

МЕТОДИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ У СИСТЕМНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ВОЛЬТ-АМПЕРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК $p-i-n$ -ДІОДА

Запропоновано методичку математичного моделювання вольт-амперних характеристик напівпровідникового об'ємного $p-i-n$ -діода, що ґрунтується на системному підході до вивчення досліджуваного електронного пристрою та аналізі фізичних процесів у ньому з використанням методів теорії збурень. Стаціонарні процеси протікання струму під дією прикладеної різниці потенціалів у високолегованих, контактних та активній областях діода розглядаються в гідродинамічному наближенні. Моделювання вольт-амперних характеристик зводиться до пошуку розподілів концентрацій носіїв заряду та потенціалу в структурних елементах досліджуваної системи. Основу математичної моделі складає традиційна нелінійна сингулярно збурена система рівнянь неперервності електронно-діркових струмів та рівняння Пуассона з відповідними граничними умовами. Особливостями запропонованого підходу є подання розв'язку поставленої нелінійної задачі у вигляді асимптотичних рядів, які будуються шляхом використання методу прилежових поправок теорії збурень, та врахування впливу бар'єрів ($p-i$, $n-i$ -переходів) на формування електронно-діркової плазми в активній області $p-i-n$ -діода. Знайдені прилежові поправки у розв'язку відіграють ключову роль в описі розподілу електростатичного поля у досліджуваній системі, вони надають можливість вперше з'ясувати важливі деталі процесу протікання електронно-діркових струмів у діоді. Отримані результати корелюють із відомими даними експериментальних досліджень.

Ключові слова: метод збурень, сингулярно збурена задача, асимптотичний ряд, дифузійно-дрейфовий процес, об'ємний $p-i-n$ -діод, вольт-амперна характеристика.

Вступ. Робота напівпровідникового $p-i-n$ -діода (рис. 1) ґрунтується на можливості зміни його електропровідних характеристик за рахунок формування в активній області діода електронно-діркової плазми під дією струмів керування [1, 5, 14, 19]. Формування плазми відбувається як результат інжекції носіїв заряду через $n-i$ -, $p-i$ -контакти та протікання серії фізичних процесів у різних ділянках (підобластях) діода [1, 5, 14, 19]: дифузійного та дрейфового перенесення електронно-діркових струмів, рекомбінації носіїв заряду в об'ємі і на поверхні поділу підобластей, їхньої генерації у досліджуваній системі тощо.

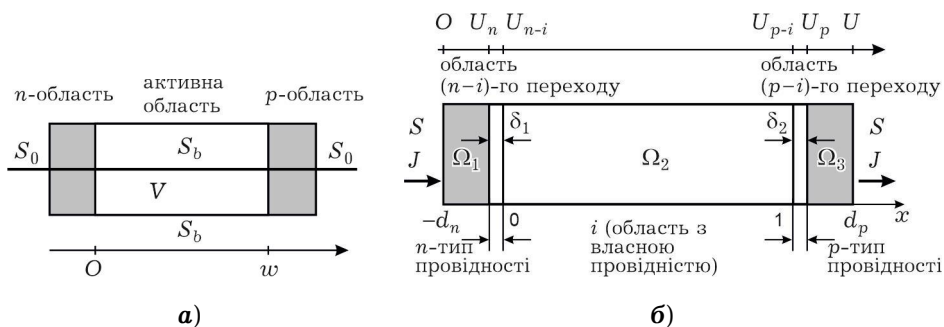


Рис. 1. $p-i-n$ -діод: а) – схематичне зображення діода, б) – геометрія задачі.

✉ abomba@ukr.net

У рамках феноменологічної теорії протікання електронно-діркових струмів у напівпровідникових $p-i-n$ -діодах математична модель діода у стаціонарному режимі описується такою системою диференціальних рівнянь [1, 5, 11, 14, 19]:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{j}_p - R_p + G_p &= 0, & \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{j}_n - R_n + G_n &= 0, \\ \mathbf{j}_p &= -e\mu_p p \nabla \varphi - eD_p \nabla p, & \mathbf{j}_n &= -e\mu_n n \nabla \varphi + eD_n \nabla n, \\ \operatorname{div}(\nabla \varphi) &= -e(p - n + N_d), \end{aligned} \quad (1)$$

де n , p , φ – функції розподілу концентрацій електронів, дірок і потенціалу відповідно; \mathbf{j}_p , \mathbf{j}_n – густини струмів дірок та електронів, які складаються із дрейфової та дифузійної складових; N_d – задана функція профілю легування напівпровідникового матеріалу домішками (донорними чи акцепторними); e – заряд електрона; D_p , D_n – коефіцієнти дифузії дірок та електронів; μ_p , μ_n – характеристики рухомості носіїв заряду; R_p , R_n , G_p , G_n – швидкості рекомбінації і генерації носіїв заряду. Система рівнянь (1) доповнюється відповідними граничними умовами на ділянках межі активної області, n - та p -областей. Аналогічні постановки задач моделювання характеристик $p-i-n$ -структур можна знайти, наприклад, у роботах [1, 11].

