УДК 534.1

Г. М. Зражевський[1✉], В. Ф. Зражевська[2]

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФЕКТІВ ТОЧКОВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ ПРУЖНОГО СТРИЖНЯ

Досліджено гармонічні коливання лінійно пружного стрижня скінченної довжини з неоднорідностями малих розмірів із різними характеристиками (пружні, в'язко пружні, пластичні, неоднорідні), які описано лінійними рівняннями стану. Побудовано математичну модель, яка враховує вплив таких дефектів за допомогою розташування в центрі області неоднорідності точкової особливості нескінченного порядку. На цій основі сформульовано крайову задачу для диференціального рівняння з гіперсингулярною правою частиною, розв'язок якої є еквівалентним розв'язку вихідної задачі. Розроблено процедуру визначення коефіцієнтів гіперсингулярного ряду з точковим носієм, що моделює дефект. Вона ґрунтується на розвиненні в нескінченні ряди за малим параметром із коефіцієнтами, які є гіперсингулярними узагальненими функціями. Запропоновану методику застосовано для розв'язання прямої задачі, яка полягає у визначенні частот та форм власних коливань стрижня із заданими характеристиками дефектів, та оберненої задачі щодо визначення інтегральних характеристик дефектності стрижня при відомих зсувах частот власних коливань. Запропонований підхід передбачає рекурентне розв'язання крайових задач, що дає можливість опису дефектності стрижня зі заданою точністю.

Ключові слова: *коливання стрижня, неоднорідності, точкова особливість, обернена крайова задача.*

Вступ. Коливні системи мають різноманітні інженерні застосування. Одним із важливих розділів теорії коливань систем з розподіленими параметрами є аналіз коливань об'єктів із неоднорідностями [1–8] для моделювання їхньої поведінки [1, 2, 3, 6] та розробки методів і алгоритмів діагностування наявності неоднорідностей акустичними засобами для оцінки функціональної придатності [4, 8]. На відміну від просторового моделювання [6], використання спрощених одновимірних моделей забезпечує хоч і не вичерпний, проте доволі якісний аналіз процесів коливання механічних об'єктів. Результати таких досліджень мають безпосереднє інженерне застосування, а також можуть використовуватися для побудови досконаліших математичних моделей [8].

Задачу про коливання неоднорідного скінченного стрижня за одновимірною моделлю Кірхгофа – Лява розглянуто в багатьох наукових дослідженнях, які стосуються різних випадків зміни характеристик уздовж стрижня: неперервної [3, 6], стрибкоподібної [2, 4] або кусково-неперервної [1]. При цьому використовують точні аналітичні [1, 3, 4, 8], числові [5] та напіваналітичні [2, 6] методи.

У цій статті досліджено можливість еквівалентного подання неоднорідності скінченних розмірів точковою сингулярністю нескінченного порядку на прикладі задачі про вільні коливання лінійно пружного стрижня. У цьому випадку доведено еквівалентність і побудовано точний аналітичний розв'язок задачі у вигляді слабко збіжного ряду за фундаментальними розв'язками. Для складніших задач запропонований підхід відкриває можливість побудови наближеного розв'язку з контрольованою точністю. Для формулювання еквівалентної задачі використано розвинення за малим параметром, яке є збіжним у просторі узагальнених функцій. Проаналізовано інтерференцію часткових розв'язків задачі за наявності множинних неоднорідностей. Така наближена модель дає змогу розраховувати зсуви частот власних гармонічних коливань стрижня за відомих характеристик дефекту,

✉ greg.zrazhevsky@knu.ua

а також шляхом розв'язання оберненої задачі визначати характеристики дефекту за зсувами частот, виявленими експериментально. Розглянуто випадок наявності множинних дефектів, досліджено їхній сумісний вплив на частоти власних коливань та запропоновано метод для визначення сумарної характеристики дефектності за спостереженими зсувами частот.

Отримані результати строго математично обґрунтовано. Ідеї та методика розв'язання можуть бути застосовані при побудові двовимірних та тривимірних моделей неоднорідностей у задачах коливної динаміки та при розробці методів неруйнівного акустичного контролю.

1. Постановка задачі та побудова еквівалентної моделі з точковою гіперсингулярністю. Розглядаємо вільні коливання лінійно пружного стрижня з дефектом, який модельовано малим сегментом зі зміненим модулем Юнга ΔE. У безрозмірних змінних рівняння коливань має такий вигляд:

$$\frac{d}{dx}\left((1-æ\theta)\frac{d\varphi}{dx}\right)+k^2\pi^2\varphi=0, \quad x\in(0,1), \tag{1}$$

де $æ=\Delta E/E_0$, $k^2=\rho\omega^2L^2/(E_0\pi^2)$, E_0 − модуль Юнга матеріалу стрижня, ω − частота коливань, ρ − густина, L − розмірна довжина стрижня, $\theta(x)$ − функція області, де $\theta(x)=1$ при $X-\ell<x<X+\ell$ та $\theta(x)=0$ при $x\le X-\ell$ або $x\ge X+\ell$, X і 2ℓ − центр і довжина області дефекту.

