

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКІВ ДОМІШКИ У ДВОФАЗНІЙ СМУЗІ З КУЛЬОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА СУМІРНИХ ОБ'ЄМНИХ ЧАСТОК ФАЗ

Досліджено потік домішкової речовини у двофазному тілі з випадково розміщеними кульовими включеннями за умови сумірних об'ємних часток фаз. На основі подання функції концентрації у вигляді інтегрального ряду Неймана та застосування першого закону Фіка отримано загальну формулу для дифузійного потоку у двофазному тілі. При цьому використано кореляційну функцію та усереднену функцію структури тіла. Одержано розрахункові формули для усередненого потоку та середньої кількості домішкової речовини, що пройшла через заданий переріз двофазного тіла з випадково розміщеними кульовими включеннями. Розроблено програмні модулі та проведено чисельний аналіз відповідних характеристик процесу масоперенесення.

**Ключові слова:** дифузійний потік, випадкова неоднорідна структура, кульове включення, рівномірний розподіл, ряд Неймана, усереднення за ансамблем конфігурацій фаз.

**Вступ.** Моделювання процесів перенесення маси у тілах з неоднорідною внутрішньою будовою дозволяє оптимізувати властивості матеріалів, покращувати технології виробництва, прогнозувати поведінку матеріалів в екстремальних умовах експлуатації тощо [5, 8, 10]. При цьому, разом із концентрацією домішки, однією з основних характеристик процесу перенесення маси у тілі, що потребує дослідження, є дифузійний потік.

Для вивчення дифузійного потоку у випадково неоднорідних структурах застосовують процедуру усереднення за ансамблем конфігурацій фаз. Однак ця процедура може викликати значні труднощі, особливо коли потік визначається за першим законом Фіка, оскільки, як правило, функції кореляції випадкового поля концентрації та стохастичного коефіцієнта дифузії залишаються невідомими. З огляду на це в роботах [6, 12, 15] для дослідження стохастичного потоку маси використано балансові співвідношення для пористих тіл. Ці співвідношення записано для гомогенізованих середовищ з фізичними характеристиками, які є усередненими величинами. При цьому враховують відмінності між фазами, але нехтують взаємодією між ними. У роботах [3, 7] запропоновано альтернативний підхід, відповідно до якого випадковий потік маси у багатофазних випадково неоднорідних тілах досліджується на основі рівняння дифузії, сформульованого безпосередньо для функції потоку. Цей підхід дозволяє детальніше враховувати вплив неоднорідностей і взаємодію між фазами, але потребує більш складного математичного обґрунтування і додаткових умов на функцію потоку, що ускладнює його застосування у випадку тривимірної постановки задачі.

У цій роботі досліджуємо дифузійний потік у двофазному тілі з кульовими включеннями за умови сумірних об'ємних часток фаз на основі подання концентрації домішкової речовини у вигляді інтегрального ряду Неймана. При цьому враховано, що застосування першого закону Фіка безпосередньо до одержаної розрахункової формули для концентрації з метою отримання формули для потоку дає менш точний результат, ніж диференціювання відповідної функції концентрації до етапу усереднення за ансамблем конфігурацій фаз.

**1. Математична модель потоку домішкової речовини у випадку сумірних об'ємних часток фаз.** Нехай у смузї товщини  $z_0$ , що складається з основної фази (скелету) та випадково розміщених кульових включень,

✉ davydoka@gmail.com

відбувається дифузія домішкової речовини. Приймаємо, що об'ємна частка жодної з фаз не є домінуючою, тобто в середовищі не можна виділити базової фази. Крім того, вважаємо, що кульові включення розміщені за рівномірним законом розподілу, а характеристики фаз (коефіцієнти дифузії  $d$  та густини  $\rho$ ) є сталими в межах кожної з фаз. У початковий момент часу домішкова речовина в тілі відсутня, на верхній границі тіла  $z = 0$  підтримується стале значення концентрації домішкової речовини  $c_*$ , а на нижній границі  $z = z_0$  концентрація дорівнює нулю. На границях поділу фаз приймаємо умови неідеального контакту.

Зазначимо, що у випадку сумірних об'ємних часток фаз для одержання розв'язку контактної-крайової задачі здійснюють моделювання скелета тіла щільною упаковкою з  $m$  куль різного радіуса  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , при цьому виділяють також  $N - m$  характерних радіусів включень  $R_j$ ,  $j = m + 1, \dots, N$ . Детально процес розв'язання відповідної контактної-крайової задачі для функції концентрації  $c(\mathbf{r}, t)$ , сформульованої у тривимірній постановці, розглянуто у [4]. Він полягає у зведенні вихідної задачі до рівняння масоперенесення для тіла в цілому, одержанні еквівалентного інтегродиференціального рівняння та знаходженні його розв'язку у вигляді інтегрального ряду Неймана розвиненням в околі розв'язку однорідної крайової задачі з усередненими характеристиками, в результаті чого маємо