Вольт-амперні характеристики (ВАХ) $p-i-n$ -діода (функціональні залежності типу $I = I(U)$, де I – струм, U – напруга на інжектуючих контактах) є основною експериментальною базою, яка дає можливість отримати інформацію про фізичні процеси в електронно-дірковій плазмі. Дані ВАХ також є основою для проектування відповідних технічних систем. Відповідні стаціонарні математичні моделі $p-i-n$ -структури будують на основі припущень про те, що струм носіїв заряду, який підводиться до контактів, заміщує електрони і дірки активної області, що вибувають в результаті протікання рекомбінаційних процесів, зокрема процесу Шоклі – Ріда – Голла (Shockley – Read – Hall) і поверхневої рекомбінації [1, 6, 14, 19] (зауважимо, що рекомбінаційні процеси різних типів відбуваються з різними швидкостями). Оцінити величину такого струму можна на основі використання рівнянь неперервності (перше і друге рівняння системи (1)). Зокрема, у стаціонарному випадку отримуємо співвідношення

$$\oint_S J ds = \int_V W(n, p) dv + \oint_S J_{sr} ds$$

або

$$I = 2JS_0 = \int_V W(n, p) dv + \oint_S J_{sr} ds, \quad (2)$$

де $W = R_n + R_p - G_n - G_p$ – функція швидкості рекомбінаційно-генераційних процесів; J – густина струму на контактах діода; J_{sr} – густина струму поверхневої рекомбінації на $n-i$ - та $p-i$ -переходах; V , S – відповідно об'єм та площа поверхні активної області (рис. 1), S_0 – площа інжектуючих контактів, S_b – площа бічної поверхні ($S = S_0 \cup S_b$).

Для оцінки величини струму I , який перетікає через діод при заданій напрузі на контактах U , потрібно визначити механізми рекомбінаційних процесів і встановити розподіли концентрацій носіїв заряду та потенціалу в активній області $p-i-n$ -структури (i -області) на основі розв'язання сис-

теми рівнянь (1) із заданими початковими та граничними умовами. Процедура пошуку функцій n , p , ϕ ускладнюється, зокрема, тим, що сформульована задача є *нелінійною*. Найчастіше для її розв'язання використовують метод лінеаризації (наближення амбіполярної дифузії) [1, 5, 14, 19], чисельні методи (метод скінченних різниць, метод скінченних елементів або їхні аналоги) [17]. З огляду на можливість виділення в системі рівнянь (1) малого параметра, в роботі [11] запропоновано шукати розв'язки методом примежових поправок [2, 4, 7–9, 16, 18, 20], який, на нашу думку, дає змогу підвищити точність результату порівняно з методом лінеаризації, обійти проблему апроксимації функцій та їхніх похідних за наявності в області розв'язання зон із великими градієнтами шуканих функцій (приконтатні зони) і, що важливо для інтерпретації результатів, найповніше відображає природу досліджуваних процесів (примежові поправки відіграють ключову роль у формуванні розподілу потенціалу в активній області діода).

Основні процеси, які регулюють протікання струму через $p-i-n$ -діод, відбуваються в його активній області ($x \in [0, 1]$, рис. 1б). Тому в багатьох практичних випадках при розгляді відповідних модельних задач нехтують падінням потенціалів на високолегованих ділянках $p-i-n$ -діода U_n , U_p (ділянках із високою провідністю $x \in [-d_n, -\delta_1] \cup [1 + \delta_2, d_p]$) та на контактних ділянках U_{n-i} , U_{p-i} ($x \in [-\delta_1, 0] \cup [1, 1 + \delta_2]$), див. рис. 1б. Величини U_{n-i} , U_{p-i} ($U_{n-i}, U_{p-i} \gg U_n, U_p$) визначаються як бар'єрні різниці потенціалів, що виникають внаслідок існування значних градієнтів концентрацій у досліджуваній структурі, і відомо, що значення цих величин співставні зі значенням падіння потенціалу на ділянці активної області (i -області). Очевидно, що прикладена до контактів $p-i-n$ -структури напруга U істотно відрізняється від різниці потенціалів у точках $x = 0$ та $x = 1$. У випадку моделювання ВАХ ця обставина є суттєвою. Системний підхід до розгляду технічного пристрою, хоч і призводить до ускладнення процедури моделювання, проте забезпечує врахування в удосконаленій моделі важливих компонентів досліджуваної системи.

