

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Побудовано наближений аналітично-числовий розв'язок динамічної задачі для нескінченного пружного шару з циліндричним жорстким включенням, на циліндричній поверхні якого задано умови жорсткого закріплення. На одній грані шару діє осесиметричне нормальне стискальне навантаження, а іншу грань зчеплено з абсолютно жорсткою основою. Для побудови полів переміщень та напружень у шарі до осесиметричних рівнянь руху застосовано інтегральні перетворення Лапласа та Вебера, що приводить до неоднорідної одновимірної векторної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Задачу розв'язано за допомогою матричного диференціального числення. Отримане інтегральне рівняння на скінченному інтервалі розв'язано методом ортогональних поліномів із визначенням характеру особливостей розв'язку на кінцях інтервалу. Досліджено нормальні напруження на циліндричній поверхні включення та на нижній грані пружного шару. Розв'язок проаналізовано для випадку усталених коливань.

Ключові слова: нескінченний пружний шар, циліндричне жорстке включення, динамічна задача, інтегральні перетворення, інтегральне рівняння.

Вступ. Під час розрахунку конструкцій, що перебувають під дією різних типів навантажень, виникає необхідність дослідження напруженого стану. Особливий вплив на напружений стан мають дефекти різної природи, такі як тріщини, тонкі включення, отвори, що спричиняють концентрацію напружень у пружних тілах та суттєво впливають на їхню міцність [3, 9, 12, 17]. Модельними об'єктами задач теорії пружності як у статичній, так і в динамічній постановках слугують пружні півпростір [25, 26, 27] та шар [1, 11, 14, 20, 22, 28], послаблені дефектами канонічної форми, в тому числі циліндричними. Складність таких задач обумовлена типом граничних умов та умов на межі дефекту. Найскладнішим є випадок, коли на дефекті задано умови першої основної задачі. У такій постановці наближені розв'язки відповідних задач запропоновано в роботах [1, 2, 6]. У випадку, коли на циліндричній поверхні дефекту задано умови гладкого контакту, вдається отримати точний розв'язок, наприклад для півпростору [29] та шару [20]. У [26] знайдено числовий розв'язок задачі за різних типів навантажень циліндричного включення, жорстко зчепленого з пружним півпростором. Розв'язок задачі для шару з циліндричним включенням наведено в [15], де застосовано векторне інтегральне перетворення типу Вебера без використання зображень Папковича – Нойбера. Задачу для пружного шару з циліндричним включенням з урахуванням власної ваги шару досліджено у [14]. З використанням методу інтегральних перетворень знайдено числовий розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності для циліндра скінченної довжини із закріпленою бічною поверхнею з урахуванням власної ваги [16]. У роботі [19] побудовано аналітичний розв'язок тривимірної задачі теорії пружності для однорідного ізотропного циліндра з вільною бічною поверхнею за дії нормального стискального навантаження на торцях. Рівновагу пружного скінченного циліндра під дією осесиметричного нормального навантаження досліджено в [23]. У роботі [11] розглянуто просторову задачу теорії пружності, коли порожнина розміщена у шарі паралельно до його граней, на межах шару та на межі порожнини задано переміщення.

Динамічні задачі теорії пружності розглянуто в роботах [18, 22, 30]. У монографіях [4, 7] досліджено динамічні задачі для некласичних областей

✉ fesenko@onu.edu.ua

і проблеми дифракції пружних хвиль, а також визначено динамічні напруження біля концентраторів напружень різної природи, в тому числі на циліндричній перешкоді, що дозволяє визначити дифракційне поле біля віддзеркалювальних поверхонь. Теорію гармонічних коливань і поширення хвиль у пружних тілах викладено в [5]. У [24] розглянуто задачу про динамічні напруження, що виникають біля циліндричного включення довільної густини, при поширенні плоскої хвилі у пружному середовищі. Динамічну задачу для нескінченного пружного ізотропного середовища з круговим циліндричним включенням розглянуто у [21], де визначено пружне гармонічне в часі поле, зумовлене включенням. Застосування методу граничних елементів дозволило отримати закономірності усталених коливань плоского жорсткого включення у тривимірному пружному тілі [8].

Запропонована робота є продовженням [20], де отримано точний розв'язок. Тут побудуємо наближений аналітично-числовий розв'язок.

1. Постановка задачі та її зведення до одновимірної. Розглянемо пружний шар $a \leq r < \infty$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$ у циліндричній системі координат (рис. 1). На грані $z = h$ діє осесиметричне нормальне нестационарне стискальне навантаження

$$\sigma_z(r, h, t) = -p(r, t), \quad \tau_{zr}(r, h, t) = 0, \quad (1)$$

а грань $z = 0$ жорстко закріплена:

$$u_z(r, 0, t) = 0, \quad u_r(r, 0, t) = 0. \quad (2)$$

Циліндрична поверхня включення жорстко зчеплена з пружним шаром:

$$u_r(a, z, t) = 0, \quad u_z(a, z, t) = 0. \quad (3)$$

Необхідно побудувати хвильове поле пружного шару $u_r(r, z, t) \equiv u(r, z, t)$, $u_z(r, z, t) \equiv w(r, z, t)$, яке задовольняє осесиметричні рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u(r, z, t) + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial z^2} + \frac{2}{\alpha + 1} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial r \partial z} = \\ = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial z^2} + \frac{2}{\alpha - 1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

з нульовими початковими умовами. Тут $\alpha = 3 - 4\mu$, μ – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву, ρ – густина.

Позначимо через $c^2 = G/\rho$, $c_1^2 = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} c^2$ швидкості поширення поперечної та поздовжньої хвиль та введемо безрозмірні координати

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \xi = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{ct}{a}, \quad \rho \in [1, \infty), \quad \xi \in [0, 1]. \quad (5)$$

Позначимо переміщення $u(r, z, t) = U(\rho, \xi, \tau)$, $w(r, z, t) = W(\rho, \xi, \tau)$ та запишемо рівняння руху (4) в нових координатах (5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} U + \alpha^2 \frac{x-1}{x+1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{2\alpha}{x+1} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \xi} &= \frac{x-1}{x+1} \frac{\partial^2 U(\rho, \xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \frac{x+1}{x-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{2\alpha}{x-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) &= \frac{\partial^2 W(\rho, \xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\alpha = a/h$.

Умови жорсткого закріплення (3) при $r = a$ з урахуванням заміни (5) набувають вигляду

$$U(1, \xi, \tau) = 0, \quad W(1, \xi, \tau) = 0. \quad (7)$$

Умови (1), (2) на гранях $z = h$ і $z = 0$ запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\rho, 1, \tau)}{\partial \rho} + \alpha \frac{\partial U(\rho, 1, \tau)}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial U(\rho, 1, \tau)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} U(\rho, 1, \tau) + \alpha \frac{1+x}{3-x} \frac{\partial W(\rho, 1, \tau)}{\partial \xi} &= -\frac{a}{G} \frac{x-1}{3-x} p(\rho, \tau), \end{aligned} \quad (8)$$

$$U(\rho, 0, \tau) = 0, \quad W(\rho, 0, \tau) = 0. \quad (9)$$

Послідовно застосуємо до системи (6) та граничних умов (8), (9) інтегральне перетворення Лапласа за змінною τ :

$$f_p(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} f(\rho, \xi, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad f(\rho, \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f_p(\rho, \xi) e^{p\tau} dp \quad (10)$$

та перетворення Вебера за змінною ρ [10]:

$$\begin{aligned} U_{p\lambda}(\xi) &= \int_1^{\infty} \rho U_p(\rho, \xi) \chi_1(\rho, \lambda) d\rho, & U_p(\rho, \xi) &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda U_{p\lambda}(\xi) \chi_1(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda, \\ W_{p\lambda}(\xi) &= \int_1^{\infty} \rho W_p(\rho, \xi) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho, & W_p(\rho, \xi) &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda W_{p\lambda}(\xi) \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\chi_i(\rho, \lambda) = J_i(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_i(\rho\lambda)J_1(\lambda)$; $J_i(\lambda)$, $N_i(\lambda)$ – відповідно функції Бесселя та Неймана, $i = 0, 1$.

Внаслідок цих перетворень отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь у просторі трансформант:

$$\begin{aligned} U_{p\lambda}''(\xi) - \frac{2}{x-1} \lambda_* W_{p\lambda}'(\xi) - \frac{x+1}{x-1} \lambda_*^2 U_{p\lambda}(\xi) - p^2 \frac{1}{\alpha^2} U_{p\lambda}(\xi) &= 0, \\ W_{p\lambda}''(\xi) + \frac{2}{x+1} \lambda_* U_{p\lambda}'(\xi) - \frac{x-1}{x+1} \lambda_*^2 W_{p\lambda}(\xi) - p^2 \frac{1}{\alpha^2} \frac{x-1}{x+1} W_{p\lambda}(\xi) &= \\ &= \frac{x-1}{x+1} \frac{1}{\alpha^2} \chi_0(1, \lambda) \chi(\xi), \end{aligned} \quad (12)$$

де $\lambda_* = \frac{1}{\alpha} \lambda$, $0 < \xi < 1$, $\chi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \xi)$ – невідома функція. Штрихом позначено похідну за аргументом.

Крайові умови (8), (9) у трансформантах (10), (11) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \lambda_* U_{p\lambda}(1) + \frac{1+x}{3-x} W_{p\lambda}'(1) &= -A_* p_{p\lambda}, & U_{p\lambda}'(1) - \lambda_* W_{p\lambda}(1) &= 0, \\ U_{p\lambda}(0) &= 0, & W_{p\lambda}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$p_{p\lambda} = \int_1^{\infty} \rho p_p(a\rho) \chi_0(\rho, \lambda) d\rho, \quad p_p(a\rho) = \int_0^{\infty} p\left(a\rho, \frac{a}{c}\tau\right) e^{-p\tau} d\tau,$$

$$A_* = \frac{a}{G\alpha} \frac{x-1}{3-x}. \quad (14)$$

Отриману одновимірну крайову задачу (12), (13) сформулюємо у векторній формі.