Ставимо за мету визначити спектр (1) та форми коливань стрижня, вважаючи його кінці вільними від напружень при $\ell\ll 1$.

Подамо рівняння (1) у вигляді

$$\tilde\varphi''+k^2\pi^2\tilde\varphi=æ(\theta\tilde\varphi')', \quad x\in(0,1), \tag{2}$$

та побудуємо еквівалентне рівняння з точковою сингулярністю нескінченного порядку при $x=X$:

$$\varphi''+k^2\pi^2\varphi=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\delta^{(i)}(x-X). \tag{3}$$

Умова еквівалентності правих частин рівнянь (2) і (3) має вигляд

$$\left\langle æ(\theta\tilde\varphi')',\psi\right\rangle=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(-1)^i\psi^{(i)}(X),$$

де $\psi=\psi(x)\in\Omega_{(0,1)}^{(\infty)}$. Оскільки $\varphi\in D^{\infty}(\Omega_\theta)$, де $\Omega_\theta=[X-\ell,X+\ell]$, то

$$\begin{aligned}\left\langle æ(\theta\tilde\varphi')',\psi\right\rangle&=-æ\left\langle\theta\tilde\varphi',\psi'\right\rangle=\\&=-æ\sum_{i,j=0}^{\infty}\int_{X-\ell}^{X+\ell}\frac{(x-X)^{i+\ell}}{i!\,j!}\,dx\,\tilde\varphi^{(i+1)}(X)\psi^{(j+1)}(X)\\&=-æ\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{i+j})\tilde\varphi^{(i+1)}(X)\,\psi^{(j+1)}(X)}{i!\,j!(i+j+1)}\,\ell^{i+j+1}.\end{aligned}$$

Отже,

$$a_0=0, \quad a_{j+1}=æ(-1)^j\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\tilde\varphi^{(i+1)}(X)\ell^{i+j+1}\,(1+(-1)^{i+j})}{i!\,j!(i+j+1)}, \quad j=0,1,\ldots, \tag{4}$$

де $\tilde\varphi^{(i)}(X)$ − i-та похідна розв'язку рівняння (2) при $x=X$. Розв'язок рівняння (3) при $x=X$ втрачає зміст, оскільки $\varphi(x)$ є сингулярною узагальненою функцією.

Шукаємо розв'язки рівнянь (2) і (3) у вигляді слабко збіжного ряду за параметром $\ell\ll 1$:

$$\begin{cases} \varphi(x;\ell) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \Phi_i(x)\,\ell^i, & x \notin \Omega_\theta, \\ \tilde{\varphi}(x;\ell) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_i(x)\,\ell^i, & x \in \Omega_\theta. \end{cases} \tag{5}$$

При цьому (4) набуває вигляду:

$$a_{j+1} = æ(-1)^j \sum_{i,s=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_s^{(i+1)}(X)\left(1+(-1)^{i+j}\right)}{i\,!\,j\,!(i+j+1)}\,\ell^{i+j+s+1}, \quad j = 0,1,\ldots . \tag{6}$$

Подання (6) забезпечує еквівалентність правих частин рівнянь (2) і (3), але не є умовою еквівалентності розв'язків цих рівнянь. Така еквівалентність визначається формулою (6) та умовою зшивання. Проінтегрувавши (2), отримаємо:

$$(1-æ\theta(x))\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\varphi}'(0) + æ^2\pi^2 \int_0^x \tilde{\varphi}\,dx = 0\,.$$

Отже, наявні стрибки похідної

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi}'(X-\ell-0) = (1-æ)\tilde{\varphi}'(X-\ell+0)\,, \\ &(1-æ)\tilde{\varphi}'(X+\ell-0) = \tilde{\varphi}'(X+\ell+0)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Оскільки $\forall\psi(x) \in \Omega_{(0,1)}^{(\infty)}$ умова еквівалентності розв'язків має вигляд $\left\langle \tilde{\varphi}(x)(1-\theta(x)), \psi(x) \right\rangle = \left\langle \varphi(x)(1-\theta(x)), \psi(x) \right\rangle$, то вирази (7) набувають вигляду

$$\begin{aligned} &\varphi'(X-\ell-0) = (1-æ)\tilde{\varphi}'(X-\ell+0)\,, \\ &\varphi'(X+\ell+0) = (1-æ)\tilde{\varphi}'(X+\ell-0)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Із використанням розвинень функцій $\varphi'(x)$ та $\tilde{\varphi}'(x)$ в ряди Тейлора та подань (5) запишемо вирази (8) у вигляді:

