

ВІБРАЦІЙНА ТЕРМОЧУТЛИВІСТЬ ПОПЕРЕДНЬО НАГРІТОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ

Досліджено задачу про власні частоти поперечних коливань круглої пластини, попередньо навантаженої у її площині внаслідок нагріву. Побудовано аналітичні розв'язки задачі термопружності для різних варіантів граничних умов на зовнішньому контурі круглої пластини. Записано частотні рівняння поперечних коливань для попередньо напруженої внаслідок рівномірного нагріву пластини. Проаналізовано вплив температури на вібраційні характеристики круглої пластини. За допомогою обчислювального експерименту досліджено задачу про визначення власних частот попередньо нагрітої круглої пластини при радіальній залежності температури за теорією пластин та в тривимірній постановці.

Ключові слова: теплообмін, термопружність, пластини, оперті пластини, защемлені пластини, власні частоти.

Вступ. Пластини різних форм широко використовують як конструктивні елементи у промисловості, авіа-, ракето- та машинобудуванні, будівництві, електроніці. Поперечна вібрація круглих пластин і мембран була предметом багатьох досліджень ще з кінця XIX століття. Із середини XX століття широко досліджували вплив теплових градієнтів і загальних форм гідростатичного навантаження на власні частоти та форми мод коливань пластин [6]. Для круглих пластин найчастіше досліджували випадки постійних поперечних напружень. Наприклад, для лінійних пружних систем було встановлено [5], що квадрат власних частот є лінійною функцією постійного навантаження. Цей результат підтверджено у [8].

Останнім часом інтерес до задач про коливання круглих пластин посилюється у зв'язку з моделюванням мікроелектромеханічних систем (microelectromechanical systems – MEMS). Для постійних поперечних напружень такі теоретичні та експериментальні дослідження виконано, наприклад, в [4], де досліджено режими коливань мікромеханічних дискових резонаторів із тонких плівок наводненого аморфного кремнію. Показано, що динамічна поведінка цих структур механічно описується як перехід між мембраною та пластиною внаслідок впливу залишкових напружень, що виникають під час нарощування плівки, і відмінності теплофізичних властивостей матеріалів інших шарів. Наближений розв'язок аналогічної задачі для змінних поперечних напружень подається в роботі [7].

У цій статті розглядаємо задачу про знаходження власних частот поперечних коливань круглої пластини, попередньо навантаженої в площині внаслідок нагріву рівномірними джерелами тепла та теплообміну з зовнішнім середовищем.

1. Формулювання задачі. Розглянемо круглу пластину з зовнішнім радіусом r_0 в циліндричній системі координат $r\theta z$ з початком у центрі пластини. Приймаємо, що джерела тепла рівномірно розподілені у пластині, а коефіцієнти теплообміну з навколишнім середовищем є сталими. Тоді температура пластини t задовольняє осесиметричне рівняння теплопровідності [2]

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} \left[t - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] = 0. \quad (1)$$

✉ nadiyahor@gmail.com

Тут q_v [Вт/м³] – об’ємна густина джерел тепла, λ [Вт/(м·К)] – коефіцієнт теплопровідності матеріалу, h [м] – товщина пластини, α_1, α_2 [Вт/(м²·К)] – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h/2$, t_1, t_2 [К] – температури середовища біля поверхонь $z = \pm h/2$.

Вважаємо, що на контурі $r = r_0$ пластини задано граничну умову третього роду

$$\left. \left(\frac{dt}{dr} \right) \right|_{r=r_0} = -\frac{\alpha_0}{\lambda} (t|_{r=r_0} - t_e), \quad (2)$$

де α_0 – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні $r = r_0$, t_e – температура зовнішнього до контуру диска середовища.

Осесиметричному полю температур відповідає осесиметричне поле температурних напружень, яке описується рівняннями [2]

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(r^2 \sigma_r)}{dr} + \alpha_L E (t - t_e) \right] = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{d(r \sigma_r)}{dr}, \quad (3)$$

де E [Па], α_L [К⁻¹] – модуль Юнга та коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу пластини. Для випадку суцільного круглого диска рівняння (3) розв’язують за умов симетрії в центрі та заданих напруженнях чи переміщеннях на контурі. В останньому випадку рівняння (3) потрібно доповнити співвідношеннями між напруженнями та деформаціями.

