde{Y}(\lambda)$ є меншими від степеня многочлена $a_k(\lambda)$, тобто $\deg\|\tilde{y}_{k1}(\lambda) \;\; \tilde{y}_{k2}(\lambda) \;\; \dots \;\; \tilde{y}_{kn}(\lambda)\| < \deg a_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Отже, пара матриць $\tilde{X}(\lambda) = X_0(\lambda) + P(\lambda)B(\lambda)$, $\tilde{Y}(\lambda)$ є шуканим розв'язком рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$. Твердження доведено. ♦

Аналогічно доводимо такі твердження.

Твердження 4. *Нехай*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) & \dots & a_{1,m-1}(\lambda) & a_{1m}(\lambda) \\ 0 & a_2(\lambda) & a_{23}(\lambda) & \dots & a_{2,m-1}(\lambda) & a_{2m}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1}(\lambda) & a_{m-1,m}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_m(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{m,m}[\lambda]$$

– *неособлива верхня трикутна матриця,* $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ *і* $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$. *Якщо рівняння* (10) *розв'язне, то серед його розв'язків існує розв'язок* $\tilde{X}(\lambda), \tilde{Y}(\lambda)$ *такий, що* $\tilde{Y}(\lambda) = 0_{m,n}$ *або степені елементів* k*-го рядка* $\|\tilde{y}_{k1}(\lambda) \;\; \tilde{y}_{k2}(\lambda) \;\; \dots \;\; \tilde{y}_{kn}(\lambda)\|$ *матриці* $\tilde{Y}(\lambda)$ *менші від степенів многочлена* $a_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Лема 1. *Нехай*

$$A(\lambda)=\left\|\begin{matrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1}(\lambda) & a_{m-1,2}(\lambda) & \dots & a_{m-1,m-1}(\lambda) & 0 \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{m,m-1}(\lambda) & a_m(\lambda) \end{matrix}\right\| \in F_{m,m}[\lambda]$$

– неособлива нижня трикутна матриця, $0 \neq b(\lambda) \in F[\lambda]$ *і* $C(\lambda) \neq 0_{m,1}$ *– вектор із* $F_{m,1}[\lambda]$. *Многочлени* $a_i(\lambda)$ *є взаємно простими з многочленом* $b(\lambda)$, *тобто* $(a_i(\lambda), b(\lambda)) = 1$ *для всіх* $i = 1, 2, \dots, m$, *тоді й тільки тоді, коли рівняння*

$$A(\lambda)\overline{x}(\lambda) + \overline{y}(\lambda)b(\lambda) = C(\lambda) \tag{11}$$

має єдиний розв'язок $\overline{x}_0(\lambda)$, $\overline{y}_0(\lambda) = \left\| y_1^{(0)}(\lambda) \ \dots \ y_k^{(0)}(\lambda) \ \dots \ y_m^{(0)}(\lambda) \right\|^{\top} \in F_{m,1}[\lambda]$ *такий, що* $\deg y_k^{(0)}(\lambda) < \deg a_k(\lambda)$ *для всіх* $k = 1, 2, \dots, m$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $(a_i(\lambda), b(\lambda)) = 1$ для всіх $i = 1, 2, \dots, m$, то очевидно, що $\det(A(\lambda), b(\lambda)) = 1$. Отже, рівняння (11) є розв'язним для довільного $C(\lambda) \neq 0_{m,1}$. Згідно з твердженням 3, для рівняння (11) існують розв'язки

$$\overline{x}_j(\lambda) = \overline{u}_j(\lambda), \quad \overline{y}_j(\lambda) = \overline{v}_j(\lambda) = \left\| v_1^{(j)}(\lambda) \quad v_2^{(j)}(\lambda) \quad \dots \quad v_m^{(j)}(\lambda) \right\|^{\top} \in F_{m,1}[\lambda],$$
$$j = 1, 2,$$