2. Розв'язання векторної крайової задачі у просторі трансформант. Введемо невідомий вектор трансформант переміщень $\mathbf{y}(z)$, матриці \mathbf{Q} , \mathbf{P} , \mathbf{T} , \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{I} та диференціальний оператор \mathcal{L}_2 :

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{p\lambda}(\xi) \\ W_{p\lambda}(\xi) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x-1} \\ \frac{1}{x+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{x+1}{x-1} & 0 \\ 0 & \frac{x-1}{x+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{x-1}{x+1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mu} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_2 \mathbf{y}(\xi) \equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}''(\xi) + 2\lambda_* \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}'(\xi) - \lambda_*^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{y}(\xi) - p^2 \frac{1}{\alpha^2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}(\xi). \quad (15)$$

Крайові умови (13) переформулюємо за допомогою граничних функціоналів

$$U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}(0), \quad U_1[\mathbf{y}(\xi)] = \lambda_* \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{y}(1) + \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{y}'(1). \quad (16)$$

Враховуючи (15), (16), задачу (12), (13) запишемо у векторній формі:

$$\mathcal{L}_2 \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{f}(\xi), \quad 0 < \xi < 1,$$

$$U_i[\mathbf{y}(\xi)] = \gamma_i, \quad i = 0, 1, \quad (17)$$

де $\mathbf{f}(\xi) = \frac{x-1}{x+1} \alpha^{-2} \chi_0(1, \lambda)(0, \chi(\xi))^\top$, $\gamma_0 = (0, 0)^\top$, $\gamma_1 = (-A_* p_{p\lambda}, 0)^\top$, символом « \top » позначено операцію транспонування.

Як показано

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}^{-1}(is) e^{-is(\xi-\eta)} ds. \quad (20)$$

Характеристична матриця $\mathbf{M}^{-1}(is)$ побудована на основі оператора \mathcal{L}_2 (15) і має вигляд

$$\mathbf{M}^{-1}(is) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} -s^2 - \lambda_*^2 \frac{x-1}{x+1} - p^2 \frac{1}{\alpha^2} \frac{x-1}{x+1} & \frac{2}{x-1} \lambda_* is \\ -\frac{2}{x+1} \lambda_* is & -s^2 - \lambda_*^2 \frac{x+1}{x-1} - p^2 \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{M} = \left[s^2 + \left(\sqrt{\lambda_*^2 + p^2 \frac{1}{\alpha^2}} \right)^2 \right] \left[s^2 + \left(\sqrt{\lambda_*^2 + \frac{x-1}{x+1} p^2 \alpha^{-2}} \right)^2 \right].$$

Обчислення фундаментальної матриці $\Phi(\xi, \eta)$ (20) проведено із використанням теорії функцій комплексної змінної. Після замикання контурів таким чином, щоб виконувались умови леми Жордана, та застосування до (20) основної теореми про лишки отримаємо

$$\Phi(\xi, \eta) = i \begin{cases} -\underset{s_1}{\operatorname{Re} s}(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is)) - \underset{s_3}{\operatorname{Re} s}(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is)), & \xi > \eta, \\ \underset{s_2}{\operatorname{Re} s}(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is)) + \underset{s_4}{\operatorname{Re} s}(e^{-is(\xi-\eta)} \mathbf{M}^{-1}(is)), & \xi < \eta, \end{cases}$$

де полюси першого порядку мають вигляд

$$s_1 = -i\sqrt{\lambda_*^2 + p^2} \frac{1}{\alpha^2}, \quad s_3 = -i\sqrt{\lambda_*^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} p^2} \frac{1}{\alpha^2},$$

$$s_2 = i\sqrt{\lambda_*^2 + p^2} \frac{1}{\alpha^2}, \quad s_4 = i\sqrt{\lambda_*^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} p^2} \frac{1}{\alpha^2}.$$

Внаслідок цього фундаментальна матриця-функція набуває вигляду

$$\frac{2p^2}{\alpha} \Phi(\xi, \eta) = e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}|\xi-\eta|} \begin{pmatrix} -\Delta_0 & -\operatorname{sgn}(\xi-\eta) \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \lambda \\ \operatorname{sgn}(\xi-\eta) \lambda & \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{\lambda^2}{\Delta_0} \end{pmatrix} +$$

$$+ e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}|\xi-\eta|} \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{\Delta_1} & \operatorname{sgn}(\xi-\eta) \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \lambda \\ -\operatorname{sgn}(\xi-\eta) \lambda & -\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\Delta_0 = \sqrt{\lambda^2 + p^2}, \quad \Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} p^2}. \quad (22)$$

Значення фундаментальної матриці-функції на граничних функціоналах (16) задачі має таку форму:

$$U_0[\Phi(\xi, \eta)] = \mathbf{I} \cdot \Phi(0, \eta), \quad U_1[\Phi(\xi, \eta)] = \lambda_* \mathbf{I}_1 \cdot \Phi(1, \eta) + \mathbf{I}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(1, \eta),$$

де

$$U_0[\Phi(\xi, \eta)] = \frac{\alpha}{2p^2} \begin{pmatrix} -\Delta_0 e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}\eta} + \frac{\lambda^2}{\Delta_1} e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\eta} & \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \lambda \left(-e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}\eta} + e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\eta} \right) \\ \lambda \left(-e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}\eta} + e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\eta} \right) & \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \left(\frac{\lambda^2}{\Delta_0} e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}\eta} - \Delta_1 e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\eta} \right) \end{pmatrix},$$

$$U_1[\Phi(\xi, \eta)] = \frac{e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(1-\eta)}}{2p^2} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3-\alpha} \lambda \Delta_0 & -\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{4}{3-\alpha} \lambda^2 \\ p^2 & \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{\lambda p^2}{\Delta_0} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}(1-\eta)}}{2p^2} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\Delta_1} \left(\frac{4}{3-\alpha} \lambda^2 + \frac{\alpha-1}{3-\alpha} p^2 \right) & \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{4}{3-\alpha} \lambda^2 + \frac{\alpha+1}{3-\alpha} p^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Згідно з методикою [13] побудуємо базисні матриці:

$$\Psi_j(\xi) = \mathbf{Y}_-(\xi) \mathbf{C}_j^0 + \mathbf{Y}_+(\xi) \mathbf{C}_j^1, \quad j = 0, 1.$$

Під матричною базисною системою розв'язків розуміємо систему функцій, що задовольняють рівняння

$$\mathcal{L}_2 \Psi_i(\xi) = \mathbf{0}, \quad 0 < \xi < 1,$$

$$U_j[\Psi_i(\xi)] = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1,$$

де оператор \mathcal{L}_2 та граничні функціонали означено в (15), (16), δ_{ij} – символ Кронекера. Матриці $\mathbf{Y}_\mp(\xi)$ – спадаючий та зростаючий при $\xi \rightarrow \infty$ розв'яз-

ки відповідного до (17) однорідного матричного рівняння $\mathcal{L}_2 \mathbf{Y}(\xi) = 0$, $0 < \xi < 1$, які побудовано в [20] із використанням контурного інтегрування:

$$\mathbf{Y}_{\mp}(\xi) = \frac{\alpha}{2p^2} \left[e^{\mp \frac{\Delta_0}{\alpha} \xi} \begin{pmatrix} \mp \Delta_0 & \frac{x+1}{x-1} \lambda \\ -\lambda & \pm \frac{x+1}{x-1} \frac{\lambda^2}{\Delta_0} \end{pmatrix} + e^{\mp \frac{\Delta_1}{\alpha} \xi} \begin{pmatrix} \pm \frac{\lambda^2}{\Delta_1} & -\frac{x+1}{x-1} \lambda \\ \lambda & \mp \frac{x+1}{x-1} \Delta_1 \end{pmatrix} \right],$$

\mathbf{C}_j^i , $i, j = 0, 1$, – матриці другого порядку зі сталими елементами:

$$\mathbf{C}_0^0 = -(U_1[\mathbf{Y}_-])^{-1} \cdot U_1[\mathbf{Y}_+] \cdot \mathbf{C}_0^1,$$

$$\mathbf{C}_0^1 = (U_0[\mathbf{Y}_+] - U_0[\mathbf{Y}_-] \cdot (U_1[\mathbf{Y}_-])^{-1} \cdot U_1[\mathbf{Y}_+])^{-1},$$

де $U_i[\mathbf{Y}_{\mp}]$, $i = 0, 1$, – значення спадаючого та зростаючого розв'язків \mathbf{Y}_{\mp} на граничних функціоналах, означених у (16).

Базисну матрицю-функцію $\Psi_1(\xi)$ побудовано в [20]:

$$\Psi_1(\xi) = \frac{\alpha}{\det \Psi_1} \begin{pmatrix} \frac{3-x}{x-1} \frac{\lambda \psi_{11}^1}{2} & -\psi_{12}^1 \\ \frac{3-x}{x-1} \frac{\psi_{21}^1}{2} & \lambda \psi_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\det \Psi_1 = 2\lambda^2(2\lambda^2 + p^2) - \left(4\lambda^4 + 2\lambda^2 p^2 + \frac{1}{2} p^4 \right) \operatorname{ch} \frac{\Delta_0}{\alpha} \operatorname{ch} \frac{\Delta_1}{\alpha} +$$

$$+ \frac{\lambda^2 \left(4\lambda^4 + \frac{2(3x+1)}{x+1} \lambda^2 p^2 + \frac{5x-3}{2(x+1)} p^4 \right)}{\Delta_0 \Delta_1} \operatorname{sh} \frac{\Delta_0}{\alpha} \operatorname{sh} \frac{\Delta_1}{\alpha},$$

функції ψ_{ij}^1 , $i, j = 1, 2$, є відомими, їхню структуру наведено в *Додатку 1*.

Базисна матриця-функція $\Psi_0(\xi)$ має таку форму:

$$\Psi_0(\xi) = \frac{e^{-\frac{2\Delta_0}{\alpha} \xi} e^{-\frac{2\Delta_1}{\alpha} \xi}}{\det \Psi_0} \begin{pmatrix} \Psi_{11}^0 & \Psi_{12}^0 \\ \Psi_{21}^0 & \Psi_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\det \Psi_0 = (\lambda^2 - \Delta_0 \Delta_1)^2 (\lambda^2 \Delta_0 \Delta_1 + g^2)^2, \quad g = \lambda^2 + \frac{1}{2} p^2, \quad (26)$$

функції ψ_{ij}^0 , $i, j = 1, 2$, є відомими, їхню структуру наведено в *Додатку 2*.