Після знаходження з (1)–(3) температурних напружень задача аналізу власних частот поперечних коливань круглої пластини зводиться [3] до розв’язування рівняння

$$\Delta^2 w - \frac{h}{D} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \left(\sigma_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{\rho h}{D} \omega^2 w = 0, \quad (4)$$

де $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини, ν, ρ – модуль Пуассона та густина матеріалу пластини. На зовнішньому контурі задаються відповідні умови закріплення.

Ставимо задачу знаходження значень власних частот ω , для яких існує нетривіальний розв’язок рівняння (4), та дослідження впливу на них температурного поля.

2. Побудова розв’язку. Розглянемо випадок сталого розподілу температури у диску (круглій пластині), для якого нескладно побудувати аналітичний розв’язок сформульованої задачі. З використанням загального розв’язку рівнянь (3), побудованого в роботі [2], робимо висновок про відсутність температурних напружень у диску вільного від силових навантажень на його контурі. Якщо ж контур круглої пластини жорстко зацемлено, то з використанням того ж загального розв’язку записуємо такий вираз для напружень:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{\alpha_L E \Theta}{1 - \nu}, \quad (5)$$

де Θ – рівномірний розподіл температурного поля у пластині. У цьому випадку рівняння (4) в безрозмірних координатах набуває вигляду

$$\Delta \Delta w - S \Delta w - \Omega^2 w = 0,$$

де

$$\Delta = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad S = -\frac{h r_0^2}{D} \frac{\alpha_L E \Theta}{1 - \nu} = -12 \frac{r_0^2}{h^2} (1 + \nu) \alpha_L \Theta,$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{D} \rho h r_0^4 \omega^2, \quad \zeta = \frac{r}{r_0}.$$

Це рівняння є ідентичним до класичних рівнянь коливань пластини за сталих початкових напружень [6]. Розв'язки таких рівнянь добре досліджені, що дає змогу адаптувати отримані для них власні форми коливань для круглої пластини

$$[A_n J_n(\xi \zeta) + B_n I_n(\eta \zeta)] \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix},$$

де $\xi^2 = \frac{S}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{S}} - 1 \right)$, $\eta^2 = \frac{S}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{S}} + 1 \right)$, $J_n(\xi)$ та $I_n(\eta)$ – звичайна

та модифікована функції Бесселя першого роду, A_n , B_n – довільні сталі.

У випадку жорсткого защемлення зовнішнього контуру круглої пластини частотні рівняння мають вигляд [6]

$$\xi \frac{J_{n+1}(\xi)}{J_n(\xi)} + \eta \frac{I_{n+1}(\eta)}{I_n(\eta)} = 0,$$

а у випадку шарнірного опирання –

$$\frac{\eta^2 + \xi^2}{1 - \nu} - \xi \frac{J_{n+1}(\xi)}{J_n(\xi)} - \eta \frac{I_{n+1}(\eta)}{I_n(\eta)} = 0.$$

Розглянуто також варіанти вільного краю та його пружного закріплення [6].

В умовах теплообміну із зовнішнім середовищем розв'язок задачі (1)–(3) можна побудувати аналітично. Зокрема, розв'язок задачі (1), (2) є таким:

$$t = \frac{q_v}{\lambda \varepsilon^2} + t_\infty - \frac{\alpha_0 \left(\frac{q_v}{\lambda \varepsilon^2} + t_\infty - t_e \right)}{\lambda \varepsilon I_1(\varepsilon r_0) + \alpha_0 I_0(\varepsilon r_0)} I_0(\varepsilon r). \quad (6)$$

Тут $t_\infty = (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) / (\alpha_1 + \alpha_2)$, $\varepsilon^2 = (\alpha_1 + \alpha_2) / (\lambda h)$.

Для випадку теплоізоляції плоских поверхонь пластини з (6) отримуємо такий вираз для температури:

$$t = t_e + \frac{q_v r_0}{2\alpha_0} + \frac{q_v}{4\lambda} (r_0^2 - r^2).$$

Звідси при $\alpha_0 = \infty$ за умови підтримання сталої температури $t = t_e$ зовнішньої поверхні пластини отримуємо квадратичну залежність температури від радіуса.