такі, що $\deg v_k^{(j)}(\lambda) < \deg a_k(\lambda)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, m$. Припустимо, що існує дві відмінні пари розв'язків рівняння (11) $\overline{u}_1(\lambda), \overline{v}_1(\lambda)$ і $\overline{u}_2(\lambda), \overline{v}_2(\lambda)$. Із рівностей $A(\lambda)\overline{u}_j(\lambda) + \overline{v}_j(\lambda)b(\lambda) = C(\lambda)$, $j = 1, 2$, отримуємо $A(\lambda)(\overline{u}_1(\lambda) - \overline{u}_2(\lambda)) = (\overline{v}_2(\lambda) - \overline{v}_1(\lambda))b(\lambda)$. Оскільки

$$(a_k(\lambda), b(\lambda)) = 1 \qquad \text{і} \qquad \deg\left(v_k^{(2)}(\lambda) - v_k^{(1)}(\lambda)\right) < \deg a_k(\lambda),$$

то рівність $A(\lambda)(\overline{u}_1(\lambda) - \overline{u}_2(\lambda)) = (\overline{v}_2(\lambda) - \overline{v}_1(\lambda))b(\lambda)$ виконується лише у випадку, коли $\overline{v}_2(\lambda) = \overline{v}_1(\lambda)$. Отже, $\overline{u}_1(\lambda) = \overline{u}_2(\lambda)$, що й доводить єдиність вказаного розв'язку.

Навпаки, нехай для рівняння (11) існує єдиний розв'язок

$$\overline{x}(\lambda) = \overline{u}(\lambda) = \left\| u_1(\lambda) \quad u_2(\lambda) \quad \dots \quad u_m(\lambda) \right\|^{\top},$$

$$\overline{y}(\lambda) = \overline{v}(\lambda) = \left\| v_1(\lambda) \quad v_2(\lambda) \quad \dots \quad v_m(\lambda) \right\|^{\top}$$

такий, що $\deg v_i(\lambda) < \deg a_i(\lambda)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, m$. Отже, многочлени $v_i(\lambda)$ і $u_i(\lambda)$ визначені однозначно. Виконавши множення в лівій частині рівності $A(\lambda)\overline{u}(\lambda) + \overline{v}(\lambda)b(\lambda) = C(\lambda)$, отримуємо систему рівнянь

$$a_1(\lambda)u_1(\lambda) + v_1(\lambda)b(\lambda) = c_1(\lambda),$$

$$a_{21}(\lambda)u_1(\lambda) + a_2(\lambda)u_2(\lambda) + v_2(\lambda)b(\lambda) = c_2(\lambda),$$

$$a_{31}(\lambda)u_1(\lambda) + a_{32}(\lambda)u_2(\lambda) + a_3(\lambda)u_3(\lambda) + v_3(\lambda)b(\lambda) = c_3(\lambda),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$a_{m1}(\lambda)u_1(\lambda) + a_{m2}(\lambda)u_2(\lambda) + \dots + a_{m,m-1}(\lambda)u_{m-1}(\lambda) +$$
$$+ a_m(\lambda)u_m(\lambda) + v_m(\lambda)b(\lambda) = c_m(\lambda). \tag{12}$$

Оскільки $\deg v_1(\lambda) < \deg a_1(\lambda)$, то, згідно з твердженням 1, із першої рівності системи (12) отримуємо $(a_1(\lambda), b(\lambda)) = 1$. Із другої рівності системи (12) маємо $a_2(\lambda)u_2(\lambda) + b(\lambda)v_2(\lambda) = c_2(\lambda) - u_1(\lambda)a_{21}(\lambda)$. Звідси, на підставі того, що $\deg v_2(\lambda) < \deg a_2(\lambda)$ і твердження 1, отримуємо $(a_2(\lambda), b(\lambda)) = 1$.