Добуток $\Psi_1(\xi) \gamma_1$ у розв'язку (18) відповідає точному розв'язку динамічної задачі для пружного шару, коли на циліндричній поверхні жорсткого включення задано умови гладкого контакту. Цей розв'язок побудовано у [20]:

$$\begin{pmatrix} U_{p\lambda}^0(\xi) \\ W_{p\lambda}^0(\xi) \end{pmatrix} = -A_* p_{p\lambda} \frac{\alpha}{\det \Psi_1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3-x}{x-1} \frac{\lambda \psi_{11}^1}{2} \\ -\psi_{21}^1 \end{pmatrix}.$$

Отже, враховуючи вираз (19) для матриці-функції Гріна $\mathbf{G}(\xi, \eta)$, де фундаментальна матриця-функція $\Phi(\xi, \eta)$ визначається формулою (21), а базисна система розв'язків $\Psi_0(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$ – формулами (24), (25), а також враховуючи значення (23) фундаментальної матриці на граничних функціоналах, запишемо розв'язок (18) неоднорідної векторної крайової задачі (17):

$$\begin{aligned}
U_{\rho\lambda}(\xi) &= \frac{\chi_0(1, \lambda)}{2\rho^2\alpha} \int_0^1 \chi(\eta) G_{12}(\eta, \xi, \lambda, \rho) d\eta + U_{\rho\lambda}^0(\xi), \\
W_{\rho\lambda}(\xi) &= \frac{\chi_0(1, \lambda)}{2\rho^2\alpha} \int_0^1 \chi(\eta) G_{22}(\eta, \xi, \lambda, \rho) d\eta + W_{\rho\lambda}^0(\xi),
\end{aligned} \tag{27}$$

де

$$\begin{aligned}
G_{12}(\eta, \xi, \lambda, \rho) &= \lambda \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \left[-e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}|\xi-\eta|} + e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}|\xi-\eta|} \right] - \frac{1}{\det \Psi_1} \times \\
&\times \left[\frac{4}{3-\alpha} \Psi_{11}^1 \left(-\lambda^2 e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(1-\eta)} + \left(\lambda^2 + \frac{\alpha-1}{4} \rho^2 \right) e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}(1-\eta)} \right) + \right. \\
&+ \Psi_{12}^1 \frac{\lambda \rho^2}{\Delta_1} e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(1-\eta)} \left. \right] - \frac{e^{-\frac{2\Delta_0}{\alpha}} e^{-\frac{2\Delta_1}{\alpha}}}{\det \Psi_0} \left[\Psi_{11}^0 \lambda \left(e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}\eta} - e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\eta} \right) + \right. \\
&+ \left. \Psi_{12}^0 \left(\frac{\lambda^2}{\Delta_0} e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}\eta} - \Delta_1 e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\eta} \right) \right],
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
G_{22}(\eta, \xi, \lambda, \rho) &= \frac{\lambda^2}{\Delta_0} e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}|\xi-\eta|} - \Delta_1 e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}|\xi-\eta|} - \\
&- \frac{1}{\det \Psi_1} \left[\frac{4}{3-\alpha} \Psi_{21}^1 \left(-\lambda^2 e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(1-\eta)} + \Delta_1^2 e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}(1-\eta)} \right) + \right. \\
&+ \left. \Psi_{22}^1 \frac{\lambda \rho^2}{\Delta_0} e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(1-\eta)} \right] - \frac{e^{-\frac{2\Delta_0}{\alpha}} e^{-\frac{2\Delta_1}{\alpha}}}{\det \Psi_0} \left[\Psi_{21}^0 \lambda \left(e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}\eta} - e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\eta} \right) + \right. \\
&+ \left. \Psi_{22}^0 \left(\frac{\lambda^2}{\Delta_0} e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}\eta} - \Delta_1 e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\eta} \right) \right].
\end{aligned} \tag{29}$$

На цьому етапі виконано перевірку, що розв'язок (27) задовольняє крайові умови задачі (17).

Застосувавши до отриманих трансформант переміщень обернене перетворення Лапласа за змінною ρ та обернене перетворення Вебера за змінною λ , отримуємо хвильове поле для шару:

$$\begin{pmatrix} U(\rho, \xi, \tau) \\ W(\rho, \xi, \tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_0^\infty \frac{\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} \begin{pmatrix} U_{p\lambda}(\xi) \chi_1(\rho, \lambda) \\ W_{p\lambda}(\xi) \chi_0(\rho, \lambda) \end{pmatrix} e^{p\tau} dp d\lambda. \tag{30}$$

3. Розв'язок у випадку усталених коливань та зведення задачі до інтегрального рівняння відносно невідомої функції $\chi(\eta) = \frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \eta)$. Роз-

глянемо детально випадок квазістатичного навантаження, коли коливання у пружному шарі відбуваються внаслідок дії гармонічного навантаження $p(r, t) = P(r)e^{-i\omega t}$, заданого на верхній грані пружного шару. Множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, надалі опускаємо та розглядаємо тільки амплітудні значення коливань. Покладемо $p = i\omega$, де ω – частота коливань, у всіх попередніх формулах.

Для визначення невідомої функції $\chi(\eta)$ виконаємо другу з крайових умов (7) жорсткого закріплення, $W(1, \xi, \tau) = 0$, задачі (6)–(9). Отримуємо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \chi(\eta) G_{22}(\xi, \eta, \lambda; \omega) \frac{\lambda \chi_0^2(1, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda d\eta = \\
& = -\frac{\alpha \omega^2}{G} \int_1^\infty r p(ar) \int_0^\infty \frac{\Psi_{21}^1(\omega)}{\det \Psi_1} \frac{\lambda \chi_0(r, \lambda) \chi_0(1, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} dr d\lambda. \quad (31)
\end{aligned}$$

Вигляд функцій $G_{22}(\xi, \eta, \lambda; \omega)$, $\Psi_{21}^1(\omega)$, $\det \Psi_1$ наведено у **Додатку 3**.

В інтегральному рівнянні (31) необхідно обчислити інтеграл на напівнескінченному проміжку за змінною λ . Вибір гілок багатозначних функцій Δ_0 , Δ_1 з (22), де $p = i\omega$, у випадку усталених коливань виконується на основі умов випромінювання Зоммерфельда.

Для випадку $\lambda > \omega$ маємо

$$\delta_0 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad \delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \omega^2},$$

а у випадку $\lambda < \omega$ маємо

$$\Delta_0 \rightarrow \sqrt{\lambda^2 + (i\omega)^2} = i\omega \delta_2, \quad \Delta_1 \rightarrow \sqrt{\lambda^2 + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} (i\omega)^2} = i\omega \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \delta_3,$$

$$\delta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}, \quad \delta_3 = \sqrt{1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}.$$

Під час аналізу поведінки підінтегральної функції у (31) при $\lambda \rightarrow \infty$ використано асимптотику циліндричних функцій при великих значеннях аргументу: $J_\alpha(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, $N_\alpha(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \sin\left(\lambda - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Отримано, що $\frac{\lambda \chi_0(r, \lambda) \chi_0(1, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} \rightarrow -2\pi$, $\frac{\lambda \chi_0^2(1, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} \rightarrow -2\pi$. Відношення

$\frac{\Psi_{21}^{1,1}(\omega)}{\det \Psi_1}$ у правій частині (31) при $\lambda \rightarrow \infty$ є невизначеністю типу $\frac{0}{0}$, роз-

кривши яку, отримаємо вираз $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi_{21}^{1,1}(\omega)}{\frac{\partial}{\partial \lambda} \det \Psi_1} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^4 e^{\frac{2\lambda}{\alpha}}}{2\lambda^6 e^{\frac{2\lambda}{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{2\lambda}{\alpha}}\right)}$, що

спадає на нескінченності. Аналогічно спадною на нескінченності є також функція $G_{22}^1(\xi, \eta, \lambda; \omega)$.

Розв'язок рівняння (31) шукаємо у вигляді розвинення за поліномами Якобі $P_n^{\gamma, \beta}(1 - 2\eta^2)$ [12]:

$$\chi(\eta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \eta^\gamma (1 - \eta)^\beta P_n^{\gamma, \beta}(1 - 2\eta) \chi_n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^{\gamma, \beta}(\eta) \chi_n, \quad (32)$$

де χ_n – невідомі сталі. Оскільки $\tau_{\rho\xi} = G\left(\frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial \xi}\right)$, то на циліндричній поверхні $\rho = 1$, $0 < \xi < 1$ жорсткого включення невідома функція $\chi(\eta) = \frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \eta)$ має механічний зміст дотичного напруження. Визначимо поряд-

док особливості невідомої функції на краях проміжку інтегрування. Для цього розглянемо клиноподібну область (у розглядуваному випадку кут дорівнює $\pi/2$). Таким чином, для $\xi = 0$ маємо ситуацію, коли обидві грані клина жорстко закріплені, оскільки включення жорстко закріплене, як і

нижня границя шару. Для випадку другої основної задачі розв'язок не має особливості, а значить, $\gamma = 0$. Для $\xi = 1$ маємо випадок, коли одна грань клина закріплена, а вздовж іншої діє стискальна сила. Тоді розв'язок має особливість, яка залежить від значення коефіцієнта Пуассона:

$$\mu = 1/4 \Rightarrow \beta = -0.25525, \quad \mu = 1/3 \Rightarrow \beta = -0.31001.$$

Підставивши подання розв'язку (32) в інтегральне рівняння (31) та виконавши процедуру ортогоналізації [12], отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення χ_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{nm} \chi_n = f_m, \quad m = 0, 1, \dots,$$

де

$$I_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\infty} G_{22}(\xi, \eta, \lambda; \omega) \frac{\lambda \chi_0^2(1, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} q_n^{0,\beta}(\eta) q_m^{0,\beta}(\xi) d\eta d\xi d\lambda,$$

$$f_m = -\frac{a\alpha\omega^2}{G} \int_1^{\infty} r p(ar) \int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{\Psi_{21}^1(\omega)}{\det \Psi_1} \frac{\lambda \chi_0(r, \lambda) \chi_0(1, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} q_m^{0,\beta}(\xi) dr d\xi d\lambda.$$

Систему розв'язували методом редукції. Знайдені сталі χ_n підставили в подання розв'язку (32), яке, в свою чергу, підставили у вирази для переміщень (30) у квазістатичному випадку. Таким чином, розв'язок вихідної задачі у випадку квазістатичних коливань має вигляд

$$U(\rho, \xi; \omega) = U^0(\rho, \xi; \omega) - \frac{1}{a\alpha\omega^2} \sum_{n=0}^N \chi_n \int_0^1 \int_0^{\infty} (1-\eta)^\beta P_n^{0,\beta}(1-2\eta^2) \times$$

$$\times \frac{\lambda \chi_0(1, \lambda) \chi_1(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} G_{12}(\eta, \xi, \lambda; \omega) d\eta d\lambda,$$

$$W(\rho, \xi; \omega) = W^0(\rho, \xi; \omega) - \frac{1}{a\alpha\omega^2} \sum_{n=0}^N \chi_n \int_0^1 \int_0^{\infty} (1-\eta)^\beta P_n^{0,\beta}(1-2\eta^2) \times$$

$$\times \frac{\lambda \chi_0(1, \lambda) \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} G_{22}(\eta, \xi, \lambda; \omega) d\eta d\lambda.$$

За отриманими переміщеннями побудуємо нормальне напруження на нижній грані пружного шару ($z = 0$):

$$\sigma_\xi(\rho, 0; \omega) = \sigma_\xi^0(\rho, 0; \omega) - \frac{G}{2a\alpha} \frac{x+1}{x-1} \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=0}^N \chi_n \int_0^1 \int_0^{\infty} (1-\eta)^\beta P_n^{0,\beta}(1-2\eta^2) \times$$

$$\times \frac{\lambda \chi_0(1, \lambda) \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} F_1(\eta, 0, \lambda; \omega) d\eta d\lambda, \quad \rho \in [1, \infty), \quad (33)$$

де

$$F_1(\eta, \xi, \lambda; \omega) = \lambda \frac{3-x}{1+x} G_{12}(\eta, \xi, \lambda; \omega) + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} G_{22}(\eta, \xi, \lambda; \omega).$$

Вирази для підінтегральної функції $F_1(\eta, \xi, \lambda; \omega)$ у (33) наведено в **Додатках 3, 4**.