$$(1-æ)\sum_{s,j=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_s^{(2j+1)}(X)}{(2j)!}\,\ell^{2j+s} = \sum_{s,j=0}^{\infty} \frac{\left\{\Phi_s^{(2j+1)}\right\}_X}{(2j)!}\,\ell^{2j+s} + \sum_{s,j=0}^{\infty} \frac{\left[\Phi_s^{(2j+1)}\right]_X}{(2j+1)!}\,\ell^{2j+s+1}\,,$$

$$(1-æ)\sum_{s,j=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_s^{(2j+2)}(X)}{(2j+1)!}\,\ell^{2j+s+1} = \sum_{s,j=0}^{\infty} \frac{\left[\Phi_s^{(2j+1)}\right]_X}{(2j)!}\,\ell^{2j+s} + \sum_{s,j=0}^{\infty} \frac{\left\{\Phi_s^{(2j+2)}\right\}_X}{(2j+1)!}\,\ell^{2j+s+1}\,,$$

де $\left\{\Phi_s^{(i)}\right\}_X = \left(\Phi^{(i)}(X+0) + \Phi^{(i)}(X-0)\right)/2$, $\left[\Phi_s^{(i)}\right]_X = \left(\Phi^{(i)}(X+0) - \Phi^{(i)}(X-0)\right)/2$.

Прирівнявши в цих виразах коефіцієнти при ℓ^i, $i = 0,1,\ldots$, отримаємо зв'язки між похідними $\tilde{\Phi}_s$ та $\left\{\Phi_s^{(i)}\right\}_X$ і $\left[\Phi_s^{(i)}\right]_X$:

$$(1-æ)\sum_{j=0}^{[i/2]} \frac{\tilde{\Phi}_{i-2j}^{(2j+1)}(X)}{(2j)!} = \sum_{j=0}^{[i/2]} \frac{\left\{\Phi_{i-2j}^{(2j+1)}\right\}_X}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]} \frac{\left[\Phi_{i-2j-1}^{(2j+2)}\right]_X}{(2j+1)!}\,,$$

$$(1-æ)\sum_{j=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]} \frac{\tilde{\Phi}_{i-2j-1}^{(2j+2)}(X)}{(2j+1)!} = \sum_{j=0}^{[i/2]} \frac{\left[\Phi_{i-2j}^{(2j+1)}\right]_X}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]} \frac{\left\{\Phi_{i-2j-1}^{(2j+2)}\right\}_X}{(2j+1)!}, \quad i = 0,1,\ldots . \tag{9}$$

Твердження 1. *Система лінійних рівнянь* (9) *для фіксованого значення* N, *такого що* $i = 0,1,\dots,N$, *дає змогу однозначно визначити* $\tilde{\Phi}_0^{(j)}$, $j = 1,2,\dots,N+1$, *та* $\tilde{\Phi}_1^{(j)}$, $j = 1,2,\dots,N$, ..., $\tilde{\Phi}_N^{(1)}$, *через* $\{\tilde{\Phi}_0^{(j)}\}_X$, $[\tilde{\Phi}_0^{(j)}]_X$, $j = 1,2,\dots,N+1$, ..., $\{\tilde{\Phi}_N^{(1)}\}_X$, $[\tilde{\Phi}_N^{(1)}]_X$.

Для початкових степенів ℓ, наприклад, маємо:

$$\ell^0: \quad (1-æ)\tilde{\Phi}_0'(X) = \{\Phi_0'\}_X, \qquad 0 = [\Phi_0'],$$

$$\ell^1: \quad (1-æ)\tilde{\Phi}_1'(X) = \{\Phi_1'\}_X + [\Phi_0'']_X, \quad (1-æ)\tilde{\Phi}_0''(X) = [\Phi_1']_X + \{\Phi_0''\}_X.$$

Зауваження 1. *Вирази* (6) *та* (9) *забезпечують еквівалентність розв'язків рівнянь* (2) *та* (3) *і допускають ускладнення моделі дефекту шляхом перебудови* $\tilde{\Phi}_s^{(i)}(X)$.