Тепер із третьої рівності системи (12) отримуємо

$$a_3(\lambda)u_3(\lambda) + v_3(\lambda)b(\lambda) = c_3(\lambda) - a_{31}(\lambda)u_1(\lambda) - a_{32}(\lambda)u_2(\lambda).$$

Оскільки $\deg v_3(\lambda) < \deg a_3(\lambda)$, то, на підставі твердження 1, з останньої рівності та єдиності розв'язку отримуємо $(a_3(\lambda), b(\lambda)) = 1$. Продовжуючи ці міркування далі, через скінченну кількість кроків з останньої рівності системи рівнянь (12) одержуємо $(a_m(\lambda), b(\lambda)) = 1$. Лему доведено. ♦

Аналогічно доводиться наступна лема.

Лема 2. *Нехай*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) & \dots & a_{1,m-1}(\lambda) & a_{1m}(\lambda) \\ 0 & a_2(\lambda) & a_{23}(\lambda) & \dots & a_{2,m-1}(\lambda) & a_{2m}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1}(\lambda) & a_{m-1,m}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_m(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{m,m}[\lambda]$$

– неособлива верхня трикутна матриця, $0 \neq b(\lambda) \in F[\lambda]$ *і* $C(\lambda) \neq 0_{m,1}$ *– вектор із* $F_{m,1}[\lambda]$. *Многочлени* $a_i(\lambda)$ *є взаємно простими з многочленом* $b(\lambda)$, *тобто* $(a_i(\lambda), b(\lambda)) = 1$ *для всіх* $i = 1, 2, \dots, m$, *тоді й тільки тоді, коли рівняння*

$$A(\lambda)\overline{x}(\lambda) + \overline{y}(\lambda)b(\lambda) = C(\lambda)$$

має єдиний розв'язок $\overline{x}_0(\lambda)$, $\overline{y}_0(\lambda) = \begin{Vmatrix} y_1^{(0)}(\lambda) & \dots & y_k^{(0)}(\lambda) & \dots & y_m^{(0)}(\lambda) \end{Vmatrix}^\top \in$ $\in F_{m,1}[\lambda]$ *такий, що* $\deg y_k^{(0)}(\lambda) < \deg a_k(\lambda)$ *для всіх* $k = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 5. *Нехай матриця* $B(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$ *та нижня трикутна матриця*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1}(\lambda) & a_{m-1,2}(\lambda) & \dots & a_{m-1,m-1}(\lambda) & 0 \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{m,m-1}(\lambda) & a_m(\lambda) \end{Vmatrix} \in F_{m,m}[\lambda]$$

– неособливі і $C(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$, $C(\lambda) \neq 0_{m,n}$. *Визначники матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *є взаємно простими, тобто* $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = 1$, *тоді й тільки тоді, коли рівняння*

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda) \tag{13}$$

має єдиний розв'язок $X_0(\lambda), Y_0(\lambda)$ *такий, що степені елементів* k*-го рядка* $\begin{Vmatrix} y_{k1}(\lambda) & y_{k2}(\lambda) & \dots & y_{kn}(\lambda) \end{Vmatrix}$ *матриці* $Y_0(\lambda)$ *є меншими від степеня многочлена* $a_k(\lambda)$ *для всіх* $k = 1, 2, \dots, m$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Оскільки $(\det A(\lambda), b(\lambda)) = 1$, то рівняння (13) є розв'язним для довільної матриці $C(\lambda) \neq 0_{m,n}$. Згідно з твердженням 3, для рівняння (13) існує розв'язок $X(\lambda) = U(\lambda)$, $Y(\lambda) = V(\lambda)$ такий, що степені елементів k-го рядка матриці $V(\lambda)$ менші від степеня многочлена $a_k(\lambda)$, тобто

$$\deg\left\| v_{k1}(\lambda) \quad v_{k2}(\lambda) \quad \dots \quad v_{kn}(\lambda) \right\| < \deg a_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \dots, m.$$