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{r}, t) = & c_a(z, t) + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s^a(\mathbf{r}, t') c_a(z', t') d\mathbf{r}' dt' + \\
& + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s^a(\mathbf{r}', t') \times \\
& \times \int_0^{t'} \iiint_V G_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') L_s^a(\mathbf{r}'', t'') c_a(z'', t'') d\mathbf{r}'' dt'' d\mathbf{r}' dt' + \\
& + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s^a(\mathbf{r}', t') \int_0^{t'} \iiint_V G_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') L_s^a(\mathbf{r}'', t'') \times \\
& \times \int_0^{t''} \iiint_V G_a(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''', t'', t''') L_s^a(\mathbf{r}''', t''') \times \\
& \times c_a(z''', t''') d\mathbf{r}''' dt''' d\mathbf{r}'' dt'' d\mathbf{r}' dt' + \dots
\end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $c_a(\mathbf{r}, t)$  – розв'язок однорідної крайової задачі дифузії в однорідному тілі з усередненими характеристиками  $\rho_a = \sum_{j=1}^N v_j \rho_j$ ,  $d_a = \sum_{j=1}^N v_j d_j$ ;  $v_j$  – об'ємна частка куль радіуса  $R_j$ , що визначається співвідношенням [2]

$$c_a(z, t) = c_* \left[ 1 - \frac{z}{z_0} - \frac{2}{z_0} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q} e^{-\frac{d_a}{\rho_a} y_q^2 t} \sin y_q z \right], \quad (2)$$

$G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$  – функція Гріна, яка є розв'язком детермінованої крайової задачі з точковим джерелом і задається виразом [2]

$$G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{\theta(t-t')}{z_0 d_a(t-t')} e^{-\frac{\rho_a}{4d_a} \left( \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{t-t'} \right)} \times \\ \times \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\frac{d_a y_s^2 (t-t')}{\rho_a}} \sin y_s z \sin y_s z', \quad (3)$$

де  $y_q = \frac{q\pi}{z_0}$ ,  $y_s = y_q|_{q=s}$ ,  $\theta(t)$  – одинична східчаста функція Гевісайда [9].

Випадковий оператор  $L_s^a(\mathbf{r}, t)$  у співвідношенні (1) при цьому визначається так [4]:

$$L_s^a(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^N (\rho_a - \rho_j) \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^N (d_a - d_j) \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(\mathbf{r}) \Delta + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}} [\nabla \dots]_{\Gamma_{ij}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}} [\dots]_{\Gamma_{ij}} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [d(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}} [\dots]_{\Gamma_{ij}} \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}),$$

де  $\eta_{ij}(\mathbf{r})$  – випадкова функція структури [11],  $\eta_{ij}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in (V_i^{(j)}), \\ 0, & \mathbf{r} \notin (V_i^{(j)}), \end{cases}$ ,  $(V_i^{(j)})$  –  $i$ -та однозв'язна область фази  $j$ ,  $\mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}$  – радіус-вектор точок міжфазної границі  $\Gamma_{ij}$ ,  $[\dots]_{\Gamma_{ij}}$  – стрибок функції на границі  $\Gamma_{ij}$ ,  $\delta(\mathbf{r})$  – дельта-функція Дірака.

Оскільки функція  $c_a(z, t)$  (2), як і її похідна, не має розривів, то для  $L_s^a(\mathbf{r}, t)c_a(z, t)$  отримаємо

$$F_a(\mathbf{r}, t) \equiv L_s^a(\mathbf{r}, t)c_a(z, t) = \\ = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \left[ (\rho_a - \rho_j) \frac{\partial c_a(z, t)}{\partial t} - (d_a - d_j) \frac{\partial^2 c_a(z, t)}{\partial z^2} \right] \eta_{ij}(\mathbf{r}) = \\ = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}, t) c_a(z, t) \eta_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} F_c^j(z, t) \eta_{ij}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Тут

$$\tilde{L}_s^j(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{n_j} \left[ (\rho_a - \rho_j) \frac{\partial}{\partial t} - (d_a - d_j) \Delta_{\mathbf{r}} \right], \quad (5)$$

$$F_c^j(z, t) = \sum_{i=1}^{n_j} \left[ (\rho_a - \rho_j) \frac{\partial c_a(z, t)}{\partial t} - (d_a - d_j) \frac{\partial^2 c_a(z, t)}{\partial z^2} \right].$$

У нових позначеннях ряд Неймана (1) подамо як

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{r}, t) = & c_a(z, t) + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') F_a(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' + \\
& + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s^a(\mathbf{r}', t') \times \\
& \times \int_0^{t'} \iiint_V G_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') F_a(\mathbf{r}'', t'') d\mathbf{r}'' dt'' d\mathbf{r}' dt' + \\
& + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s^a(\mathbf{r}', t') \int_0^{t'} \iiint_V G_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') L_s^a(\mathbf{r}'', t'') \times \\
& \times \int_0^{t''} \iiint_V G_a(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''', t'', t''') F_a(\mathbf{r}''', t''') d\mathbf{r}''' dt''' d\mathbf{r}'' dt'' d\mathbf{r}' dt' + \dots \quad (6)
\end{aligned}$$

Потік дифундуєчих частинок  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ , тобто кількість частинок, які за одиницю часу проходять через одиницю площі плоского перерізу тіла, перпендикулярного до градієнта концентрації, визначається за першим законом Фіка

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -d(\mathbf{r}) \cdot \nabla c(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Оскільки розміщення куль відносно різних координатних площин може підпорядковуватись різним ймовірнісним законам розподілу, то кінетичні коефіцієнти дифузії відносно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  можуть бути різними. Приймаючи, що включення розподілені за рівномірним законом вздовж усіх координатних осей, одержуємо коефіцієнти дифузії, які є однаковими вздовж різних осей.