Для нормального напруження на циліндричній поверхні $r = a$ жорсткого включення отримаємо

$$\sigma_\rho(1, \xi; \omega) = \sigma_\rho^0(1, \xi; \omega) - \frac{2G}{a\alpha(x-1)} \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=0}^N \chi_n \int_0^1 \int_0^{\infty} (1-\eta)^\beta P_n^{0,\beta}(1-2\eta^2) \times$$

$$\times \frac{\lambda \chi_0^2(1, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} F_2(\eta, \xi, \lambda; \omega) d\eta d\lambda, \quad (34)$$

де

$$F_2(\eta, \xi, \lambda; \omega) = \lambda \frac{\alpha + 1}{3 - \alpha} G_{12}(\eta, \xi, \lambda; \omega) + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} G_{22}(\eta, \xi, \lambda; \omega), \quad \xi \in [0, 1].$$

Вирази для підінтегральної функції $F_2(\eta, \xi, \lambda; \omega)$ у (34) наведено в **Додатках 3, 4**.

Переміщення $U^0(\rho, \xi; \omega)$, $W^0(\rho, \xi; \omega)$ та нормальні напруження $\sigma_\xi^0(\rho, 0; \omega)$, $\sigma_\rho^0(1, \xi; \omega)$, що відповідають точному розв'язку задачі, коли на циліндричній поверхні жорсткого включення задано умови гладкого контакту, побудовано в [20], де наведено їхні вирази для двох випадків: коли нижня границя шари жорстко закріплена або перебуває в умовах гладкого контакту з жорсткою основою.

4. Аналіз нормальних напружень для частот, коли $\omega \rightarrow 0$ і $\omega \rightarrow \infty$. Щоб порівняти отримані результати з аналогічною задачею у статичній постановці [14], розглянемо границі нормальних напружень (33), (34) при $\omega \rightarrow 0$. У виразах для напружень підінтегральні функції мають невизначеність типу $\frac{0}{0}$ при $\omega \rightarrow 0$, яка розкривається в нуль. Тому можемо зробити висновок, що аналітичні формули для статичного випадку не можна вивести на основі розв'язків, отриманих для динамічної задачі. Порівняння, як буде показано нижче, виконано чисельно для невеликих значень власних частот.

Для великих значень частот коливань виконаємо в (33), (34) деякі перетворення. До функцій $\delta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}$, $\delta_3 = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{\lambda}{\omega}\right)^2}$ застосуємо розвинення в ряд $\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \dots$, $|x| \leq 1$, та поділимо чисельник та знаменник підінтегральної функції на старший степінь ω . Для нормального напруження $\sigma_\xi^0(\rho, 0; \omega)$ отримаємо такі формули:

$$\sigma_\xi^0(\rho, 0; \omega) = \int_1^\infty r p(ar) \int_0^\infty \frac{\chi_0(r, \lambda) \chi_0(\rho, \lambda)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} \frac{\lambda f_0 \Phi(\lambda; \omega)}{\det \Psi} d\lambda dr, \quad \rho \in [1, \infty),$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda; \omega) &= \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \right) \cos \left(\frac{\omega}{\alpha} f_1 \right) + \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \cos \left(\frac{\omega}{\sqrt{\alpha_1} \alpha} f_2 \right), \\ \det \Psi &= 8 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^4 - \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[1 - 5 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^4 - \alpha_3 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^6 \right] \times \\ &\quad \times \cos \left(\frac{\omega}{\alpha} f_1 \right) \cos \left(\frac{\omega}{\sqrt{\alpha_1} \alpha} f_2 \right) + \alpha_4 \left[\left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 + \alpha_5 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^4 - \right. \\ &\quad \left. - 4 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^6 \right] \sin \left(\frac{\omega}{\alpha} f_1 \right) \sin \left(\frac{\omega}{\sqrt{\alpha_1} \alpha} f_2 \right), \\ \alpha_1 &= \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}, \quad \alpha_2 = \frac{8\alpha + 9}{2(\alpha + 1)}, \quad \alpha_3 = \frac{63\alpha^3 - 51\alpha^2 - 97\alpha + 81}{8(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)}, \\ \alpha_4 &= \frac{5\alpha - 3}{2(\alpha - 1)}, \quad \alpha_5 = \frac{3\alpha + 1}{5\alpha - 1}, \end{aligned}$$

$$f_0 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{2(\alpha + 1)} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^4 + \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 1}{8(\alpha - 1)^2} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^6 - \dots,$$

$$f_1 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^4 - \dots,$$

$$f_2 = 1 - \frac{1}{2} \alpha_1 \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{8} \alpha_1^2 \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^4 - \dots$$

5. Аналіз числових розрахунків. Обчислення виконаємо для шару з жорстким циліндричним включенням, радіус a якого дорівнює половині товщини шару ($a = h/2$, $\alpha = a/h = 1/2$), під дією нормального до поверхні шару навантаження. Розглянемо два випадки навантажень.

Через I° позначимо випадок, коли задано гармонічне навантаження $p(r, t) = \delta(r - b)e^{i\omega t}$, де $\delta(r)$ – функція Дірака, сила одиничної інтенсивності зосереджена вздовж кола радіуса b , $b > a$. У цьому випадку трансформанта навантаження (14) має вигляд

$$P_{p\lambda} = \frac{b}{a} \chi_0 \left(\frac{b}{a}, \lambda\right) = J_0 \left(\frac{b}{a} \lambda\right) N_1(\lambda) - N_0 \left(\frac{b}{a} \lambda\right) J_1(\lambda).$$

Через II° позначимо випадок, коли сила $p(r, t) = re^{i\omega t}$ діє на ділянці $r \in [a, 2a]$. Розглянуто різні матеріали шару та різні значення власних частот. Визначено нормальне напруження $\sigma_\rho(1, \xi; \omega)$, $\xi \in [0, 1]$, на циліндричній поверхні $\rho = 1$ жорсткого включення та нормальне напруження $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$, $\rho > 1$, на нижній грані шару $z = 0$.

На рис. 2 та рис. 3 наведено порівняння нормальних напружень $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$ на нижній грані шару $z = 0$ для різних значень радіуса кола b , вздовж якого діє стискальна зосереджена сила $p(r) = \delta(r - b)$ на верхній грані шару $z = h$ для випадку навантаження I° . Сила одиничної інтенсивності зосереджена на відстанях $b = 2a$ (рис. 2) та $b = 4a$ (рис. 3).

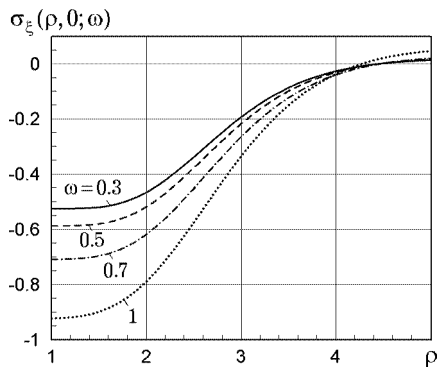


Рис. 2. $p(r) = \delta(r - b)$, $b = 2a$.

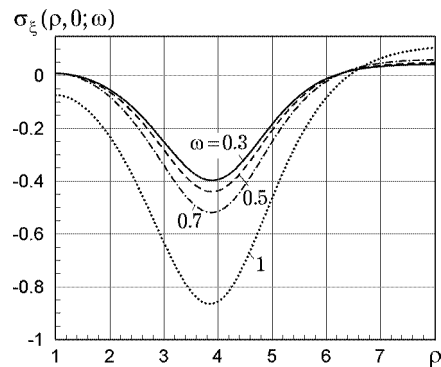


Рис. 3. $p(r) = \delta(r - b)$, $b = 4a$.

Конфігурація графіків для *невеликих* значень частот ω однакова, для $b = 2a$ (рис. 2) максимальні значення досягаються навколо включення, а з віддаленням сили (для $b = 4a$, рис. 3) максимальні значення напружень спостерігаємо під точкою, де діє зосереджена сила. Зі зменшенням частоти ω амплітуда коливань спадає. Чим ближче розміщена сила до включення, тим більшими є напруження навколо нього на нижній грані шару. Результати узгоджуються зі статикою [14]. Відмітимо, що також при розрахунках

було отримано, що при збільшенні товщини шару h амплітуда коливань зменшується, що пояснюється поглинанням шаром хвильової енергії.

На рис. 4 та рис. 5 показано реакцію шару зі сталі ($\mu = 1/4$) та каучуку ($\mu = 1/2$) відповідно на силу, зосереджену вздовж кола $b = 2a$. Графіки напружень $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$ для значень коефіцієнтів Пуассона $\mu = 1/4$ (рис. 4) та $\mu = 1/3$ (рис. 5) практично ідентичні з дещо більшою амплітудою для $\mu = 1/3$. Для частот власних коливань вибрано $\omega = 1, 2, 3, 4$. При частотах $\omega \geq 3$ чітко візуалізується коливний процес, амплітуда коливань для каучуку (рис. 5) є більшою, ніж для сталі (рис. 4), що пояснюється більшою деформацією каучуку внаслідок дії сили. Для обчислень із частотами $\omega \geq 3$ краще використовувати асимптотичні формули, як було показано в п. 4, оскільки інакше спостерігаємо нестабільність обчислень. Зі зростанням частоти коливань відбувається збільшення абсолютних значень нормальних напружень. Максимального значення напруження досягають навколо жорсткого включення та під ділянкою, де діє зосереджена на верхній грані шару сила. З віддаленням від включення напруження зменшуються.