Нехай $\det B(\lambda) = b(\lambda)$. Із рівності $A(\lambda)U(\lambda) - V(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ отримаємо

$$A(\lambda)U(\lambda)B^*(\lambda) + V(\lambda)b(\lambda) = C(\lambda)B^*(\lambda). \tag{14}$$

Покладемо

$$U(\lambda)B^*(\lambda) = \left\| \tilde{u}_1(\lambda) \quad \tilde{u}_2(\lambda) \quad \dots \quad \tilde{u}_n(\lambda) \right\|,$$

$$V(\lambda) = \left\| \overline{v}_1(\lambda) \quad \overline{v}_2(\lambda) \quad \dots \quad \overline{v}_n(\lambda) \right\|,$$

$$C(\lambda)B^*(\lambda) = \left\| \overline{c}_1(\lambda) \quad \overline{c}_2(\lambda) \quad \dots \quad \overline{c}_n(\lambda) \right\|,$$

де $\tilde{u}_i(\lambda), \overline{v}_i(\lambda), \overline{c}_i(\lambda) \in F_{m,1}[\lambda]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, що степінь j-го елемента $v_{ji}(\lambda)$ стовпця $\overline{v}_i(\lambda)$ менший від степеня многочлена $a_j(\lambda)$ для всіх $j = 1, 2, \dots, m$. Із рівності (14) маємо

$$A(\lambda)\tilde{u}_i(\lambda) + \overline{v}_i(\lambda)b(\lambda) = \overline{c}_i(\lambda), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

На підставі леми 1 стовпці $\tilde{u}_i(\lambda)$ і $\overline{v}_i(\lambda)$ визначаються однозначно. Оскільки $U(\lambda)B^*(\lambda) = \left\| \tilde{u}_1(\lambda) \quad \tilde{u}_2(\lambda) \quad \dots \quad \tilde{u}_n(\lambda) \right\|$ і матриця $B^*(\lambda)$ визначені однозначно, то матриці $U(\lambda)$ та $V(\lambda)$ при наведених на них умовах визначаються однозначно.

Достатність. Нехай пара матриць $U(\lambda), V(\lambda) \in F_{m,n}[\lambda]$ – єдиний розв'язок рівняння (13). При цьому степені елементів k-го рядка матриці $V(\lambda)$ менші від степеня многочлена $a_k(\lambda)$, тобто

$$\deg\left\| v_{k1}(\lambda) \quad v_{k2}(\lambda) \quad \dots \quad v_{kn}(\lambda) \right\| < \deg a_k(\lambda), \qquad k = 1, 2, \dots, m.$$

Оскільки $\det B(\lambda) \neq 0$, то для $B(\lambda)$ існує матриця $W(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$ така, що

$$B(\lambda)W(\lambda) = H_B(\lambda) = \left\| \begin{matrix} b_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21}(\lambda) & b_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1}(\lambda) & b_{n-1,2}(\lambda) & \dots & b_{n-1,n-1}(\lambda) & 0 \\ b_{n1}(\lambda) & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{n,n-1}(\lambda) & b_n(\lambda) \end{matrix} \right\|$$

– форма Ерміта матриці $B(\lambda)$, тобто $b_i(\lambda)$ – зведені многочлени для всіх $i = 1, 2, \dots, n$, і $\deg b_i(\lambda) > \deg b_{ij}(\lambda)$ для всіх $1 \le j < i \le n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Зауважимо, що $H_B(\lambda)$ і $W(\lambda)$ для матриці $B(\lambda)$ визначаються однозначно. Із рівності $A(\lambda)U(\lambda) + V(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ отримуємо

$$A(\lambda)\tilde{U}(\lambda) + V(\lambda)H_B(\lambda) = \tilde{C}(\lambda), \tag{15}$$

де $\tilde{U}(\lambda) = U(\lambda)W(\lambda)$, $\tilde{C}(\lambda) = C(\lambda)W(\lambda)$, які теж визначаються однозначно.