Для обраної моделі дефекту (1) із (2) випливає, що

$$\tilde{\Phi}_s^{(i)}(X) = \left(-\frac{k^2\pi^2}{1-æ}\right)^{[i/2]} \tilde{\Phi}_s^{i \bmod 2}(X) \tag{10}$$

та

$$\{\Phi_s^{(i)}\}_x = (-k^2\pi^2)^{[i/2]}\{\Phi_s^{i \bmod 2}\}_X, \quad [\Phi_s^{(i)}]_x = (-k^2\pi^2)^{[i/2]}[\Phi_s^{i \bmod 2}]_X. \tag{11}$$

Вирази (10) і (11) дають змогу записати вираз (6) та рівняння (9) лише через $\{\Phi_s\}_X$, $\{\Phi_s'\}_X$, $[\Phi_s]_X$, $[\Phi_s']_X$. Отже, підставивши (5) в (3) і розв'язавши (9) з урахуванням (10) та (11), отримаємо послідовні наближення рівняння (3) у вигляді:

$$\Phi_i'' + k^2\pi^2\Phi_i = \sum_{j=1}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]} b_{ij}(\{\Phi_m\}_X, \{\Phi_m'\}_X, [\Phi_m]_X, [\Phi_m']_X)\delta^{(j)}(x-X),$$
$$i = 0,1,\dots, \quad m = 0,1,\dots,i-1, \quad x \in (0,1)\setminus\{X\}. \tag{12}$$

Твердження 2. *Система рівнянь* (12) *є рекурентною.*

Три перші рівняння системи (12) мають вигляд

$$\ell^0: \quad \Phi_0'' + k^2\pi^2\Phi_0 = 0,$$

$$\ell^1: \quad \Phi_1'' + k^2\pi^2\Phi_1 = \frac{2æ}{1-æ}\{\Phi_0'\}_X\delta'(x-X),$$

$$\ell^2: \quad \Phi_2'' + k^2\pi^2\Phi_2 = -\frac{2æ}{1-æ}(æ^2\pi^2[\Phi_0]_X - \{\Phi_1'\}_X)\delta'(x-X). \tag{13}$$

2. Побудова наближеного розв'язку еквівалентної задачі. Розв'язок рівнянь (12) можна побудувати в явному вигляді. Нехай $\Phi^*(x;X)$ – фундаментальний розв'язок рівняння

$$\Phi^{*''} + æ^2\pi^2\Phi^* = \delta(x-X), \quad x \in (0,1), \quad X \in (0,1), \quad x \ne X, \tag{14}$$

з точністю до розв'язку однорідного рівняння

$$\Phi^*(x;X) = \begin{cases} 0, & x < X, \\ \dfrac{1}{k\pi}\sin k\pi(x-X), & x \ge X. \end{cases} \tag{15}$$

Із (14) випливає, що в просторі узагальнених функцій виконуються рівності

$$\Phi^{*(s+2)} + k^2\pi^2\Phi^{*(s)} = \delta^{(s)}(x-X), \quad x \in (0,1)\setminus\{X\},$$

$$\Phi^{*(j)} = (-k^2\pi^2)^{[j/2]}\Phi^{*(j \bmod 2)}.$$

З огляду на лінійність рівняння (12) його квазірозв'язки можна записати в явному вигляді:

$$\Phi_i = A_i \cos k\pi x + B_i \sin k\pi x +$$
$$+\sum_{j=1}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]} b_{ij}(\{\Phi_k\},\{\Phi'_k\},[\Phi_k],[\Phi'_k])(-k^2\pi^2)^{[j/2]}\Phi^{*(j \bmod 2)}(x;X),$$
$$i = 0,1,\ldots . \tag{16}$$

Вирази (16), як і рівняння (12), є рекурентними, а тому можуть бути розв'язані послідовно. Використавши очевидні значення $\{\Phi^*\}_X = [\Phi^*]_X = 0$, $\{\Phi^{*\prime}\}_X = [\Phi^{*\prime}]_X = 1/2$, задачу побудови загального розв'язку (12) зводимо до розв'язання системи лінійних рівнянь (оскільки $b_{ij}(\cdot)$ є лінійною функцією своїх аргументів). Послідовне знаходження $\{\Phi_k\}_X$, $\{\Phi'_k\}_X$, $[\Phi_k]_X$, $[\Phi'_k]_X$ дає змогу отримати явний вигляд для (16).

Як приклад побудови явного розв'язку (12) через рекурентну процедуру, з (13) отримуємо такі вирази:

$$\Phi_0 = A_0 \cos k\pi x + B_0 \sin k\pi x,$$

$$\Phi_1 = A_1 \cos k\pi x + B_1 \sin k\pi x +$$
$$+\frac{2\text{æ}}{1-\text{æ}}(-A_0 \cos k\pi x + B_0 \sin k\pi x)\Phi^{*\prime}(x;X),$$

$$\Phi_2 = A_2 \cos k\pi x + B_2 \sin k\pi x +$$
$$+\frac{2\text{æ}}{1-\text{æ}}(-A_1 k\pi \sin k\pi x + B_1 k\pi \cos k\pi x)\Phi^{*\prime}(x;X),\ldots .$$