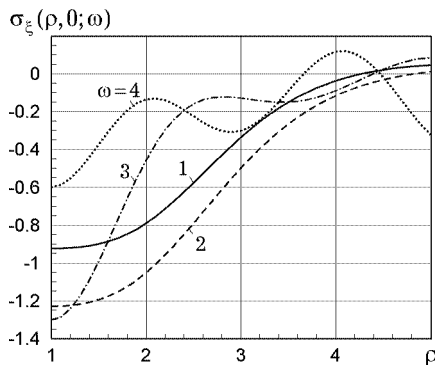


Рис. 4. $p(r) = \delta(r - b)$, $b = 2a$, $\mu = 1/4$.

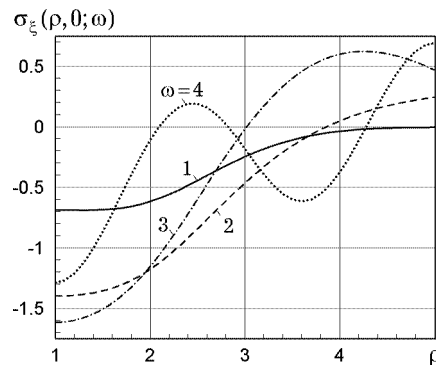


Рис. 5. $p(r) = \delta(r - b)$, $b = 2a$, $\mu = 1/2$.

На рис. 6 зображено графіки нормального напруження $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$ для випадку II° . Порівнюючи рис. 4 та рис. 6, де вибрано однакові параметри: $\mu = 1/4$, $\alpha = a/h = 1/2$, бачимо, що у випадку II° амплітуди коливань є вдвічі більшими, ніж у випадку I° , і з віддаленням від включення напруження спадають.

Зауважимо, що при розрахунку реальних конструкцій необхідно враховувати власну вагу матеріалу. Як було показано в роботі [14], для цього у формулах для напружень враховується доданок, який є елементарним розв'язком задачі для шару $\sigma^\gamma = -\gamma h$, де γ – питома вага матеріалу, h – товщина шару. Таким чином, щоб отримати напруження, що виникають на нижній грані під дією зосередженої сили на верхній грані та власної ваги шару, необхідно на рис. 2 – рис. 5 графіки $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$ перенести паралельно вниз. У цьому випадку відшарування грані шару або не спостерігається, або відбувається зі зсувом вздовж радіуса.

На рис. 7 наведено розподіли нормальних напружень $\sigma_\rho(1, \xi; \omega)$ на циліндричній поверхні жорсткого включення для випадку навантажень I° . Зі збільшенням частоти ω діючого на верхній грані шару $z = h$ навантаження величини нормальних напружень зростають, причому при підході вздовж циліндричної поверхні включення до верхньої грані досягають максимальних значень. Відшарування не спостерігається.

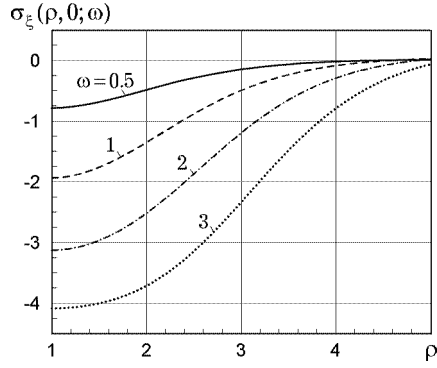


Рис. 6. $p(r) = r$, $r \in [a, 2a]$.

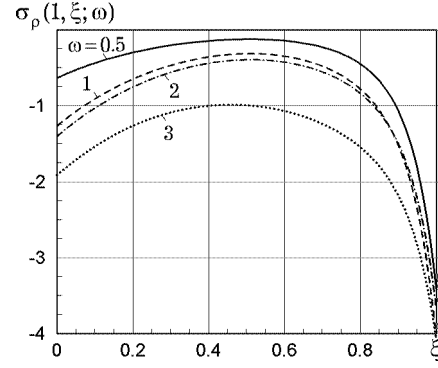


Рис. 7. $p(r) = \delta(r - b)$, $b = 2a$.

Висновки. Отримано наближений аналітично-числовий розв'язок динамічної задачі для нескінченного пружного шару з циліндричним жорстким включенням, поверхня якого жорстко зчеплена з шаром. Застосування інтегральних перетворень Лапласа та Вебера безпосередньо до рівнянь руху дозволило звести задачу до одновимірної векторної задачі, яку, в свою чергу, було зведено до інтегрального рівняння на скінченному проміжку. Рівняння розв'язано наближено методом ортогональних поліномів із визначенням характеру особливості розв'язку на кінцях інтервалу. Розглянуто випадок квазістатичних коливань. Досліджено залежності від матеріалу шару та частоти коливань нормальних напружень на циліндричній поверхні включення та на нижній грані шару, що виникають під дією нормального осесиметричного динамічного навантаження на верхній грані шару. Запропонований підхід можна застосувати при розв'язуванні змішаних динамічних задач теорії пружності для інших типів крайових умов на бічних гранях шару та циліндричній поверхні дефекту.

Додаток 1. Компоненти базисної матриці $\Psi_1(\xi)$ у формулі (19):

$$\begin{aligned} \psi_{11}^1 &= -(2\lambda^2 + p^2) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}(1 - \xi)\right) - 2\lambda^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}(1 - \xi)\right) - \\ &\quad - 2\Delta_0\Delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh}\frac{\Delta_1}{\alpha} - \frac{\lambda^2(2\lambda^2 + p^2)}{\Delta_0\Delta_1} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh}\frac{\Delta_0}{\alpha} + \\ &\quad + 2\lambda^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch}\frac{\Delta_1}{\alpha} + (2\lambda^2 + p^2) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch}\frac{\Delta_0}{\alpha}, \\ \psi_{12}^1 &= -\lambda^2\Delta_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}(1 - \xi)\right) - \frac{\lambda^2(\lambda^2 + p^2/2)}{\Delta_1} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}(1 - \xi)\right) - \\ &\quad - \Delta_0(\lambda^2 + p^2/2) \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch}\frac{\Delta_1}{\alpha} + \\ &\quad + \frac{\lambda^2(\lambda^2 + p^2/2)}{\Delta_1} \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh}\frac{\Delta_1}{\alpha} - \\ &\quad - \frac{\lambda^4}{\Delta_1} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{ch}\frac{\Delta_0}{\alpha} + \lambda^2\Delta_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi\right) \operatorname{sh}\frac{\Delta_0}{\alpha}, \\ \psi_{21}^1 &= -\frac{\lambda^2(2\lambda^2 + p^2)}{\Delta_0} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha}(1 - \xi)\right) - 2\lambda^2\Delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}(1 - \xi)\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda^2 \Delta_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha} \xi\right) \operatorname{sh} \frac{\Delta_1}{\alpha} + \frac{\lambda^2(2\lambda^2 + \rho^2)}{\Delta_0} \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi\right) \operatorname{sh} \frac{\Delta_0}{\alpha} - \\
& - \frac{2\lambda^4}{\Delta_0} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha} \xi\right) \operatorname{ch} \frac{\Delta_1}{\alpha} - (2\lambda^2 + \rho^2) \Delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi\right) \operatorname{ch} \frac{\Delta_0}{\alpha}, \\
\psi_{22}^1 = & -\lambda^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha} (1 - \xi)\right) - (\lambda^2 + \rho^2/2) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha} (1 - \xi)\right) + \\
& + (\lambda^2 + \rho^2/2) \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha} \xi\right) \operatorname{ch} \frac{\Delta_1}{\alpha} - \frac{\lambda^2(\lambda^2 + \rho^2/2)}{\Delta_0 \Delta_1} \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_0}{\alpha} \xi\right) \operatorname{sh} \frac{\Delta_1}{\alpha} + \\
& + \lambda^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi\right) \operatorname{ch} \frac{\Delta_0}{\alpha} - \Delta_0 \Delta_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi\right) \operatorname{sh} \frac{\Delta_0}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Додаток 2. Компоненти базисної матриці $\Psi_0(\xi)$ у формулі (25).

Використано такі позначення:

$$\begin{aligned}
g &= \lambda^2 + \frac{\rho^2}{2}, \quad f_{\pm} = g^2 \pm \lambda^2 \Delta_0 \Delta_1, \\
\psi_{11}^0 &= a_{11} c_{11} + a_{12} c_{21}, \quad \psi_{21}^0 = a_{21} c_{11} + a_{22} c_{21}, \\
\psi_{12}^0 &= a_{11} c_{12} + a_{12} c_{22}, \quad \psi_{22}^0 = a_{21} c_{12} + a_{22} c_{22}, \\
a_{11} &= \Delta_0 e^{\frac{\Delta_0}{\alpha} \xi} - \frac{\lambda^2}{\Delta_1} e^{\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi} - \frac{1}{f_-} \left\{ \Delta_0 e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(\xi-1)} \left(2\lambda^2 g e^{\frac{\Delta_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\Delta_0}{\alpha}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda^2}{\Delta_1} e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}(\xi-1)} \left(2g \Delta_0 \Delta_1 e^{\frac{\Delta_0}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\Delta_1}{\alpha}} \right) \right\}, \\
a_{12} &= \lambda \frac{x+1}{x-1} \left[e^{\frac{\Delta_0}{\alpha} \xi} - e^{\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi} - \frac{1}{f_-} \left\{ e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(\xi-1)} \left(2g \Delta_0 \Delta_1 e^{\frac{\Delta_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\Delta_0}{\alpha}} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}(\xi-1)} \left(2g \lambda^2 e^{\frac{\Delta_0}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\Delta_1}{\alpha}} \right) \right\} \right], \\
a_{21} &= \lambda \left[-e^{\frac{\Delta_0}{\alpha} \xi} + e^{\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi} - \frac{1}{f_-} \left\{ e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(\xi-1)} \left(2g \lambda^2 e^{\frac{\Delta_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\Delta_0}{\alpha}} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}(\xi-1)} \left(2g \Delta_0 \Delta_1 e^{\frac{\Delta_0}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\Delta_1}{\alpha}} \right) \right\} \right], \\
a_{22} &= \frac{x+1}{x-1} \left[-\frac{\lambda^2}{\Delta_0} e^{\frac{\Delta_0}{\alpha} \xi} + \Delta_1 e^{\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi} - \frac{1}{f_-} \left\{ \frac{\lambda^2}{\Delta_0} e^{-\frac{\Delta_0}{\alpha}(\xi-1)} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(2g \Delta_0 \Delta_1 e^{\frac{\Delta_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\Delta_0}{\alpha}} \right) + \Delta_1 e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}(\xi-1)} \left(2\lambda^2 g e^{\frac{\Delta_0}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\Delta_1}{\alpha}} \right) \right\} \right], \\
c_{11} &= -\frac{x+1}{x-1} \frac{1}{\Delta_0} \left[\lambda^2 - \Delta_0 \Delta_1 + \frac{b_{22}}{f_-} \right], \quad c_{12} = \frac{x+1}{x-1} \lambda c_{21},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21} &= \lambda \frac{b_{12}}{f_-}, & c_{22} &= -\frac{1}{\Delta_1} \left[\lambda^2 - \Delta_0 \Delta_1 + \frac{b_{11}}{f_-} \right], \\
b_{11} &= 4\lambda^2 g \Delta_0 \Delta_1 e^{\frac{\Lambda_0}{\alpha}} e^{\frac{\Lambda_1}{\alpha}} - \lambda^2 f_+ e^{\frac{2\Lambda_1}{\alpha}} - \Delta_0 \Delta_1 f_+ e^{\frac{2\Lambda_0}{\alpha}}, \\
b_{22} &= 4\lambda^2 g \Delta_0 \Delta_1 e^{\frac{\Lambda_0}{\alpha}} e^{\frac{\Lambda_1}{\alpha}} - \Delta_0 \Delta_1 f_+ e^{\frac{2\Lambda_1}{\alpha}} - \lambda^2 f_+ e^{\frac{2\Lambda_0}{\alpha}}, \\
b_{12} &= 2g(\lambda^2 + \Delta_0 \Delta_1) e^{\frac{\Lambda_0}{\alpha}} e^{\frac{\Lambda_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{2\Lambda_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{2\Lambda_0}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Додаток 3. Функції $\det \Psi_1$, $\psi_{21}^1(\omega)$, $G_{22}(\xi, \eta, \lambda; \omega)$ в інтегральному рівнянні (31):