Методику побудови розв'язку рівнянь (3) в осесиметричному випадку для відомого осесиметричного поля температур викладено у монографії [2]. У загальному випадку для поля температур (6) у круглій пластині за умови неподатливості зовнішнього контуру в радіальному напрямку, $u_r|_{r=r_0} = 0$, отримуємо вирази для напружень через вироджену гіпергеометричну функцію ${}_1F_2(a; b, c; x)$:

$$\sigma_r = -\frac{\alpha_L E}{2} \left(\frac{q_v}{\lambda \varepsilon^2} + t_\infty - t_e \right) \left[\left[1 - A_0 \frac{2}{\varepsilon r} I_1(\varepsilon r) \right] + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + A_0 \left[{}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; \left(\frac{\varepsilon r_0}{2} \right)^2 \right) - 2 {}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 1; \left(\frac{\varepsilon r_0}{2} \right)^2 \right) \right] \right\} \right],$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\alpha_L E}{2} \left(\frac{q_v}{\lambda \varepsilon^2} + t_{\infty} - t_e \right) \left[\left[1 - A_0 \frac{2}{\varepsilon r} I_1(\varepsilon r) \right] - 2(1 - A_0 I_0(\varepsilon r)) - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + A_0 \left[{}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; \left(\frac{\varepsilon r_0}{2} \right)^2 \right) - 2 {}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 1; \left(\frac{\varepsilon r_0}{2} \right)^2 \right) \right] \right\} \right], \quad (7)$$

де $A_0 = \alpha_0 / [\lambda \varepsilon I_1(\varepsilon r_0) + \alpha_0 I_0(\varepsilon r_0)]$.

У випадку відсутності теплообміну з плоских поверхонь з використанням граничного переходу з (7) отримуємо такі вирази для напружень:

$$\sigma_r = -\frac{\alpha_L E q_v r_0^2}{4} \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\frac{1}{\alpha_0 r_0} + \frac{1}{4\lambda} \right) + \frac{1}{\alpha_0 r_0} + \frac{1}{4\lambda} \left(2 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right], \\ \sigma_{\theta} = -\frac{\alpha_L E q_v r_0^2}{4} \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\frac{1}{\alpha_0 r_0} + \frac{1}{4\lambda} \right) + \frac{1}{\alpha_0 r_0} + \frac{1}{4\lambda} \left(2 - 3 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right]. \quad (8)$$

Для температурних напружень у вигляді (7), навіть за квадратичної залежності температури від радіуса, не вдається побудувати аналітичний розв'язок рівняння (4). У [6] наведено результати аналізу власних частот круглих пластин з вільним контуром, коли функції попередніх напружень і температури були близькі до наведених вище часткових випадків. Аналіз проводився наближено методом Релея – Рітца. Тому для випадків задання початкових температурних напружень, відмінних від (5), аналіз власних частот рівняння (4) проводився чисельно.

2. Числові результати. Обчислення власних частот поперечних коливань для рівняння (4) при попередніх температурних напруженнях (5), (7) і їхніх часткових випадках виконано для круглої пластини зі склотекстоліту FR4 ($E = 22$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 1900$ кг/м³, $\alpha_L = 18 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹) з розмірами $r_0 = 50$ мм, $h = 1$ мм. Розрахунки за аналітичними розв'язками реалізовано за допомогою універсальних математичних пакетів (MathCAD) або засобів програмування з розвинутими бібліотеками обчислення спеціальних функцій (Python). При моделюванні за допомогою числових методів використовувались програмні засоби скінченно-елементного аналізу задач фізики та інженерії з можливостями моделювання зв'язаних (мультифізичних) задач (COMSOL Multiphysics, Elmer). Обчислення виконано для декількох перших власних частот ω_{mn} , де m – кількість внутрішніх модальних кілець, n – кількість модальних діаметрів, $m = 0, 1$, $n = 0, 1, 2$.

Для найпростішої зі сформульованих задач для випадку однорідного поля температур, коли температурні напруження мають вигляд (5), результати можуть бути отримані аналітично з точністю до знаходження коренів нелінійного рівняння, а також чисельно. В цьому випадку можна не лише аналізувати вплив температури на власні частоти поперечних коливань, але й порівнювати їх із відомими в літературі при заданні зусиль у площині пластини.

На рис. 1 зображено графіки залежності трьох найнижчих безрозмірних власних частот рівномірно прогрітої круглої пластини для двох варіантів кріплення зовнішнього краю: зацемлення та опертя. Криві, що відповідають випадку опертої пластини, обчислено при $-10 \leq \Theta \leq 5$.