Враховуючи вираз для дифузійного потоку (7), а також співвідношення (4)–(6), для випадкового дифузійного потоку отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = & -d(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left( c_a(z, t) + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') F_a(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' + \right. \\
& + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s^a(\mathbf{r}', t') \times \\
& \times \int_0^{t'} \iiint_V G_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') F_a(\mathbf{r}'', t'') d\mathbf{r}'' dt'' d\mathbf{r}' dt' + \\
& + \int_0^t \iiint_V G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') L_s^a(\mathbf{r}', t') \int_0^{t'} \iiint_V G_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') L_s^a(\mathbf{r}'', t'') \times \\
& \left. \times \int_0^{t''} \iiint_V G_a(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''', t'', t''') F_a(\mathbf{r}''', t''') d\mathbf{r}''' dt''' d\mathbf{r}'' dt'' d\mathbf{r}' dt' + \dots \right).
\end{aligned}$$

Використовуючи подання коефіцієнта дифузії через випадкову функцію структури

$$d(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{n_k} d_0 \eta_{sk}(\mathbf{r}) + \sum_{k=\ell+1}^N \sum_{s=1}^{n_k} d_1 \eta_{sk}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{n_k} d_k \eta_{sk}(\mathbf{r}),$$

а також співвідношення (4), маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = & -\sum_k \sum_s d_k \eta_{sk}(\mathbf{r}) \frac{\partial c_a(z, t)}{\partial z} - \sum_k \sum_s d_k \int_0^t \iiint_V \nabla_{\mathbf{r}} (G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')) \times \\
& \times \sum_{j=1}^N \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') c_a(z', t') \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{sk}(\mathbf{r}) \eta_{ij}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' dt' - \\
& - \sum_k \sum_s d_k \int_0^t \iiint_V \nabla_{\mathbf{r}} (G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')) \sum_{j=1}^N \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') \times \\
& \times \int_0^{t'} \iiint_V G_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') \sum_{j=1}^N \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}'', t'') c_a(z'', t'') \times \\
& \times \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{p=1}^{n_1} \eta_{sk}(\mathbf{r}) \eta_{ij}(\mathbf{r}') \eta_{pj}(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' dt'' d\mathbf{r}' dt' + \dots \quad (8)
\end{aligned}$$

**2. Усереднення потоку домішкової речовини за ансамблем конфігурацій фаз у випадку сумірних об'ємних часток.** Проведемо усереднення виразу (8) за ансамблем конфігурацій фаз, приймаючи рівномірний розподіл кульових включень в області тіла. Прийmemo, що випадковою величиною є радіус-вектор  $\mathbf{r}_{ij}$  центра кулі, від якого залежить тільки функція структури  $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ . Тоді одержимо

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{conf}} = & -\sum_k \sum_s d_k \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \rangle_{\text{conf}} \frac{\partial c_a(z, t)}{\partial z} - \\
& - \sum_k \sum_s d_k \int_0^t \iiint_V \nabla_{\mathbf{r}} (G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')) \sum_{j=1}^N \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') c_a(z', t') \times \\
& \times \sum_{i=1}^{n_j} \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \eta_{ij}(\mathbf{r}') \rangle_{\text{conf}} d\mathbf{r}' dt' - \\
& - \sum_k \sum_s d_k \int_0^t \iiint_V \nabla_{\mathbf{r}} (G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')) \times \\
& \times \sum_{j=1}^N \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') \int_0^{t'} \iiint_V G_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t', t'') \sum_{j=1}^N \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}'', t'') c_a(z'', t'') \times \\
& \times \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{p=1}^{n_1} \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \eta_{ij}(\mathbf{r}') \eta_{pj}(\mathbf{r}'') \rangle_{\text{conf}} d\mathbf{r}'' dt'' d\mathbf{r}' dt' + \dots
\end{aligned}$$

Зазначимо, що виконуються такі співвідношення [1, 14]:

$$\begin{aligned}
\langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \eta_{ij}(\mathbf{r}') \rangle & = \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \rangle \langle \eta_{ij}(\mathbf{r}') \rangle + \psi_{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \\
\langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \eta_{ij}(\mathbf{r}') \eta_{pj}(\mathbf{r}'') \rangle & = \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \rangle \langle \eta_{ij}(\mathbf{r}') \rangle \langle \eta_{pj}(\mathbf{r}'') \rangle + \gamma_{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''),
\end{aligned}$$

де  $\psi_{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – кореляційна функція,  $\gamma_{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')$  – кумулятивна функція.

У подальшому обмежимося першими двома членами ряду Неймана (8), тоді для усередненого потоку домішкової речовини отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{conf}} &= - \sum_k \sum_s d_k \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \rangle \frac{\partial c_a(z, t)}{\partial z} - \\
&- \sum_k \sum_s d_k \int_0^t \iiint_{(V')} \nabla_{\mathbf{r}} (G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')) \sum_{j=1}^N \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') c_a(z', t') \times \\
&\times \sum_{i=1}^{n_j} \left[ \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \rangle \langle \eta_{ij}(\mathbf{r}') \rangle + \psi_{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' dt'. \quad (9)
\end{aligned}$$

Тут  $\psi_{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \iint_{(V')^2} xy w_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dy dx$ ,  $w_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – двовимірний спільний розпо-

діл випадкових величин  $\mathbf{r}$  та  $\mathbf{r}'$  [14].