Очевидно, що пара матриць $\tilde{U}(\lambda)$, $V(\lambda)$ є розв'язком рівняння $A(\lambda)X(\lambda) - Y(\lambda)H_B(\lambda) = \tilde{C}(\lambda)$. І, навпаки, якщо $\tilde{U}(\lambda)$, $V(\lambda)$ – розв'язок цього рівняння, то пара $U(\lambda) = \tilde{U}(\lambda)W^{-1}(\lambda)$, $V(\lambda)$ є розв'язком рівняння (13).

Із рівності (15) отримуємо

$$A(\lambda)\tilde{U}(\lambda) + V(\lambda)\operatorname{diag}\left(b_1(\lambda), b_2(\lambda), \dots, b_n(\lambda)\right) = D(\lambda), \tag{16}$$

де
$$D(\lambda)=\tilde{C}(\lambda)-V(\lambda)\begin{Vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_{21}(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1}(\lambda) & b_{n-1,2}(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1}(\lambda) & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{n,n-1}(\lambda) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Покладемо
$$\tilde{U}(\lambda)=\begin{Vmatrix}\tilde{u}_1(\lambda) & \tilde{u}_2(\lambda) & \dots & \tilde{u}_n(\lambda)\end{Vmatrix},$$
$$V(\lambda)=\begin{Vmatrix}\overline{v}_1(\lambda) & \overline{v}_2(\lambda) & \dots & \overline{v}_n(\lambda)\end{Vmatrix},$$
$$D(\lambda)=\begin{Vmatrix}\overline{d}_1(\lambda) & \overline{d}_2(\lambda) & \dots & \overline{d}_n(\lambda)\end{Vmatrix},$$
де $\tilde{u}_j(\lambda),\overline{v}_j(\lambda),\overline{d}_j(\lambda)\in F_{m,1}[\lambda]$, $j=1,2,\dots,n$.

Нехай $1\le i_0\le n$. Із рівності (16) отримуємо
$$A(\lambda)\tilde{u}_{i_0}(\lambda)+\overline{v}_{i_0}(\lambda)b_{i_0}(\lambda)=\overline{d}_{i_0}(\lambda).$$

Зрозуміло, що вектори $\tilde{u}_{i_0}(\lambda)$ і $\overline{v}_{i_0}(\lambda)$ визначаються однозначно. Згідно твердженням 3, із останньої рівності отримуємо $(\det A(\lambda),b_{i_0}(\lambda))=1$. Оскільки $1\le i_0\le n$, то $(\det A(\lambda),H_B(\lambda))=1$. Отже, $(\det A(\lambda),B(\lambda))=1$.

Теорему доведено. ♦

З урахуванням твердження 4, леми 2 і теореми 5 аналогічно доводимо таку теорему.

Теорема 6. *Нехай*
$$A(\lambda)=\begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) & \dots & a_{1,m-1}(\lambda) & a_{1m}(\lambda) \\ 0 & a_2(\lambda) & a_{23}(\lambda) & \dots & a_{2,m-1}(\lambda) & a_{2m}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1}(\lambda) & a_{m-1,m}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_m(\lambda) \end{Vmatrix}\in F_{m,m}[\lambda]$$
– верхня трикутна матриця та матриця $B(\lambda)\in F_{n,n}[\lambda]$ є неособливими і $C(\lambda)\in F_{m,n}[\lambda]$, $C(\lambda)\ne 0_{m,n}$. Визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є взаємно простими, тобто $(\det A(\lambda),\det B(\lambda))=1$, тоді й тільки тоді, коли рівняння
$$A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$$
має єдиний розв'язок $X_0(\lambda),Y_0(\lambda)$ такий, що степені елементів k-го рядка $\begin{Vmatrix}y_{1k}(\lambda) & y_{2k}(\lambda) & \dots & y_{kn}(\lambda)\end{Vmatrix}$ матриці $Y_0(\lambda)$ менші від степенів многочлена $a_k(\lambda)$ для всіх $k=1,2,\dots,m$.