3. Визначення власних частот коливань. У попередньому параграфі побудовано загальний розв'язок рівнянь (2). Розглянемо крайову задачу для випадку вільних від напружень кінців стрижня:

$$\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \tag{17}$$

Внаслідок задоволення умов (17) розв'язком (16) отримуємо власні частоти коливань для наближення довільного порядку N:

$$\varphi(x,\ell) = \sum_{i=0}^{N}\Phi_i(x)\ell^i + O(\ell^{N+1}) = A(\ell,N)\cos k\pi x +$$
$$+ B(\ell,N)\sin k\pi x + \varphi_p(x;\ell;N) + O(\ell^{N+1}),$$

$$A(\ell,N) = \sum_{i=0}^{N} A_i \ell^i, \quad B(\ell,N) = \sum_{i=0}^{N} B_i \ell^i,$$

$$\varphi_p(x;\ell;N) = \sum_{i=0}^{N}\Phi_{pi}(x)\ell^i,$$

$$\Phi_{pi}(x) = a_i(A_k,B_k)\Phi^*(x;X) + b_i(A_k,B_k)\Phi^{*\prime}(x;X),$$
$$k = 0,1,\ldots,i-1. \tag{18}$$

Задоволення крайової умови при $x = 0$ для наближення N-го порядку з урахуванням (15) приводить до рівняння $B(\ell, N) = \sum_{i=0}^{N} B_i \ell^i = 0 \Leftrightarrow B_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, N$.

Задоволення крайової умови при $x = 1$ приводить до рекурентної системи рівнянь:

$$-k\pi \sin k\pi \sum_{i=0}^{N} A_i \ell^i +$$
$$+ \sum_{i=0}^{N} \left(a_i (A_s; 0) \Phi^{*\prime}(1; X) - k^2 \pi^2 b_i (A_s; 0) \Phi^* (1; X) \right) \ell^i = 0,$$
$$i = 0, 1, \ldots, N, \quad s = 0, 1, \ldots, i - 1. \qquad (19)$$

Якщо власні частоти подати у вигляді ряду $k = \sum_{i=0}^{N} k_i \ell^i$, то з (19) отримаємо рекурентну систему рівнянь

$$A_0 F_0 (k_0) = 0, \quad A_0 F_1 (k_0, k_1) + A_1 F_0 (k_0) = 0, \quad \ldots,$$
$$A_0 F_N (k_0, k_1, \ldots, k_N) + \ldots + A_N F_0 (k_0) = 0, \qquad (20)$$

послідовне розв'язання якої дає змогу відшукати k_0, k_1, ..., k_N.

Рівняння для знаходження перших наближень частот власних коливань мають вигляд:

$$N = 0: \quad A_0 \sin k_0 \pi = 0,$$

$$N = 1: \quad A_0 \Big(-2k_0 æ \sin k_0 \pi (1 - X) \sin k_0 \pi X +$$
$$+ (1 - æ) k_1 \cos k_0 \pi \Big) + A_1 \sin k_0 \pi = 0,$$

$$N = 2: \quad A_0 \Big(2æ \big[\cos k_0 \pi + \cos k_0 \pi (1 - 2X) +$$
$$+ \pi \big(\sin k_0 \pi - (1 - 2X) \sin k_0 \pi (1 - 2X) \big) \big] k_1 -$$
$$- \pi (1 - æ) \sin k_0 \pi \, k_1^{\,2} + 2(1 - æ) k_2 \cos k_0 \pi \Big) +$$
$$+ 2A_1 \Big(æ \big(\cos k_0 \pi - \cos k_0 \pi (1 - 2X) \big) k_0 +$$
$$+ (1 - æ) k_1 \cos k_0 \pi \Big) + 2A_2 (1 - æ) \sin k_0 \pi = 0. \qquad (21)$$

Розв'язки рівнянь (21) мають вигляд

$$k_0 = j, \quad k_1 = -\frac{2æ}{1 - æ} \sin^2 j\pi X,$$

$$k_2 = \frac{4æ^2 j}{(1 - æ)^2} \sin^2 j\pi X \big(\sin j\pi X - j\pi \cos j\pi X + 2j\pi X \cos j\pi X \big),$$
$$j = 1, 2, \ldots. \qquad (22)$$

Явні вирази (18) з урахуванням (22) дають змогу побудувати власні форми коливань стрижня.

4. Розв'язання оберненої задачі про визначення параметрів дефекту. Рівняння (20) містять параметри дефекту, а отже дають змогу наближено знаходити параметри дефекту по відомих зсувах частот власних коливань, що можна отримати експериментально.

Твердження 3. *Нульове наближення не містить інформації про параметри дефекту.*

Твердження 4. *Перше та друге наближення не забезпечують незалежного визначення* ℓ *та* $æ$, *а лише фізичного параметра дефекту* $\alpha = \ell æ / (1 - æ)$.