Для випадку рівномірного ймовірнісного розподілу маємо [3]

$$w_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{V^2}, & (\mathbf{r}, \mathbf{r}') \in (V')^2, \\ 0, & (\mathbf{r}, \mathbf{r}') \notin (V')^2. \end{cases}$$

Враховуючи, що випадковою величиною є радіус-вектор центра кулі  $\mathbf{r}_{ij}$ , а також приймаючи, що характерний радіус кульового включення становить  $R_j$ , одержимо

$$\psi_{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{z_0 - R_j} \int_0^{z_0 - R_j} xy w_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dy dx = \frac{(z_0 - R_j)^4}{4V^2}.$$

Розглянемо перший доданок у правій частині рівності (9):

$$\begin{aligned}
\sum_k \sum_{s=1}^{n_k} d_k \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \rangle &= \sum_k \frac{d_k}{V} \sum_{s=1}^{n_k} \iiint_V \eta_{sk}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}_{sk} = \\
&= \sum_k \frac{d_k}{V} \sum_{s=1}^{n_k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} \eta_{sk}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sk}|) dz_{sk} dy_{sk} dx_{sk} = \sum_k d_k v_k,
\end{aligned}$$

де  $\mathbf{r}_{sk}$  – внутрішня точка  $s$ -ї однозв'язної області  $(V_s^{(k)})$  фази  $k$ .

У випадку двофазного тіла отримаємо  $\sum_k \sum_s d_k \langle \eta_{sk}(\mathbf{r}) \rangle = d_0 v_0 + d_1 v_1$ .

Прийнявши, що густина функції рівномірного розподілу дорівнює  $1/V$ , і всі сферичні включення повністю розміщені в області тіла, після переходу до сферичної системи координат одержимо таке співвідношення для усередненої функції структури [4]:

$$I(z) \equiv \langle \eta_{ij}(\mathbf{r}) \rangle_{\text{conf}} = \begin{cases} v_j \left( \frac{z}{R_j} - 1 \right)^3, & z < 2R_j, \\ v_j, & z \geq 2R_j. \end{cases} \quad (10)$$

Врахуємо рівність (10) у формулі (9) для усередненого потоку:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{conf}} &\approx -(d_0 v_0 + d_1 v_1) \left[ \frac{\partial c_a(z, t)}{\partial z} - \sum_{j=1}^N v_j \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2R_j} \left( \frac{z'}{R_j} - 1 \right)^3 \times \right. \\
&\times \nabla_{\mathbf{r}} (G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')) \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') c_a(z', t') dz' dy' dx' dt' + \\
&+ \sum_{j=1}^N v_j \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{2R_j}^{z_0} \nabla_{\mathbf{r}} (G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') c_a(z', t') dz' dy' dx' dt' \Big] - \\
& - (d_0 v_0 + d_1 v_1) \Psi_\eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} \nabla_{\mathbf{r}} (G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')) \times \\
& \times \sum_{j=1}^N \tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') c_a(z', t') dz' dy' dx' dt'. \tag{11}
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_s^j(\mathbf{r}', t') c_a(z', t') &= \sum_{j=1}^N \left[ (\rho_a - \rho_j) \frac{\partial c_a(z', t')}{\partial t'} - (d_a - d_j) \frac{\partial^2 c_a(z', t')}{\partial z'^2} \right] = \\
&= \sum_{j=1}^N \left[ \frac{2c^*}{z_0} d_j - \frac{d_a}{\rho_a} \rho_j \sum_{q=1}^{\infty} y_q e^{-\frac{d_a}{\rho_a} y_q^2 t'} \sin y_q z' \right].
\end{aligned}$$

Функція Гріна (3) при дії на неї набла-оператора Гамільтона набуває вигляду

$$\nabla_{\mathbf{r}} G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{\partial G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')}{\partial z} \mathbf{k}, \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')}{\partial x} &= \frac{\pi(x-x')\theta(t-t')}{z_0 d_0 (t-t')^2} e^{-\frac{\rho_0}{4d_0} \left( \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{t-t'} \right)} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{d_0 y_k^2 (t-t')}{\rho_0}} \sin y_k z \sin y_k z', \\
\frac{\partial G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')}{\partial y} &= \frac{\pi(y-y')\theta(t-t')}{z_0 d_0 (t-t')^2} e^{-\frac{\rho_0}{4d_0} \left( \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{t-t'} \right)} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{d_0 y_k^2 (t-t')}{\rho_0}} \sin y_k z \sin y_k z', \\
\frac{\partial G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')}{\partial z} &= \frac{\pi\theta(t-t')}{2z_0 d_0 (t-t')} e^{-\frac{\rho_0}{4d_0} \left( \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{t-t'} \right)} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{d_0 y_k^2 (t-t')}{\rho_0}} y_k \cos y_k z \sin y_k z'.
\end{aligned}$$

Підставимо одержані співвідношення у вираз для дифузійного потоку (11) та проінтегруємо за відповідними змінними. Зазначимо, що, відповідно до [13], маємо

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-x') e^{-\frac{\rho_a}{4d_a} \left( \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{t-t'} \right)} dx' dy' &= 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y-y') e^{-\frac{\rho_a}{4d_a} \left( \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{t-t'} \right)} dx' dy' &= 0,
\end{aligned}$$

$$\int_0^{z_0} \sin y_n z' \sin y_m z' dz' = 0.$$

Отже, коефіцієнти у рівності (12) біля ортів  $\mathbf{i}$  та  $\mathbf{j}$ , а також доданок із множителем  $\psi_\eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  у формулі (11) дорівнюють нулеві. Отже, вираз для дифузійного потоку (11) не залежить від функції кореляції  $\psi_\eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  і є нульовим уздовж осей  $Ox$  та  $Oy$ .