$$\det \Psi_1 = \begin{cases} \det \Psi_1^0, & \lambda < \omega, \\ \det \Psi_1^1, & \lambda > \omega, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\det \Psi_1^0 &= 2\lambda^2(2\lambda^2 - \omega^2) - (4\lambda^4 - 2\lambda^2\omega^2 + \omega^4/2) \cos \frac{\omega\delta_2}{\alpha} \cos \frac{\omega\tilde{\delta}_3\tilde{\alpha}}{\alpha} + \\
&\quad + \frac{\lambda^2 \left(4\lambda^4 - \frac{2(3\alpha+1)}{\alpha+1} \lambda^2\omega^2 + \frac{5\alpha-3}{2(\alpha+1)} \omega^4 \right)}{\omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3} \sin \frac{\omega\delta_2}{\alpha} \sin \frac{\omega\tilde{\delta}_3\tilde{\alpha}}{\alpha},
\end{aligned}$$

$$\delta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}, \quad \delta_3 = \sqrt{1 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2}, \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}},$$

$$\begin{aligned}
\det \Psi_1^1 &= 2\lambda^2(2\lambda^2 - \omega^2) - (4\lambda^4 - 2\lambda^2\omega^2 + \omega^4/2) \operatorname{ch} \frac{\delta_0}{\alpha} \operatorname{ch} \frac{\delta_1}{\alpha} + \\
&\quad + \frac{\lambda^2 \left(4\lambda^4 - \frac{2(3\alpha+1)}{\alpha+1} \lambda^2\omega^2 + \frac{5\alpha-3}{2(\alpha+1)} \omega^4 \right)}{\delta_0 \delta_1} \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha},
\end{aligned}$$

$$\delta_0 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad \delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \omega^2},$$

$$\psi_{21}^1(\omega) = \begin{cases} \psi_{21}^{1,0}(\omega), & \lambda < \omega, \\ \psi_{21}^{1,1}(\omega), & \lambda > \omega, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{21}^{1,1}(\omega) &= -\frac{\lambda^2(2\lambda^2 - \omega^2)}{\delta_0} \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} (1 - \xi) \right) - 2\lambda^2 \delta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} (1 - \xi) \right) + \\
&\quad + 2\lambda^2 \delta_1 \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha} + \frac{\lambda^2(2\lambda^2 - \omega^2)}{\delta_0} \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} - \\
&\quad - \frac{2\lambda^4}{\delta_0} \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\delta_1}{\alpha} - (2\lambda^2 - \omega^2) \delta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\delta_0}{\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{21}^{1,0}(\omega) &= -\frac{\lambda^2(2\lambda^2 - \omega^2)}{\omega\delta_2} \sin \left(\frac{\omega\delta_2}{\alpha} (1 - \xi) \right) + 2\lambda^2 \omega \tilde{\alpha} \delta_3 \sin \left(\frac{\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha} (1 - \xi) \right) - \\
&\quad - \frac{2\lambda^4}{\omega\delta_2} \sin \left(\frac{\omega\delta_2}{\alpha} \xi \right) \cos \frac{\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha} + (2\lambda^2 - \omega^2) \omega \tilde{\alpha} \delta_3 \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\left(\frac{\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha}\xi\right)\cos\frac{\omega\delta_2}{\alpha} - 2\lambda^2\omega\tilde{\alpha}\delta_3\cos\left(\frac{\omega\delta_2}{\alpha}\xi\right)\sin\frac{\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha} + \\ & + \frac{\lambda^2(2\lambda^2 - \omega^2)}{\omega\delta_2}\cos\left(\frac{\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha}\xi\right)\sin\frac{\omega\delta_2}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$G_{22}(\eta, \xi, \lambda; \omega) = \begin{cases} G_{22}^0(\eta, \xi, \lambda; \omega), & \lambda < \omega, \\ G_{22}^1(\eta, \xi, \lambda; \omega), & \lambda > \omega, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_{22}^1(\eta, \xi, \lambda; \omega) &= \frac{\lambda^2}{\delta_0}e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}|\xi-\eta|} - \delta_1e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}|\xi-\eta|} - \\ & - \frac{1}{\det\Psi_1^1}\left[\frac{4}{3-\mathfrak{x}}\Psi_{21}^{1,1}\left(-\lambda^2e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}(1-\eta)} + \delta_1^2e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}(1-\eta)}\right) - \right. \\ & \left. - \Psi_{22}^{1,1}\frac{\lambda^2\omega^2}{\delta_0}e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}(1-\eta)}\right] - \frac{e^{-\frac{2\delta_0}{\alpha}}e^{-\frac{2\delta_1}{\alpha}}}{\det\Psi_0^1} \times \\ & \times \left[\Psi_{21}^{0,1}\lambda\left(e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}\eta} - e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}\eta}\right) + \Psi_{22}^{0,1}\left(\frac{\lambda^2}{\delta_0}e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}\eta} - \delta_1e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}\eta}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{22}^{1,1} &= -\lambda^2\operatorname{ch}\left(\frac{\delta_0}{\alpha}(1-\xi)\right) - \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\delta_1}{\alpha}(1-\xi)\right) + \\ & + \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\delta_0}{\alpha}\xi\right)\operatorname{ch}\frac{\delta_1}{\alpha} - \frac{\lambda^2}{\delta_0\delta_1}\left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right) \times \\ & \times \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_0}{\alpha}\xi\right)\operatorname{sh}\frac{\delta_1}{\alpha} + \lambda^2\operatorname{ch}\left(\frac{\delta_1}{\alpha}\xi\right)\operatorname{ch}\frac{\delta_0}{\alpha} - \delta_0\delta_1\operatorname{sh}\left(\frac{\delta_1}{\alpha}\xi\right)\operatorname{sh}\frac{\delta_0}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\det\Psi_0^1 = \left[\lambda^2 - \delta_0\delta_1\right]^2 \left[\lambda^2\delta_0\delta_1 + g^2\right]^2,$$

$$g = \lambda^2 - \omega^2/2, \quad f_{\pm} = g^2 \pm \lambda^2\delta_1\delta_2,$$

$$\Psi_{21}^{0,1} = a_{21}^1c_{11}^1 + a_{22}^1c_{21}^1, \quad \Psi_{22}^{0,1} = a_{21}^1c_{12}^1 + a_{22}^1c_{22}^1,$$

$$\begin{aligned} a_{21}^1 &= \lambda\left[-e^{\frac{\delta_0}{\alpha}\xi} + e^{\frac{\delta_1}{\alpha}\xi} - \frac{1}{f_-}\left\{e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}(\xi-1)}\left(2g\lambda^2e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} - f_+e^{\frac{\delta_0}{\alpha}}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}(\xi-1)}\left(2g\delta_0\delta_1e^{\frac{\delta_0}{\alpha}} - f_+e^{\frac{\delta_1}{\alpha}}\right)\right\}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22}^1 &= \frac{\mathfrak{x}+1}{\mathfrak{x}-1}\left[-\frac{\lambda^2}{\delta_0}e^{\frac{\delta_0}{\alpha}\xi} + \delta_1e^{\frac{\delta_1}{\alpha}\xi} - \frac{1}{f_-}\left\{\frac{\lambda^2}{\delta_0}e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}(\xi-1)}\left(2g\delta_0\delta_1e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} - f_+e^{\frac{\delta_0}{\alpha}}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta_1e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}(\xi-1)}\left(2\lambda^2ge^{\frac{\delta_0}{\alpha}} - f_+e^{\frac{\delta_1}{\alpha}}\right)\right\}\right], \end{aligned}$$

$$c_{11}^1 = -\frac{\mathfrak{x}+1}{\mathfrak{x}-1}\frac{1}{\delta_0}\left[\lambda^2 - \delta_0\delta_1 + \frac{b_{22}^1}{f_-}\right], \quad c_{12}^1 = \frac{\mathfrak{x}+1}{\mathfrak{x}-1}\lambda c_{21}^1,$$

$$c_{21}^1 = \lambda\frac{b_{12}^1}{f_-}, \quad c_{22}^1 = -\frac{1}{\delta_1}\left[\lambda^2 - \delta_0\delta_1 + \frac{b_{11}^1}{f_-}\right],$$