Порівнюючи отримані результати з частотами для круглої пластини, напруженої в її площині заданими зусиллями, наведеними у [6], бачимо, що для діапазону $\Theta \in [-10.75, 10.75]$ відносна похибка не перевищувала 0.67%.

Для аналізу впливу температури на власні частоти, інформативнішою є відносна зміна $\delta_{\Omega}(\Theta)$ власних частот з перегрівом (див. рис. 2).

З результатів, наведених на рис. 2, робимо висновок, що чутливість власних частот круглих пластин із закріпленим контуром є щонайменше вдвічі вищою від чутливості прямокутних пластин [1]. Чутливість власних частот шарнірно опертих круглих пластин є істотно вищою, ніж у випадку жорстко зацемлених пластин.

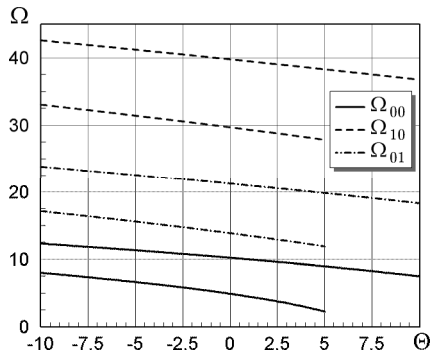


Рис. 1

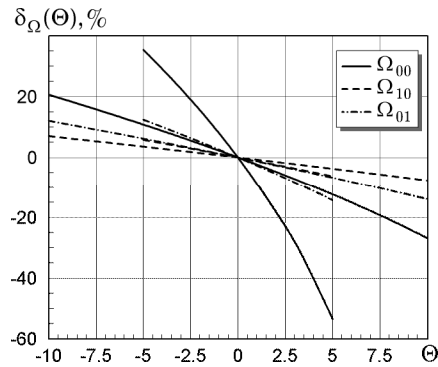


Рис. 2

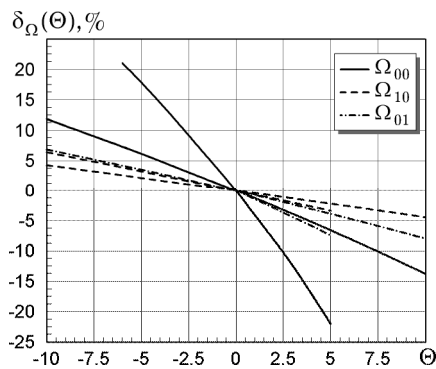


Рис. 3

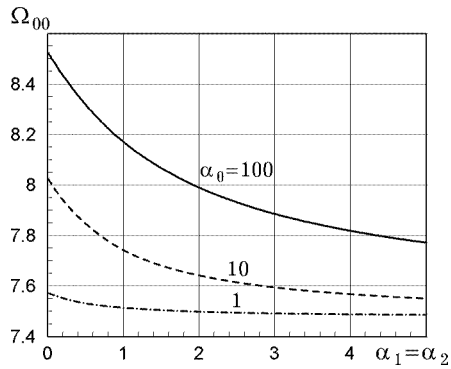


Рис. 4

При наявності джерел тепла у пластині поле температур і температурних напружень залежить від радіуса. Тоді задачу аналізу вібраційних характеристик поперечних коливань доводиться розв'язувати чисельно. У частковому випадку теплоізоляваності плоских поверхонь пластини, коли ці напруження мають вигляд (8), а зовнішній край підтримується при температурі навколишнього середовища t_e (при $\alpha_0 = \infty$), криві власних частот проходять через ті самі точки ненапруженої пластини ($\Theta = 0$), що і криві на рис. 1, але є більш пологими, тобто термочутливість пластин знижується. На рис. 3 наведено відносну зміну власних частот при зміні перегріву в центрі пластини, де температура найвища.

Вплив зміни значень коефіцієнтів тепловіддачі з плоских поверхонь та із зовнішнього контуру жорстко зацемленої пластини на основну частоту поперечних коливань при $\Theta = 10$ К в центрі пластини показано на рис. 4. Обчислення виконано, як і на рис. 3, для рівномірно розподілених джерел тепла, потужність яких вибрано так, щоб у центрі підтримувалося потрібне значення температури. Для цих розрахунків використано співвідношення (7) для температурних напружень, а наявність у них гіпергеометричної функції ${}_1F_2(a; b, c; x)$ зумовлює застосування апроксимацій ще на етапі їхнього задання. З використанням числових методів можна аналізувати як термопружну задачу в площині пластини, так і задачу аналізу поперечних коливань.