Проінтегрувавши вираз (11) за всіма змінними, одержимо розрахункову формулу для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз дифузійного потоку у двофазному тілі з кульовими вclusions, розподіленими за рівномірним законом, у випадку сумірних об'ємних часток фаз:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{conf}} \approx & \frac{(d_0 v_0 + d_1 v_1) c_*}{z_0} \left[ 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\frac{d_a y_q^2 t}{\rho_a}} \cos y_q z - \mathbf{k} \sum_{j=1}^N \frac{4v_j \pi^2 K_{dp}^j}{\rho_a z_0} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{s=1}^{\infty} y_s \cos y_s z \left( A_s^j e^{-\frac{d_a y_s^2 t}{\rho_a}} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq s}}^{\infty} A_{sq}^j \left[ e^{-\frac{d_a y_s^2 t}{\rho_a}} - e^{-\frac{d_a y_q^2 t}{\rho_a}} \right] \right) \right], \quad (13) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} K_{dp}^j &= d_j - d_a \frac{\rho_j}{\rho_a}, \quad y_{sq}^\pm = y_s \pm y_q, \quad A_s^j = z_0 - 2R_j + \frac{\sin(4y_s R_j)}{2y_s}, \\ A_{sq}^j &= \frac{\rho_a}{d_a (y_q^2 - y_s^2)} \left\{ B_c^j(y_{sq}^-) - B_c^j(y_{sq}^+) - \frac{\sin(2R_j y_{sq}^-)}{y_{sq}^-} + \frac{\sin(2R_j y_{sq}^+)}{y_{sq}^+} \right\}, \\ B_c^j(\omega) &= \frac{1}{R_j^3} \left\{ \frac{3}{\omega^2} \left( R_j^2 - \frac{2}{\omega^2} \right) (\cos(2R_j \omega) - 1) + \frac{R_j}{\omega} \left( R_j^2 - \frac{6}{\omega^2} \right) \sin(2R_j \omega) \right\}. \end{aligned}$$

При цьому усереднений потік домішкової речовини через верхню,  $z = 0$ , та нижню,  $z = z_0$ , поверхні тіла визначається зі співвідношень

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{conf}} \Big|_{z=0} \approx & \frac{(d_0 v_0 + d_1 v_1) c_*}{z_0} \left\{ 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\frac{d_a y_q^2 t}{\rho_a}} - \mathbf{k} \sum_{j=1}^N \frac{4v_j \pi^2 K_{dp}^j}{\rho_a z_0} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{s=1}^{\infty} y_s \left( A_s^j e^{-\frac{d_a y_s^2 t}{\rho_a}} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq s}}^{\infty} A_{sq}^j \left[ e^{-\frac{d_a y_s^2 t}{\rho_a}} - e^{-\frac{d_a y_q^2 t}{\rho_a}} \right] \right) \right\}, \\ \langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{conf}} \Big|_{z=z_0} \approx & \frac{(d_0 v_0 + d_1 v_1) c_*}{z_0} \left\{ 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q e^{-\frac{d_a y_q^2 t}{\rho_a}} - \mathbf{k} \sum_{j=1}^N \frac{4v_j \pi^2 K_{dp}^j}{\rho_a z_0} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s y_s \left( A_s^j e^{-\frac{d_a y_s^2 t}{\rho_a}} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq s}}^{\infty} A_{sq}^j \left[ e^{-\frac{d_a y_s^2 t}{\rho_a}} - e^{-\frac{d_a y_q^2 t}{\rho_a}} \right] \right) \right\}. \quad (13') \end{aligned}$$

Середню кількість домішкової речовини, що пройшла через поверхню  $z = z_*$  за час  $t_*$ , визначаємо таким чином:



$$\langle Q_* \rangle_{\text{conf}} = \int_0^{t_*} \langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\text{conf}} \Big|_{z=z_*} dt. \quad (14)$$

Підставивши вираз для усередненого дифузійного потоку (13) у формулу (14), отримаємо

$$\begin{aligned} \langle Q_* \rangle_{\text{conf}} = & \frac{(d_0 v_0 + d_1 v_1) c_*}{z_0} \left\{ t_* - \frac{2\rho_a}{d_a y_q^2} \sum_{q=1}^{\infty} \left( 1 - e^{-\frac{d_a}{\rho_a} y_q^2 t} \right) \cos y_q z_* - \right. \\ & - \sum_{j=1}^N \frac{4v_j \pi^2 K_{d\rho}^j}{\rho_a z_0} \sum_{s=1}^{\infty} y_s \cos y_s z_* \left( \frac{A_s^j}{y_s^2} e^{-\frac{d_a y_s^2 t_*}{\rho_a}} - 1 \right) + \\ & \left. + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq s}}^{\infty} A_{sq}^j \left[ \frac{y_s^2 - y_q^2}{y_s^2 y_q^2} + y_s e^{-\frac{d_a y_s^2 t_*}{\rho_a}} - y_q^{-2} e^{-\frac{d_a y_q^2 t_*}{\rho_a}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Зокрема, середня кількість речовини, що пройшла через нижню поверхню тіла, визначається як

$$\begin{aligned} \langle Q_* \rangle_{\text{conf}} \Big|_{z=z_0} = & \frac{(d_0 v_0 + d_1 v_1) c_*}{z_0} \left\{ t_* - \frac{2\rho_a}{d_a y_q^2} \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \left( 1 - e^{-\frac{d_a}{\rho_a} y_q^2 t} \right) - \right. \\ & - \sum_{j=1}^N \frac{4v_j \pi^2 K_{d\rho}^j}{\rho_a z_0} \sum_{s=1}^{\infty} y_s (-1)^s \left( \frac{A_s^j}{y_s^2} \left( e^{-\frac{d_a y_s^2 t_*}{\rho_a}} - 1 \right) + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq s}}^{\infty} A_{sq}^j \left[ \frac{y_s^2 - y_q^2}{y_s^2 y_q^2} + y_s e^{-\frac{d_a y_s^2 t_*}{\rho_a}} - y_q^{-2} e^{-\frac{d_a y_q^2 t_*}{\rho_a}} \right] \right) \right\}. \end{aligned}$$

Відмітимо, що кількість домішкової речовини, що пройшла через задану поверхню тіла, містить доданок, прямо пропорційний до часу, для якого визначаємо усереднену кількість речовини.