Із теореми 5 отримуємо таке твердження (див. [4]).

Наслідок 1. *Нехай $A(\lambda)\in M_{m,m}(F[\lambda])$ і $B(\lambda)\in M_{n,n}(F[\lambda])$ – неособливі матриці. Нехай, далі, матриця $W(\lambda)\in GL(m,F[\lambda])$ така, що*
$$H_A(\lambda)=A(\lambda)W(\lambda)=\begin{Vmatrix} h_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_{21}(\lambda) & h_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m-1,1}(\lambda) & h_{m-1,2}(\lambda) & \dots & h_{m-1,m-1}(\lambda) & 0 \\ h_{m1}(\lambda) & h_{m2}(\lambda) & \dots & h_{m,m-1}(\lambda) & h_m(\lambda) \end{Vmatrix}$$
є формою Ерміта матриці $A(\lambda)$. Визначники матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є взаємно простими тоді й тільки тоді, коли для довільної ненульової матри-

ці $C(\lambda)$ *із* $M_{m,n}(F[\lambda])$ *рівняння* $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ *має єдиний розв'язок* $X_0(\lambda), Y_0(\lambda)$ *такий, що степені елементів* k*-го рядка матриці* $Y_0(\lambda)$ *менші від степеня* $h_k(\lambda)$ *для всіх* $k=1,2,\dots,m$ *, тобто*

$$\deg\left\| y_{k1}(\lambda)\ y_{k2}(\lambda)\ \ \dots\ y_{kn}(\lambda)\right\| < \deg h_k(\lambda).$$

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
   Те саме: *Gantmacher F. R.* The theory of matrices. – New York: Chelsea Publ. Co., 1959. – Vol. 1: x+374 p.; Vol. 2: x+277 p.
   – http://science.sciencemag.org/content/131/3408/1216.2.
2. *Прокип В. М.* О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 9. – С. 1213–1219.
   Те саме: *Prokip V. M.* Divisibility and one-sided equivalence of polynomial matrices // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, No. 9. – P. 1077–1082.
   – https://doi.org/10.1007/BF01056600.
3. *Прокіп В. М.* Про подільність із залишком матриць над областю головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 2. – С. 41–50.
   Те саме: *Prokip V. M.* On the divisibility of matrices with remainder over the domain of principal ideals // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 1. – P. 45–55.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04524-2.
4. *Прокіп В. М.* Про розв'язність системи лінійних рівнянь над областю головних ідеалів // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 4. – С. 566–570.
   Те саме: *Prokip V. M.* On the solvability of a system of linear equations over the domain of principal ideals // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 4. – P. 633–637.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-014-0960-5.
5. *Санов И. Н.* Алгорифм Евклида и односторонние разложения на простые множители для матричных колец // Сиб. мат. журн. – 1967. – **8**, № 4. – С. 846–852.
6. *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1969. – **65**, No. 3. – P. 585–590.
   – https://doi.org/10.1017/S0305004100003364.
7. *Bengtsson G.* Output regulation and internal models – a frequency domain approach // Automatica. – 1977. – **13**, No. 4. – P. 333–345.
   https://doi.org/10.1016/0005-1098(77)90016-4.
8. *Brungs H.-H.* Left Euclidean rings // Pacific J. Math. – 1973. – **45,** No. 1. – P. 27–33. – https://doi.org/10.2140/pjm.1973.45.27.
9. *Chen S., Tian Y.* On solutions of generalized Sylvester equation in polynomial matrices // J. Franklin Inst. – 2014. – **351**, No. 12. – P. 5376–5385.
   – https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.09.024.
10. *Clark P. L.* A note on Euclidean order types // Order. – 2015. – **32**, No. 2. – P. 157–178. – https://doi.org/10.1007/s11083-014-9323-y.
11. *Cohn P. M.* Free rings and their relations. – London: Acad. Press, 1985. – xxii+ 588 p.
12. *Dadhwal M., Sharma R. P.* On euclidean norms and factorization in ternary semidomains // Arya Bhatta J. Math. Inform. – 2022. – **14**, No. 1. – P. 13–26.
   – http://dx.doi.org/10.5958/2394-9309.2022.00053.1.
13. *Emre E., Silverman L. M.* The equation $XR+QY=\Phi$: a characterization of solutions // SIAM J. Control Optim. – 1981. – **19**, No. 1. – P. 33–38.
   – https://doi.org/10.1137/0319003.
14. *Feinstein J., Bar-Ness Y.* On the uniqueness minimal solution to the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. – 1980. – **310**, No. 2. – P. 131–134. – https://doi.org/10.1016/0016-0032(78)90012-1.
15. *Gustafson W. H.* Roth's theorems over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 1979. – **23**. – P. 245–251. – https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90106-X.
16. *Ježek J.* New algorithm for minimal solution of linear polynomial equations // Kybernetika. – 1982. – **18**, No. 6. – P. 505–516.
17. *Jones J. (Jr.)* A Diophantine matrix equation // Am. Math. Month. – 1955. – **62**, No. 4. – P. 244–247. – https://doi.org/10.2307/2306696.
18. *Kaashoek M. A., Lerer L.* On a class of matrix polynomial equations // Linear Algebra Appl. – 2013. – **439**, No. 3. – C. 613–620.
   – https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.08.020.