$$\begin{aligned}
b_{11}^1 &= 4\lambda^2 g \delta_0 \delta_1 e^{\frac{\delta_0}{\alpha}} e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} - \lambda^2 f_+ e^{\frac{2\delta_1}{\alpha}} - \delta_0 \delta_1 f_+ e^{\frac{2\delta_0}{\alpha}}, \\
b_{22}^1 &= 4\lambda^2 g \delta_0 \delta_1 e^{\frac{\delta_0}{\alpha}} e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} - \delta_0 \delta_1 f_+ e^{\frac{2\delta_1}{\alpha}} - \lambda^2 f_+ e^{\frac{2\delta_0}{\alpha}}, \\
b_{12}^1 &= 2g(\lambda^2 + \delta_0 \delta_1) e^{\frac{\delta_0}{\alpha}} e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{2\delta_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{2\delta_0}{\alpha}}, \\
G_{22}^0(\eta, \xi, \lambda; \omega) &= -\frac{\lambda^2}{\omega \delta_2} \sin\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} |\xi - \eta|\right) - \omega \tilde{\alpha} \delta_3 \sin\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} |\xi - \eta|\right) - \\
&\quad - \frac{1}{\det \Psi_1^0} \left[\frac{4}{3 - \alpha} \Psi_{21}^{1,0} \left(-\lambda^2 \cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} (1 - \eta)\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\omega \tilde{\alpha} \delta_3)^2 \cos\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} (1 - \eta)\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \Psi_{22}^{1,0} \frac{\lambda^2 \omega}{\delta_2} \cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} (1 - \eta)\right) \right] - \frac{\cos\left(\frac{2\omega}{\alpha} (\delta_2 + \tilde{\alpha} \delta_3)\right)}{\det \Psi_0^0} \times \\
&\quad \times \left[\Psi_{21}^{0,0} \lambda \left(-\cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \eta\right) + \cos\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \eta\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \Psi_{22}^{0,0} \left(\frac{\lambda^2}{\omega \delta_2} \sin\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \eta\right) + \omega \tilde{\alpha} \delta_3 \sin\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \eta\right) \right) \right], \\
\Psi_{22}^{1,0} &= -\lambda^2 \cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} (1 - \xi)\right) - \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} (1 - \xi)\right) + \\
&\quad + \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi\right) \cos \frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} - \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{\omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi\right) \sin \frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} + \\
&\quad + \lambda^2 \cos\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi\right) \cos \frac{\omega \delta_2}{\alpha} - \omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3 \sin\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi\right) \sin \frac{\omega \delta_2}{\alpha}, \\
\det \Psi_0^0 &= \left[\lambda^2 + \omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3 \right]^2 \left[g^2 - \lambda^2 \omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3 \right]^2, \\
g &= \lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}, \quad f^\pm = g^2 \pm \lambda^2 \omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3, \\
\Psi_{21}^{0,0} &= a_{21}^0 c_{11}^0 + a_{22}^0 c_{21}^0, \quad \Psi_{22}^{0,0} = a_{21}^0 c_{12}^0 + a_{22}^0 c_{22}^0, \\
a_{21}^0 &= \lambda \left[-\cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi\right) + \cos\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{f^+} \left\{ 2g\lambda^2 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} \left(\delta_2 (1 - \xi) + \tilde{\alpha} \delta_3 \right)\right) - f^- \cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} (2 - \xi)\right) \right\} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2g\omega^2 \tilde{\alpha}\delta_2\delta_3 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}\left(\delta_2 + \tilde{\alpha}\delta_3(1-\xi)\right)\right) - \\
& - f^- \cos\left(\frac{\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha}(2-\xi)\right) \Bigg], \\
a_{22}^0 &= \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \left[-\frac{\lambda^2}{\omega\delta_2} \sin\left(\frac{\omega\delta_2}{\alpha}\xi\right) - \omega\tilde{\alpha}\delta_3 \sin\left(\frac{\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha}\xi\right) + \right. \\
& + \frac{1}{f^+} \left\{ \frac{\lambda^2}{\omega\delta_2} \left(2g\delta_2\tilde{\alpha}\delta_3 \sin\left(\frac{\omega}{\alpha}\left(\delta_2(1-\xi) + \tilde{\alpha}\delta_3\right)\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + f^- \sin\left(\frac{\omega\delta_2}{\alpha}(2-\xi)\right) \right\} + \omega\tilde{\alpha}\delta_3 e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha}\xi} \times \\
& \times \left(2\lambda^2 g \sin\left(\frac{\omega}{\alpha}\left(\delta_2 + \tilde{\alpha}\delta_3(1-\xi)\right)\right) + f^- \sin\left(\frac{\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha}(2-\xi)\right) \right) \Bigg], \\
c_{11}^0 &= -\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{1}{\omega\delta_2} \left[\lambda^2 + \omega^2 \tilde{\alpha}\delta_2\delta_3 + \frac{b_{22}^0}{f^+} \right], \quad c_{12}^0 = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \lambda c_{21}^0, \\
c_{21}^0 &= \lambda \frac{b_{12}^0}{f^+}, \quad c_{22}^0 = -\frac{1}{\omega\tilde{\alpha}\delta_3} \left[\lambda^2 + \omega^2 \tilde{\alpha}\delta_2\delta_3 + \frac{b_{11}^0}{f^+} \right], \\
b_{11}^0 &= -4\lambda^2 g \omega^2 \tilde{\alpha}\delta_2\delta_3 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}\left(\delta_2 + \tilde{\alpha}\delta_3\right)\right) - \lambda^2 f^- \cos\frac{2\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha} + \\
& + \omega^2 \tilde{\alpha}\delta_2\delta_3 f^- \cos\frac{2\omega\delta_2}{\alpha}, \\
b_{22}^0 &= -4\lambda^2 g \omega^2 \tilde{\alpha}\delta_2\delta_3 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}\left(\delta_2 + \tilde{\alpha}\delta_3\right)\right) + \omega^2 \tilde{\alpha}\delta_2\delta_3 f^- \cos\frac{2\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha} - \\
& - \lambda^2 f^- \cos\frac{2\omega\delta_2}{\alpha}, \\
b_{12}^0 &= 2g(\lambda^2 + \omega^2 \tilde{\alpha}\delta_2\delta_3) \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}\left(\delta_2 + \tilde{\alpha}\delta_3\right)\right) - f^- \cos\frac{2\omega\tilde{\alpha}\delta_3}{\alpha} - f^- \cos\frac{2\omega\delta_2}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Додаток 4. Підінтегральні функції для нормального напруження $\sigma_\xi(\rho, 0; \omega)$ у формулі (33) та нормального напруження $\sigma_\rho(1, \xi; \omega)$ у формулі (34):

$$\begin{aligned}
G_{12}(\eta, \xi, \lambda; \omega) &= \begin{cases} G_{12}^0(\eta, \xi, \lambda; \omega), & \lambda < \omega, \\ G_{12}^1(\eta, \xi, \lambda; \omega), & \lambda > \omega, \end{cases} \\
G_{12}^1(\eta, \xi, \lambda; \omega) &= \lambda \operatorname{sgn}(\xi - \eta) \left[-e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}|\xi-\eta|} + e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}|\xi-\eta|} \right] - \frac{1}{\det \Psi_1^1} \times \\
& \times \left[\frac{4}{3-\alpha} \Psi_{11}^{1,1} \left(-\lambda^2 e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}(1-\eta)} + \left(\lambda^2 - \frac{(\alpha-1)\omega^2}{4} \right) e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}(1-\eta)} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\psi_{12}^{1,1} \frac{\lambda \omega^2}{\delta_1} e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}(1-\eta)} \Big] - \frac{e^{-\frac{2\delta_0}{\alpha}} e^{-\frac{2\delta_1}{\alpha}}}{\det \Psi_0^1} \times \\
& \times \left[\psi_{11}^{0,1} \lambda \left(e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}\eta} - e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}\eta} \right) + \psi_{12}^{0,1} \left(\frac{\lambda^2}{\delta_0} e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}\eta} - \delta_1 e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}\eta} \right) \right], \\
\psi_{11}^{1,1} &= -(2\lambda^2 - \omega^2) \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} (1 - \xi) \right) - 2\lambda^2 \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} (1 - \xi) \right) - \\
& - 2\delta_0 \delta_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha} - \frac{\lambda^2 (2\lambda^2 - \omega^2)}{\delta_0 \delta_1} \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha} + \\
& + 2\lambda^2 \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\delta_1}{\alpha} + (2\lambda^2 - \omega^2) \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\delta_0}{\alpha}, \\
\psi_{12}^{1,1} &= -\lambda^2 \delta_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} (1 - \xi) \right) - \frac{\lambda^2}{\delta_1} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} (1 - \xi) \right) - \\
& - \delta_0 \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\delta_1}{\alpha} + \frac{\lambda^2}{\delta_1} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2} \right) \times \\
& \times \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_1}{\alpha} - \frac{\lambda^4}{\delta_1} \operatorname{sh} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) \operatorname{ch} \frac{\delta_0}{\alpha} + \\
& + \lambda^2 \delta_0 \operatorname{ch} \left(\frac{\delta_1}{\alpha} \xi \right) \operatorname{sh} \frac{\delta_0}{\alpha}, \\
\psi_{11}^{0,1} &= a_{11}^1 c_{11}^1 + a_{12}^1 c_{21}^1, \quad \psi_{12}^{0,1} = a_{11}^1 c_{12}^1 + a_{12}^1 c_{22}^1, \\
a_{11}^1 &= \delta_0 e^{\frac{\delta_0}{\alpha} \xi} - \frac{\lambda^2}{\delta_1} e^{\frac{\delta_1}{\alpha} \xi} - \frac{1}{f_-} \left\{ \delta_0 e^{-\frac{\delta_0}{\alpha}(\xi-1)} \left(2g\lambda^2 e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\delta_0}{\alpha}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda^2}{\delta_1} e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}(\xi-1)} \left(2g\delta_0 \delta_1 e^{\frac{\delta_0}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} \right) \right\}, \\
a_{12}^1 &= \lambda \frac{\mathfrak{x} + 1}{\mathfrak{x} - 1} \left[e^{\frac{\delta_0}{\alpha} \xi} - e^{\frac{\delta_1}{\alpha} \xi} - \frac{1}{f_-} \left\{ e^{-\frac{\Lambda_0}{\alpha}(\xi-1)} \left(2g\delta_0 \delta_1 e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\delta_0}{\alpha}} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{-\frac{\delta_1}{\alpha}(\xi-1)} \left(2\lambda^2 g e^{\frac{\delta_0}{\alpha}} - f_+ e^{\frac{\delta_1}{\alpha}} \right) \right\} \right], \\
\psi_{11}^{1,0} &= -(2\lambda^2 - \omega^2) \cos \left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} (1 - \xi) \right) - 2\lambda^2 \cos \left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} (1 - \xi) \right) - \\
& - 2\omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3 \sin \left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi \right) \sin \frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} - \frac{\lambda^2 (2\lambda^2 - \omega^2)}{\omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3} \times \\
& \times \sin \left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi \right) \sin \frac{\omega \delta_2}{\alpha} + 2\lambda^2 \cos \left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi \right) \cos \frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} + \\
& + (2\lambda^2 - \omega^2) \cos \left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi \right) \cos \frac{\omega \delta_2}{\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{12}^{1,0} &= \lambda^2 \omega \delta_2 \sin\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} (1 - \xi)\right) - \frac{\lambda^2}{\omega \tilde{\alpha} \delta_3} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} (1 - \xi)\right) + \\
&+ \omega \delta_2 \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi\right) \cos \frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} + \frac{\lambda^2}{\omega \tilde{\alpha} \delta_3} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{2}\right) \times \\
&\times \operatorname{ch}\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi\right) \operatorname{sh} \frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} - \frac{\lambda^4}{\omega \tilde{\alpha} \delta_3} \sin\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi\right) \cos \frac{\omega \delta_2}{\alpha} - \\
&- \lambda^2 \omega \delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi\right) \sin \frac{\omega \delta_2}{\alpha}, \\
\Psi_{11}^{0,0} &= a_{11}^0 c_{11}^0 + a_{12}^0 c_{21}^0, \quad \Psi_{12}^{0,0} = a_{11}^0 c_{12}^0 + a_{12}^0 c_{22}^0, \\
a_{11}^0 &= -\omega \delta_2 \sin\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi\right) + \frac{\lambda^2}{\omega \tilde{\alpha} \delta_3} \sin\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi\right) + \frac{1}{f^+} \left\{ \omega \delta_2 \times \right. \\
&\times \left(2\lambda^2 g \sin\left(\frac{\omega}{\alpha} (\delta_2 (1 - \xi) + \tilde{\alpha} \delta_3)\right) + f^- \sin\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} (2 - \xi)\right) \right) + \\
&+ \frac{\lambda^2}{\omega \tilde{\alpha} \delta_3} e^{-\frac{\Delta_1}{\alpha} \xi} \left(2g \omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3 \sin\left(\frac{\omega}{\alpha} (\delta_2 + \tilde{\alpha} \delta_3 (1 - \xi))\right) \right) + \\
&+ f^- \sin\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} (2 - \xi)\right) \left. \right\}, \\
a_{21}^0 &= \lambda \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \left[\cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} \xi\right) - \cos\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} \xi\right) - \frac{1}{f^+} \left\{ 2g \lambda^2 \times \right. \right. \\
&\times \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} (\delta_2 (1 - \xi) + \tilde{\alpha} \delta_3)\right) - f^- \cos\left(\frac{\omega \delta_2}{\alpha} (2 - \xi)\right) + \\
&+ 2g \omega^2 \tilde{\alpha} \delta_2 \delta_3 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} (\delta_2 + \tilde{\alpha} \delta_3 (1 - \xi))\right) - \\
&\left. \left. - f^- \cos\left(\frac{\omega \tilde{\alpha} \delta_3}{\alpha} (2 - \xi)\right) \right\} \right].
\end{aligned}$$