Для наведених результатів зміна температури вздовж радіуса є найменшою при $\alpha_0 = 1 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ та $\alpha_1 = \alpha_2 = 5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. В цьому випадку температурні напруження є майже постійними. Тому отримані значення основної частоти мають бути близькими до отриманих при заданому сталому значенні температури (рис. 1). Кривій на рис. 4 відповідає значення $\Omega_{00} = 7.49$, а кривій на рис. 1 – $\Omega_{00} = 7.48$. При $\alpha_0 = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ та $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.01 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ спостерігаємо ситуацію, коли плоскі поверхні є майже теплоізованими, а на зовнішньому контурі підтримується температура навколишнього середовища. Значення що відповідає кривим на рис. 4, – $\Omega_{00} = 8.52$, а значення при $\alpha_0 = \infty$ та $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, що відповідає кривим на рис. 3, – $\Omega_{00} = 8.73$. Різниця основних частот при різній тепловіддачі з зовнішнього контуру є більшою при низькій тепловіддачі з плоских поверхонь й істотно зменшується при зростанні цієї тепловіддачі. Наприклад, при зростанні $\alpha_1 = \alpha_2$ від нуля до $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ різниця частот для різних α_0 спадає втричі.

Висновки. Розв'язки задач термопружності для закріплених по контуру круглих пластин, отримані у вигляді спеціальних функцій, не дають можливості отримати аналітично значення власних частот поперечних коливань. Це вдається здійснити лише у частковому випадку постійних температурних напружень. Аналіз власних частот защемлених та опертих круглих пластин числовими методами показує, що залежність від температури власних частот круглих пластин є істотно вищою порівняно з аналогічними прямокутними пластинами. Вплив температури на частоти шарнірно опертих пластин є більшим, ніж у випадку защемлених пластин. Оскільки зміна характеристик теплообміну пластини з зовнішнім середовищем безпосередньо впливає на розподіл температури в ній і на її термопружний стан, то це відображається і на вібраційних характеристиках пластини. Зокрема, зміна коефіцієнта теплообміну з плоских поверхонь найбільш істотно впливає на зміну власних частот при високих коефіцієнтах теплообміну з зовнішнього контуру круглої пластини.

1. Горечко О. М., Горечко Н. О. Вплив температури на вібраційні характеристики прямокутної панелі // Наук. записки [Укр. акад. друкарства]. – 2003. – Вип. 6. – С. 111–114.
2. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 568 с.
4. Gualdino A., Chu V., Conde J. P. Study of the out-of-plane vibrational modes in thin-film amorphous silicon micromechanical disk resonators // J. Appl. Phys. – 2013. – **113** (17). – Article 174904. – 8 p.
– <https://doi.org/10.1063/1.4803681>.
5. Lawther R. On the straightness of eigenvalue interactions // Comput. Mech. – 2006. – **37**, No. 4. – P. 362–368.
– <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0746-6>.
6. Leissa A. W. Vibration of plates. – NASA SP-160. – Washington: NASA, 1969. – vii+353 p.
7. Luyun C., Hong Y. Vibration approximate analytical solutions of circular plate consideration of complex pre-stress distribution // J. Low Freq. Noise Vib. Act. Control. – 2020. – **39**, No. 4. – P. 987–1001.
– <https://doi.org/10.1177/1461348419852456>.
8. Szücs N., Szeidl G. Vibration of circular plates subjected to constant radial load in their plane // J. Comput. Appl. Mech. – 2017. – **12**, No. 1. – P. 57–76.
– <https://doi.org/10.32973/jcam.2017.004>.

VIBRATION THERMOSENSITIVITY OF A PREHEATED CIRCULAR PLATE

A problem on the natural frequencies of the transverse oscillations of a circular plate preloaded in its plane due to heating is investigated. Analytical solutions of the thermoelasticity problem are constructed for different variants of the boundary conditions on the periphery of a circular plate. The frequency equations are derived for the transverse oscillations of a plate prestressed due to the uniform heating. The influence of temperature on the vibration characteristics of a circular plate is analyzed. With the help of a computational experiment, the problem of determining the natural frequencies of a preheated circular plate with radial temperature dependence according to the theory of plates and in a three-dimensional formulation is investigated.

Key words: *heat exchange, thermoelasticity, plates, simply supported plates, clamped plates, eigenfrequencies.*

¹ Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
06.03.23