Для прикладу розглянемо визначення параметрів дефекту по першому наближенню. Частоти власних коливань бездефектного стрижня відповідають розв'язку в нульовому наближенні: $\sin k_0\pi = 0 \Leftrightarrow k_0 = 1, 2, \ldots$. За першим наближенням маємо $(k)_1 = k_0 + \ell\, k_1$, де $k_1 = -\dfrac{2æj}{1-æ}\sin^2 j\pi X$, $j = 1, 2, \ldots$. Отже, зсув частот власних коливань стрижня з дефектом порівняно з частотами коливань бездефектного стрижня визначається так:

$$\Delta k_j = \ell k_1 = -\frac{2æj\ell}{1-æ}\sin^2 j\pi X .$$

Позначимо

$$\Delta\tilde{k}_j = \frac{\Delta k_j}{j} = -2\alpha \sin^2 j\pi X, \quad \beta_{ij}{}^2 = \frac{\Delta\tilde{k}_i}{\Delta\tilde{k}_j} = \left(\frac{\sin i\pi X}{\sin j\pi X}\right)^2, \quad i \neq j, \tag{23}$$

де $\Delta\tilde{k}_j\, (\beta_{ij})$ – значення, знайдені з експерименту.

Твердження 5. *У випадку «м'якого» дефекту* $0 < \Delta E < E_0$, $æ \in (0,1)$, *зсуви частот коливань є від'ємними, а у випадку «жорсткого» дефекту* $\Delta E < 0$, $æ < 0$, *зсуви частот коливань є додатними.*

Це узгоджується з теоремою Релея про екстремальні властивості вільних коливань матеріальних систем. Таким чином, (23) дає змогу визначити $X = \pi^{-1}\arccos t_x$, де $t_x \in (0,1)$ – корінь рівняння $\beta_{ij}U_{j-1}(t) - U_{i-1}(t) = 0$ степеня $j-1$, $j > 1$, $U_j(t)$ – многочлен Чебишева другого роду.

Зауваження 2. *Внаслідок симетрії задачі дефекти з координатами* X *та* $1 - X$, $0 < X < 1/2$, *є еквівалентними.*

Для знайденого X параметр α можна визначити за формулою

$$\alpha = -\frac{\Delta\tilde{k}_i}{2\sin^2 \pi X} = -\frac{\Delta\tilde{k}_i}{2(1 - T_i(t_x))},$$

де $T_i(t)$ – многочлен Чебишева 1-го роду. Наприклад, якщо $i = 1$, $j = 2$, то $\beta_{12} = \Delta\tilde{k}_1 / \Delta\tilde{k}_2$, $2\beta_{12}\cos\pi x = 1$, $X = \pi^{-1}\arccos\beta_{12}^{-1}$, $\alpha = -\Delta\tilde{k}_1 / (2\sin^2 \pi X)$.

5. Множинні дефекти. Нехай стрижень містить скінченну кількість дефектів, що не перетинаються: $D_i = \{X_i, æ_i, \ell_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N_d$, $X_i + \ell_i < X_j - \ell_j$, $i \neq j$. Вважаємо, що $\ell = \max\limits_{i=1,2,\ldots,N_i} \ell_i \ll 1$ та $\sum\limits_{i=1}^{N_d} \ell_i \ll 1$. У цьому випадку подібні до (2) рівняння для пружних переміщень мають вигляд

$$\tilde{\varphi}'' + k^2\pi^2\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^{N_d} æ_i(\theta_i\tilde{\varphi}')' . \tag{24}$$

Побудуємо еквівалентне рівняння з сингулярностями нескінченного порядку в точках X_i, $i = 1, 2, \dots, N_d$:

$$\varphi'' + k^2\pi^2\varphi = \sum_{j=1}^{N_d}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}\delta^{(i)}(x - X_j), \tag{25}$$

де a_{ji} визначаються з еквівалентності правих частин рівнянь (24) і (25): $\left\langle \sum_{i=1}^{N_d} \text{æ}_i(\theta_i\tilde{\varphi}'), \psi \right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{d=1}^{N_d} a_{di}(-1)^i \Psi^{(i)}(X_d)$, $\Psi(x) \in \Omega_{(0,1)}^{(\infty)}$. Легко бачити, що

$$a_{d0} = 0, \quad a_{dj} = (-1)^j \text{æ}_d \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}^{(i+1)}(X_d)\ell_d^{i+j+1}(1 + (-1)^{i+j})}{i!\,j!(i + j + 1)},$$
$$j = 0, 1, 2, \dots . \tag{26}$$