1. Агуф Е. И., Васильев В. З. Первая основная задача для слоя с круговым отверстием // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 4. – С. 68–77.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием // Изв. АН АрмССР. Сер. Механика. – 1969. – 22, № 2. – С. 3–13.
3. Вишнеvский К. В., Кушнир Р. М. Граничные интегральные уравнения для тела с инородными включениями // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 1996. – 39, № 1. – С. 37–41.

Те same: *Vishnevskii K. V., Kushnir R. M.* Boundary integral equations for a body with inhomogeneous inclusions // *J. Math. Sci.* – 1997. – 86, No. 2. – P. 2552–2555. – <https://doi.org/10.1007/BF02356095>.

4. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – Москва: Наука, 1979. – 319 с.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
6. Гринченко В. Г., Улитко А. Ф. Точное решение задачи о распределении напряжений около кругового отверстия в упругом слое // Прикл. механика. – 1968. – 4, № 10. – С. 38–45.

Те same: *Grinchenko V. T., Ulitko A. F.* An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer // *Sov. Appl. Mech.* – 1968. – 4, No. 10. – P. 31–37. – <https://doi.org/10.1007/BF00886618>.

7. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
8. Кит Г. С., Михаськив В. В., Хай О. М. Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, № 5. – С. 855–863.
Te same: Kit H. S., Mykhas'kiv V. V., Khaj O. M. Analysis of the steady oscillations of a plane absolutely rigid inclusion in a three-dimensional elastic body by the boundary element method // J. Appl. Math. Mech. – 2002. – **66**, No. 5. – P. 817–824. – [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)90012-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)90012-2).
9. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 288 с.
10. Малиц П. Я., Приварников А. К. Применение преобразований типа Вебера к решению задач теории упругости для слоистых сред с цилиндрическим отверстием // Вопросы прочности и пластичности: Сб. науч. тр. – Днепропетровск: ДГУ, 1971. – С. 15–18.
11. Мірошніков В. Ю. Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2019. – Вип. 102. – С. 77–90. – <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>.
12. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
13. Попов Г. Я., Абдыманапов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Рауан, 1999. – 133 с.
14. Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 6. – С. 27–38.
Te same: Popov G. Ya., Vaysfel'd N. D. Solving an axisymmetric problem of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion with allowance for its specific weight // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No. 6. – P. 627–636. – <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0661-7>.
15. Попов Г. Я., Вайсфельд Н. Д., Реут В. В. Осесимметричное контактное взаимодействие бесконечной упругой плиты с абсолютно цилиндрическим жестким включением // Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твердого тела: Сб. статей. – Одесса: Астропринт, 2013. – С. 286–300.
Te same: Vaysfel'd N., Popov G., Reut V. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion // Acta Mech. – 2015. – **226**, No. 3. – P. 797–810. – <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7>.
16. Попов Г. Я., Процеров Ю. С. Осесимметричная задача для упругого цилиндра конечной длины с заземленной боковой поверхностью при учете собственного веса // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 1. – С. 57–68.
Te same: Popov G. Ya., Protserov Yu. S. Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weigh // J. Math. Sci. – 2016. – **212**, No. 1. – P. 67–82. – <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2649-1>.
17. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
18. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Моделирование пульсовых волн давления при кардиопунтировании // Кибернетика и системный анализ. – 2017. – **53**, № 1. – С. 16–25.
Te same: Selezov I. T., Kryvonos I. G. Modeling of pressure pulse waves in bypass grafting // Cybern. Syst. Anal. – 2017. – **53**, No. 1. – P. 12–20. – <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9902-1>.
19. Токовий Ю. В. Зведення тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 49–60.
Te same: Tokovy Yu. V. Reduction of a three-dimensional elasticity problem for a finite-length solid cylinder to the solution of systems of linear algebraic equations // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, No. 5. – P. 683–696. – <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1280-2>.
20. Фесенко Г. О., Мойсеенок О. П. Точний розв'язок нестационарної задачі для пружного шару з циліндричним жорстким включенням // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 1. – С. 142–154.

- Te came: *Fesenko A. A., Moyseenok A. P.* Exact solution of a nonstationary problem for the elastic layer with rigid cylindrical inclusion // *J. Math. Sci.* – 2020. – **249**, No. 3. – P. 478–495. – <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3>.
21. *Cheng Z.-Q., Batra R. C.* Exact Eshelby tensor for a dynamic circular cylindrical inclusion // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1999. – **66**, No. 2. – P. 563–565. – <https://doi.org/10.1115/1.2791087>.
 22. *Lu M., Huang S., Yang X., Yang L., Mao R.* Semianalytical solution for the deformation of an elastic layer under an axisymmetrically distributed power-form load: application to fluid-jet-induced indentation of biological soft tissues // *Biomed Res. Int.* – 2017. – Art. ID 9842037. – 10 p. – <https://doi.org/10.1155/2017/9842037>.
 23. *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // *J. Eng. Math.* – 2013. – **78**, No. 1. – P. 143–166. – <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>.
 24. *Mow C. C., Mente L. J.* Dynamic stresses and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1963. – **30**, No. 4. – P. 598–604. – <https://doi.org/10.1115/1.3636625>.
 25. *Protsenko V., Miroschnikov V.* Investigating a problem from the theory of elasticity for a halfspace with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned // *East-Eur. J. Enterp. Technol.* – 2018. – **4**, No. 7(94). – P. 43–50. – <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>.
 26. *Selvadurai A. P. S., Rajapakse R. K. N. D.* On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space // *Int. J. Solids Struct.* – 1985. – **21**, No. 12. – P. 1213–1229. – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(85\)90005-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(85)90005-8).
 27. *Si L. T., Zhao Y., Zhang Y. H., Ouyang H.* Random vibration of an elastic half-space subjected to a moving stochastic load // *Comput. & Struct.* – 2016. – **168**. – P. 92–105. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.02.013>.
 28. *Stoyan V. A., Dvirnychuk K. V.* Mathematical modeling of direct and inverse problems of dynamics of thick elastic layer. Part I. Mathematical modeling of the field of transverse dynamic displacements of layer // *J. Automat. Inform. Sci.* – 2016. – **48**, No. 7. – P. 55–64. – <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i7.60>.
 29. *Youngdahl C. K., Sternberg E.* Three-dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1966. – **33**, No. 4. – P. 855–865. – <https://doi.org/10.1115/1.3625193>.
 30. *Zhou Y., Zheng R.-Y., Liu G.-B.* Dynamic response of elastic layer on transversely isotropic saturated soil to train load // *Rock Soil Mech.* – 2011. – **32**, No. 2. – P. 604–610.

DYNAMIC PROBLEM FOR AN ELASTIC LAYER WITH A CYLINDRICAL RIGID INCLUSION

An approximate analytical-numerical solution to a dynamic problem is constructed for an infinite elastic layer with a cylindrical rigid inclusion, on the cylindrical surface of which the conditions of rigid fixing are imposed. An axisymmetric normal compressive load acts on one face of the layer, and the other face is perfectly fixed to an absolutely rigid foundation. To construct the displacement and stress fields in the layer, the Laplace and Weber integral transformations are applied to the axisymmetric equations of motion, which produces an inhomogeneous one-dimensional vector boundary value problem with respect to the unknown transformants of the displacements. The problem is solved using matrix differential calculus. The obtained integral equation in a finite interval is solved by the method of orthogonal polynomials with the determination of the character of the singularities of the solution at the ends of the interval. The normal stresses on the cylindrical surface of the inclusion and on the lower face of the elastic layer are studied. The solution is analyzed for the case of steady-state oscillations.

Key words: *infinite elastic layer, cylindrical rigid inclusion, dynamic problem, integral transformations, integral equation.*