**3. Числовий аналіз усередненого потоку та середньої кількості домішкової речовини у тілі з кульовими включеннями.** На основі одержаних розрахункових формул виконаємо числовий аналіз усередненого потоку домішкової речовини у тілі з кульовими включеннями у випадку сумірних об'ємних часток фаз. Обчислення проведемо у безрозмірних змінних  $\zeta = z/z_0$ ,  $\tau = d_0 t/z_0^2$ . Точність обчислення рядів за  $s$  становить  $10^{-7}$ , а за  $q - 10^{-9}$ .

На рис. 1 наведено залежність від часу  $\tau$  потоку маси  $\langle J(\zeta, \tau) \rangle / c_*$  домішкових частинок через поверхню  $z = z_0$  (у безрозмірних змінних  $\zeta = 1$ ). Приймаємо, що  $N = 5$ ,  $m = 3$ , тобто маємо три типи куль різного радіуса для моделювання упаковки скелету та два типи куль різного радіуса для опису кульових включень. Вважаємо, що  $R_1 = 0.001$  ( $v_1 = 0.2$ ),  $R_2 = 0.001$  ( $v_2 = 0.3$ ),  $R_3 = 0.0001$  ( $v_3 = 0.1$ ),  $R_4 = 0.001$  ( $v_4 = 0.3$ ) та  $R_5 = 0.0001$  ( $v_5 = 0.1$ ). Нехай коефіцієнт дифузії домішкової речовини у скелеті дорівнює 1.5 ( $d_1 = d_2 = d_3 = 1.5$ ), а у включеннях - 0.8 ( $d_4 = d_5 = 0.8$ ). Для густин відповідних фаз приймаємо  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1.8$  та  $\rho_4 = \rho_5 = 1.2$ . Тоді усереднені по об'єму тіла характеристики становлять  $d_a = 1.22$ ,  $\rho_a = 1.56$ .

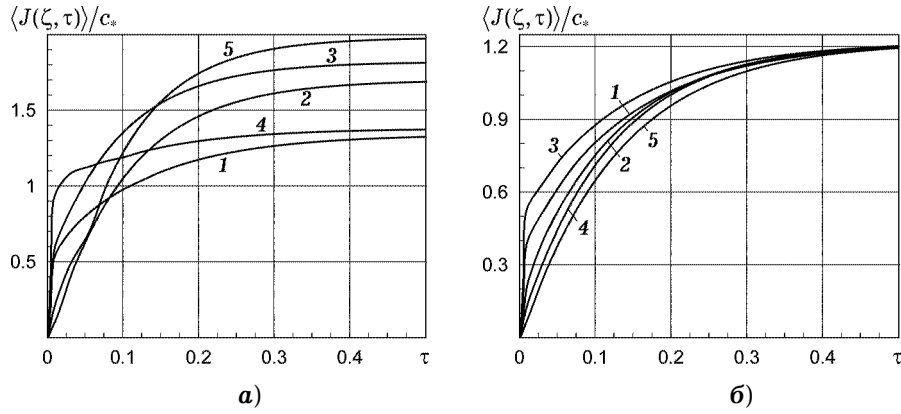


Рис. 1

На рис. 1а криву 1 побудовано для значень коефіцієнтів дифузії  $d_1 = 1.5$  та  $d_4 = 1.1$ , криву 2 –  $d_1 = 1.5$  та  $d_4 = 1.2$ , криву 3 –  $d_1 = 2.5$  та  $d_4 = 0.5$ , криву 4 –  $d_1 = 2.5$  та  $d_4 = 0.8$ , криву 5 –  $d_1 = 2.5$  та  $d_4 = 1.2$ . Залежність усередненого потоку домішкової речовини, що проходить через нижню границю тіла, для різних коефіцієнтів густини фаз наведено на рис. 1б, зокрема, для  $\rho_1 = 1.8$  та  $\rho_4 = 1.2$  (крива 1),  $\rho_1 = 1.5$  та  $\rho_4 = 1.2$  (крива 2),  $\rho_1 = 1.8$  та  $\rho_4 = 1.1$  (крива 3),  $\rho_1 = 1.2$  та  $\rho_4 = 1.5$  (крива 4),  $\rho_1 = 1.1$  та  $\rho_4 = 1.8$  (крива 5).

Збільшення коефіцієнтів дифузії як у включеннях, так і в скелеті тіла призводить до зростання усередненого потоку домішкової речовини (криві 1, 2, рис. 1а). Зменшення густини скелету приводить до зростання усередненого потоку (криві 1, 2, рис. 1б), аналогічно як і зменшення густини кульових включень (крива 1 та крива 3 на рис. 1б). Зазначимо, що для вибраних вхідних даних чисельного дослідження усереднені потоки домішкової речовини виходять на усталений режим для  $\tau > 0.45$  (рис. 1). Зазначимо, що для різних значень коефіцієнтів дифузії усталений режим є також різним (рис. 1а), тоді як для різних коефіцієнтів густини усталений режим є однаковим (рис. 1б).