19. *Kaczorek T*. Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – xvi+503 p.
20. *Kwon H.* Terminating Euclidean algorithm for a non-Noetherian Bezout domain // Linear Algebra Appl. – 2016. – **506**. – P. 10–32. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.05.017.
21. *Lezowski P*. On some Euclidean properties of matrix algebras // J. Algebra. – 2017. – **486**. – P. 157–203. – https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.05.018.
22. *Motzkin Th*. The Euclidean algorithm // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**, No. 12. – P. 1142–1146. – https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1949-09344-8.
23. *Prokip V. M*. About the uniqueness solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) - Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // Lobachevskii J. Math. – 2008. – **29**, No. 3. – P. 186–191. – https://doi.org/10.1134/S1995080208030098.
24. *Roth W. E*. The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **3**, No. 3. – P. 392–396.
25. *Samuel P*. About Euclidean rings // J. Algebra. – 1971. – **19**, No. 2. – P. 282–301. – https://doi.org/10.1016/0021-8693(71)90110-4.
26. *Sheydvasser A. S*. The twisted Euclidean algorithm: Applications to number theory and geometry // J. Algebra. –2021. – **569.** – P. 823–855. – https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.08.019.
27. *Tian Y., Xia C*. On the low-degree solution of the Sylvester matrix polynomial equation // Hindawi J. Math. – 2021. – **2021**. – Article ID 4612177. – https://doi.org/10.1155/2021/4612177.
28. *Wolovich W*. Skew prime polynomial matrices // IEEE Trans. Automat. Control. – 1978. – **23,** No. 5. – P. 880–887. – https://doi:10.1109/TAC.1978.1101854.

ON DIVISIBILITY WITH REMAINDER OF POLYNOMIAL MATRICES OVER AN ARBITRARY FIELD

The problem of divisibility with a remainder of polynomial matrices over an arbitrary field F is studied. Conditions are established under which, for a pair of polynomial matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ over a field F, there exists a unique pair of polynomial matrices $P(\lambda)$ and $Q(\lambda)$ over F such that $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$. The application of obtained results for finding minimal solutions of the Sylvester-type matrix equation is presented. It is proved that nonsingular polynomial matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ over F have relatively prime determinants if and only if the matrix equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ has a unique minimal solution for any nonzero matrix $C(\lambda)$.

***Key words*:** *polynomial matrix, divisibility of matrices, matrix equation, minimal solution, matrices with relatively prime determinants.*

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[3] Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано 10.01.23