Вирази (26) аналогічно до (4) забезпечують еквівалентність правих частин рівнянь (24) і (25). Умови типу (8) мають вигляд:

$$\varphi'(X_d - \ell_d - 0) = (1 - \text{æ}_d)\tilde{\varphi}'(X_d - \ell_d + 0),$$
$$\varphi'(X_d + \ell_d + 0) = (1 - \text{æ}_d)\tilde{\varphi}'(X_d + \ell_d - 0),$$
$$d = 1, 2, \dots, N_d. \tag{27}$$

Покладемо

$$\tilde{\varphi}(x;\{\ell\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{(d)i}(x;\{\ell\} \setminus \ell_d)\ell_d^i,$$
$$\varphi(x;\{\ell\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{(d)i}(x;\{\ell\} \setminus \ell_d)\ell_d^i, \quad d = 1, 2, \dots, N_d, \tag{28}$$

де $\{\ell\} = (\ell_1, \dots, \ell_{N_d})$ та

$$\varphi(x;\{\ell\}) = \psi_0(x) + \sum_{d=1}^{N_d} \psi_d(x)\ell_d + \sum_{d_1,d_2=1}^{N_d} \psi_{d_1,d_2}(x)\ell_{d_1}\ell_{d_2} + \cdots .$$

Надалі обмежимось лінійними наближеннями. Із (28) отримаємо

$$\psi_0(x) = \Phi_{(d)0}(x;\{0\}_d), \quad \psi_d(x) = \Phi_{(d)1}(x;\{0\}_d) = \frac{\partial\Phi(x)_0(x;\{0\}_k)}{\partial\ell_d},$$
$$d, k = 1, 2, \dots, N_d, \quad k \neq d. \tag{29}$$

Використавши (26), (27) та (29), отримаємо нульове та початкове наближення рівняння (25):

$$\ell^0: \quad \psi_0'' + k^2\pi^2\psi_0 = 0,$$

$$\ell^1: \quad \psi_d'' + k^2\pi^2\psi_d = \frac{2\text{æ}_d}{1 - \text{æ}_d}\{\psi_0'\}_X \delta'(x - X_d), \quad d = 1, 2, \dots, N_d.$$

Отже, в першому наближенні інтерференція відсутня. Тоді перше наближення загального розв'язку рівняння (24) має вигляд

$$\varphi(x) = \left(A_0 + \sum_{d=1}^{N_d} A_{d1}\ell_d\right)\cos k\pi x + \left(B_0 + \sum_{d=1}^{N_d} B_{d1}\ell_d\right)\sin k\pi x +$$
$$+ \sum_{d=1}^{N_d} \frac{2\text{æ}_d}{1 - \text{æ}_d}(-A_0 k\pi \sin k\pi x + B_0 \cos k\pi x)\Phi^{*\prime}(x; X_d).$$

Нехай крайові умови мають вигляд (17). Якщо розвинути частоти власних коливань у ряди $k = k_0 + \sum_{d=1}^{Nd} k_d \ell_d + O(\ell^2)$, то рівняння для k_0 і k_d, $d = 1, 2, \ldots, N_d$, мають вигляд, аналогічний до (21):

$$k_0 : \quad \sin k_0 \pi = 0 ,$$

$$k_d : \quad -2k_0 æ_d \sin k_0 \pi (1 - X_d) \sin k_0 \pi X_d + (1 - æ_d) \cos k_0 \pi X_d = 0 ,$$

а їхні розв'язки є аналогічними до (22):

$$k_0 = j, \quad k_d = -\frac{2æ_d}{1 - æ_d} j \sin^2 j\pi X_d , \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Таким чином, зсув власних коливань у першому наближенні має вигляд

$$\Delta \tilde{k}_j = \frac{\Delta k_j}{j} = \sum_{d=1}^{N_d} 2\alpha_d \sin^2 j\pi X_d , \quad \alpha_d = \frac{æ_d}{1 - æ_d} \ell_d . \tag{30}$$

Для ансамблю дефектів задача про визначення індивідуальних характеристик дефектів втрачає сенс. Проте вирази (30) можуть бути використані для визначення композитних характеристик ансамблю.

Розглянемо приклад визначення середньої дефектності стрижня при рівномірному розподілі дефектів.

Нехай $\alpha_d = æ_d / (1 - æ_d)$, X_d, $d = 1, 2, \ldots, N_d$, є незалежними випадковими величинами та $X_d \in U_{[0,1]}$. Тоді $\Delta \tilde{k}_j$ також є випадковою величиною з математичним сподіванням $E \Delta \tilde{k}_j = -\sum_{d=1}^{N_d} E\alpha_d + \sum_{d=1}^{N_d} E\alpha_d E \cos 2j\pi X_d$, $j = 1, 2, \ldots$.