На рис. 2 наведено залежності від безрозмірного часу  $\tau_*$  розподілів середньої кількості домішкової речовини  $\langle Q_* \rangle / c_*$ , що пройшла через шар за час  $\tau_*$ . Рис. 2а ілюструє значення функції  $\langle Q_* \rangle / c_*$  для різних перерізів:  $\zeta = 0.3, 0.6, 1$  (криві 1'/1''–3'/3''). Криві 1'–3' (суцільні лінії) побудовано для співвідношень коефіцієнтів дифузії та густини у скелеті, які є більшими, ніж у включеннях:  $d_1 = d_2 = d_3 = 1.5$  та  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1.8$  (у скелеті),  $d_4 = d_5 = 0.8$  та  $\rho_4 = \rho_5 = 1.2$  (у включеннях), а криві 1''–3'' (штрихові лінії) – для протилежних співвідношень:  $d_1 = d_2 = d_3 = 0.8$  та  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1.2$  (у скелеті),  $d_4 = d_5 = 1.5$  та  $\rho_4 = \rho_5 = 1.8$  (у включеннях).

На рис. 2б наведено графіки середньої кількості речовини  $\langle Q_* \rangle / c_*$ , що пройшла через нижню границю шару  $\zeta = 1$ , для різних співвідношень об'ємних часток. Крива 1 відповідає значенням  $v_1 = 0.2$ ,  $v_2 = 0.3$ ,  $v_3 = 0.1$ ,  $v_4 = 0.3$ ,  $v_5 = 0.1$  ( $v_{skel} = 0.6$ ,  $v_{incl} = 0.4$ ), крива 2 –  $v_1 = 0.1$ ,  $v_2 = 0.3$ ,  $v_3 = 0.1$ ,  $v_4 = 0.3$ ,  $v_5 = 0.2$  ( $v_{skel} = 0.5$ ,  $v_{incl} = 0.5$ ), крива 3 –  $v_1 = 0.1$ ,  $v_2 = 0.1$ ,  $v_3 = 0.1$ ,  $v_4 = 0.5$ ,  $v_5 = 0.2$  ( $v_{skel} = 0.3$ ,  $v_{incl} = 0.7$ ), крива 4 –  $v_1 = 0.5$ ,  $v_2 = 0.1$ ,  $v_3 = 0.1$ ,  $v_4 = 0.1$ ,  $v_5 = 0.2$  ( $v_{skel} = 0.7$ ,  $v_{incl} = 0.3$ ), крива 5 –  $v_1 = 0.3$ ,  $v_2 = 0.3$ ,  $v_3 = 0.2$ ,  $v_4 = 0.1$ ,  $v_5 = 0.1$  ( $v_{skel} = 0.8$ ,  $v_{incl} = 0.2$ ).

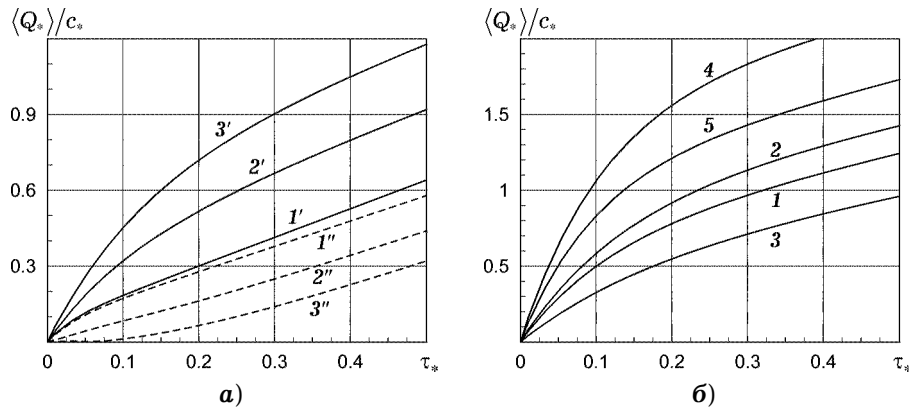


Рис. 2

У випадку, коли коефіцієнти дифузії та густини у скелеті є більшими, ніж у включеннях, для вибраного співвідношення об'ємних часток фаз ( $v_{\text{skel}} = 0.6$ ,  $v_{\text{incl}} = 0.4$ ) зі збільшенням глибини перерізу  $\zeta = \zeta_*$  збільшується кількість домішкової речовини, що пройшла через цей переріз (рис. 2а, криві 1'–3'), при цьому функція  $\langle Q_* \rangle / c_*$  зростає і є опуклою вгору функцією. Якщо  $d_{\text{skel}} < d_{\text{incl}}$  та  $\rho_{\text{skel}} < \rho_{\text{incl}}$ , то зі збільшенням значення  $\zeta_*$  кількість домішкової речовини зменшується, при цьому функція  $\langle Q_* \rangle / c_*$  також зростає, але є опуклою вниз функцією (рис. 2а, криві 1''–3'').

Зазначимо, що збільшення об'ємної частки включень може викликати як зростання функції  $\langle Q_* \rangle / c_*$ , так і її спадання, залежно від перерозподілу об'ємних часток між кульовими включеннями різних радіусів.

**Висновки.** Таким чином, досліджено потік домішкової речовини у двофазному тілі з кульовими включеннями, рівномірно розподілених в області тіла, за умови сумірних об'ємних часток фаз. Із застосуванням першого закону Фіка до подання концентрації домішкової речовини через інтегральний ряд Неймана одержано вираз для випадкового дифузійного потоку. Проведено усереднення за ансамблем конфігурацій фаз перших двох членів ряду Неймана. З використанням кореляційної функції та виразу для усередненої функції структури тіла у випадку рівномірного розподілу кульових включень отримано загальну формулу для дифузійного потоку у двофазному тілі за умови сумірних об'ємних часток фаз. Для конкретних функцій Гріна та концентрації домішкової речовини в тілі з усередненими характеристиками одержано розрахункову формулу для усередненого потоку та кількості домішкової речовини, що пройшла через заданий переріз двофазного тіла. На основі розрахункових формул розроблено програмні модулі та проведено числовий аналіз процесів перенесення маси у двофазному тілі з кульовими включеннями за умови сумірних об'ємних часток фаз. Зокрема, показано, що чим менші значення густини скелету і/або кульових включень, тим більшою є величина усередненого дифузійного потоку.

1. Корольок В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Наука, 1985. – 640 с.
2. Чапля Е. Я., Чернуха О. Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наук. думка, 2009. – 302 с.
3. Чернуха О. Ю., Білуцак Ю. І., Чучвара А. Є. Моделювання дифузійних процесів у стохастично неоднорідних шаруватих структурах. – Львів: Растр-7, 2016. – 262 с.
4. Чернуха О. Ю., Чучвара А. Є. Моделювання дифузії домішкової речовини у пористому тілі з випадковими сферичними порами при сумірних об'ємних частках фаз // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – 62, № 1. – С. 150–161.

- Te same: Chernukha O. Yu., Chuchvara A. E. Modeling of the diffusion of admixtures in a porous body with random spherical pores with comparable volume fractions of the phases // J. Math. Sci. – 2021. – **258**, No. 4. – P. 553–567. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05566-1>.
5. Balaji T. E., Tanaya Das H., Maiyalagan T. Recent trends in bimetallic oxides and their composites as electrode materials for supercapacitor applications // Chem-ElectroChem. – 2021. – **8**, No. 10. – P. 1723–1746. – <https://doi.org/10.1002/celec.202100098>.
  6. Bergins C., Crone S., Strauss K. Multiphase flow in porous media with phase change. Part II: Analytical solutions and experimental verification for constant pressure stream injection // Transp. Porous Media. – 2005. – **60**, No. 3. – P. 275–300. – <https://doi.org/10.1007/s11242-004-5740-5>.
  7. Chernukha O., Chuchvara A., Bilushchak Y., Pukach P., Kryvinska N. Mathematical modelling of diffusion flows in two-phase stratified bodies with randomly disposed layers of stochastically set thickness // Mathematics. – 2022. – **10**, No. 19. – Art. 3650. – <https://doi.org/10.3390/math10193650>.
  8. Jiang S., Huang L. J., An Q., Geng L., Wang X. J., Wang S. Study on titanium-magnesium composites with bicontinuous structure fabricated by powder metallurgy and ultrasonic infiltration // J. Mech. Behav. Biomed. Mater. – 2018. – **81**. – P. 10–15. – <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2018.02.017>.
  9. Korn G. A, Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review. – New York: Dover Publ. Inc., 2013. – 1152 p.
  10. Kovbashyn V., Bochar I. The study of technologies to improve physical-mechanical and chemical properties of reaction sintered ceramic materials on the basis of silicon carbide // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2017. – **86**, № 2. – P. 14–20. – [https://nbuv.gov.ua/UJRN/tstub\\_2017\\_2\\_4](https://nbuv.gov.ua/UJRN/tstub_2017_2_4).
  11. Münster A. Classical thermodynamics. – Hoboken: Wiley-Intersci., 1970. – 387 p.
  12. Pieper M., Klein P. Application of simple, periodic homogenization techniques to non-linear heat conduction problems in non-periodic, porous media // Heat Mass Transfer. – 2012. – **48**, No. 2. – P. 291–300. – <https://doi.org/10.1007/s00231-011-0879-4>.
  13. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and series: Vol. 1: Elementary functions. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1986. – 798 p.
  14. Rytov S. M., Kravtsov Y. A., Tatarskii V. I. Principles of statistical radiophysics. Vol. 3. Elements of random fields. – Berlin etc.: Springer, 1989. – x+239 p.
  15. Schulenberg T., Müller U. An improved model for two-phase flow through beds of coarse particles // Int. J. Multiphase Flow. – 1987. – **13**, No. 1. – P. 87–97. – [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(87\)90009-7](https://doi.org/10.1016/0301-9322(87)90009-7).

#### MATHEMATICAL MODELING OF ADMIXTURE FLOWS IN A TWO-PHASE STRIP WITH SPHERICAL INCLUSIONS AT COMMENSURABLE VOLUME FRACTIONS OF PHASES

*The flow of admixture in a two-phase body with randomly located spherical inclusions is investigated under the condition of commensurable volume fractions of phases. Based on the representation of the concentration function via the Neumann series and using the first Fick's law, a general formula for the diffusion flow in the two-phase body is obtained. In this case, the correlation function and the averaged function of the body structure are used. Calculation formulas for the averaged flow and the mean number of admixture that passed through the given cross-section of the two-phase body with randomly located spherical inclusions are obtained. Software modules are developed and numerical analysis of appropriate characteristics of the mass transfer process is carried out.*

**Key words:** *diffusion flow, randomly inhomogeneous structure, spherical inclusion, uniform distribution, Neumann series, averaging over the ensemble of phase configurations.*

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

<sup>2</sup> Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано  
28.11.23