Водночас

$$E \cos 2\pi j X_d = \int_0^1 \cos 2j\pi x \, dx = \frac{\sin 2j\pi}{2j\pi} = 0 .$$

Отже, $E \Delta \tilde{k}_j = -E\alpha$, $j = 1, 2, \ldots$, де $\alpha = \sum_{d=1}^{N_d} \alpha_d$ є інтегральною характеристикою дефектності стрижня.

Висновки. У роботі розглянуто питання, пов'язані з моделюванням дефектності лінійно пружного стрижня, що коливається вільним чином. Дефекти моделюються точковими сингулярностями нескінченного порядку. Визначено умови еквівалентності точкової сингулярності до стрибка фізичних характеристик. Знайдено загальний розв'язок еквівалентної задачі у вигляді слабко збіжного ряду за малим параметром. Побудовано рекурентний алгоритм знаходження розв'язку задачі власних частот та форм вільних коливань із заданою точністю. Розв'язано обернену задачу про визначення характеристик дефекту за відомими зсувами частот власних коливань. Алгоритм побудови розв'язку узагальнено на випадок множинних дефектів. Показано, що в першому наближенні інтерференція між дефектами відсутня. Побудовано залежності зсувів частот власних коливань від характеристик множинних дефектів у першому наближенні.

Отримані результати можуть бути узагальнені для дво- та тривимірних задач про коливання пружних тіл із неоднорідностями та для розробки методів неруйнівного контролю механічних систем та конструкцій.

1. *Inaudi J. A., Matusevich A. E.* Domain-partition power series in vibration analysis of variable-cross-section rods // J. Sound Vib. – 2010. – **329**, No. 21. – P. 4534–4549. – https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.04.028.

2. *Kaplunov J., Prikazchikov D., Sergushova O.* Multi-parametric analysis of the lowest natural frequencies of strongly inhomogeneous elastic rods // J. Sound Vib. – 2016. – **366**. – P. 264–276. – https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.008.
3. *Lia Q. S., Wu J. R., Xu J.* Longitudinal vibration of multi-step non-uniform structures with lumped masses and spring supports // Appl. Acoust. – 2002. – **63**, No. 3. – P. 333–350. – https://doi.org/10.1016/S0003-682X(01)00034-2.
4. *Rubio L., Fernández-Sáez J., Morassi A.* The full nonlinear crack detection problem in uniform vibrating rods. // J. Sound Vib. – 2015. – **339**. – P. 99–111. – https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.011.
5. *Soloviev A. N., Parinov I. A., Cherpakov A. V., Chaika Yu. A., Rozhkov E. V.* Analysis of oscillation forms at defect identification in node of truss based on finite element modeling // Mater. Phys. Mech. – 2018. – **37**, No. 2. – P. 192–197. – https://doi.org/10.18720/MPM.3722018_12.
6. *Stephen N. G., Lai K. F., Young K., Chan K. T.* Longitudinal vibrations in circular rods: a systematic approach // J. Sound Vib. – 2012. – **331**, No. 1. – P. 107–116. – https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.021.
7. *Weaver W. (Jr), Timoshenko S. P., Young D. H.* Vibration problems in engineering. – New York: John Wiley & Sons, 1990. – 624 p.
8. *Zrazhevsky G., Zrazhevska V.* The extension method for solving boundary value problems of the theory of oscillations of bodies with heterogeneity // WJERT. – 2020. – **6**, No. 2. – P. 503–514.

SIMULATION OF DEFECTS WITH POINT SINGULARITIES IN AN ELASTIC ROD UNDER HARMONIC OSCILLATIONS

Harmonic oscillations are analyzed in a linearly elastic rod of a finite length with small-scale inhomogeneities with dissimilar properties (elastic, viscoelastic, plastic, inhomogeneous), which are governed by the linear constitutive equations. A mathematical model is constructed to encounter the effect of such defects through the use of point singularities of the infinite order located in the center of an inhomogeneity. The boundary value problem is formulated on this basis for a differential equation with a hypersingular right-hand side, the solution of which is equivalent to the one of the original problem. A procedure for constructing the coefficients of a hypersingular series with a point carrier simulating a defect is developed. It is based on the decomposition into infinite series by a small parameter with coefficients, which are represented by hypersingular generalized functions. The proposed technique is used for solving both a direct problem, which implies the determination of frequencies and forms of the eigenvibrations of the rod with given properties of the inhomogeneities, and an inverse problem concerned with the determination of the integral characteristics of the defectiveness of the rod under the known frequency shifts of the eigenvibrations. The suggested approach implies the recursive solving of the boundary value problems which allows for the prediction of defectiveness within the required accuracy.

Key words: *rod oscillations, inhomogeneities, point singularity, inverse boundary value problem.*

[1]Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,
[2]Нац. тех. ун-т «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ

Одержано
27.11.22