Зв'язок відповідних концентрацій з різницями потенціалів в умовах наближення електронейтральності системи та існування в ній термодинамічної рівноваги визначається співвідношеннями Больцмана [6, 14, 19]):

$$n|_{x=0} = N_i e^{\frac{eU_{n-i}}{k_B T}}, \quad p|_{x=1} = N_i e^{\frac{eU_{p-i}}{k_B T}}. \quad (3)$$

де N_i – стала, яка визначає концентрацію електронів у власному напівпровіднику (i -області) і залежить від вибраного матеріалу напівпровідника; T – температура (300 К); k_B – стала Больцмана.

Співвідношення (3) справджуються у випадку, коли на межі $x = 0$ струм переважно є електронним, а на межі $x = 1$ – дірковим [6].

Метою роботи є розвиток методів теорії збурень для системного моделювання вольт-амперних характеристик напівпровідникового $p-i-n$ -діода та розв'язання відповідних сингулярно збурених нелінійних задач напівпровідникової електроніки.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу перетікання стаціонарного струму I через $p-i-n$ -структуру (рис. 1б) за прикладеної до контактів різниці потенціалів U . Оскільки на практиці лінійні розміри $p-i-n$ -структури в поперечному напрямку значно перевищують характерні поздовжні розміри, то доцільним є розгляд одновимірної моделі системи. Виходячи з різних умов перетікання струму у високолегованих областях та активній i -області досліджуваної системи проведемо її декомпозицію так, як показано

на рис. 1б, – виділимо s підобластей $s = 1, 2, 3$, $\Omega = \bigcup_{s=1}^3 \Omega_s$. Зони контактів вважаємо різкими (східчастими): розглядаємо граничний випадок (абстрактний), коли $\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0$.

У кожній із виділених областей (Ω_2 при $x \in (0, 1)$, Ω_1 при $x \in (-d_n, 0)$ і Ω_3 при $x \in (1, d_p)$) потрібно знайти розподіли носіїв заряду n_s , p_s і потенціалу φ_s на основі розв'язку системи рівнянь (1), яка в нормованому вигляді має такий запис:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} &= -(p_s - n_s + N_{ds}), \\ \frac{\partial^2 n_s}{\partial x^2} - \frac{\partial n_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} - n_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} - A_{ns} n_s &= 0, \\ \frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + p_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} - A_{ps} p_s &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

У системі (4) використано позначення: $\mu = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 k_B T}{e^2 w^2 N_i}$ – малий параметр,

$\mu \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$; ε – відносна діелектрична стала; ε_0 – діелектрична стала;

w – характерний розмір активної області діода; $A_n = \frac{w^2}{D_n \tau_n^*}$; $A_p = \frac{w^2}{D_p \tau_p^*}$;

τ_n^* , τ_p^* – характерні часи рекомбінації електронів і дірок (у цій математичній моделі вони є сталими і, як і коефіцієнти дифузії, залежать від вибраного матеріалу напівпровідника). Концентрації носіїв заряду нормовані до величини N_i , а потенціалу – до $\frac{k_B T}{e}$. Профіль легування вибираємо таким, що $N_{d1} = N_n = \text{const}$, $N_{d2} = 0$, $N_{d3} = -N_p = \text{const}$.

На межах підобластей застосовуємо як граничні умови (визначені на межі S області Ω), так і умови «склеювання» розв'язків вигляду:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n_1}{\partial x} - n_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \gamma_{n11} w n_1 \right) \Big|_{x=-d_n} &= \frac{J}{e D_n} \frac{w}{N_i}, \\ \left(-\frac{\partial p_1}{\partial x} - p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \gamma_{p11} w p_1 \right) \Big|_{x=-d_n} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \left(-\frac{\partial p_1}{\partial x} - p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \gamma_{p12} w p_1 \right) \Big|_{x=-\delta_n} = \frac{j_{p1}^*}{e D_p} \frac{w}{N_i},$$

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \left(\frac{\partial n_1}{\partial x} - n_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \gamma_{n12} w n_1 \right) \Big|_{x=-\delta_n} = \frac{j_{n1}^*}{e D_n} \frac{w}{N_i}, \quad j_{n1}^* + j_{p1}^* = J,$$

$$\varphi_1 \Big|_{x=-d_n} = 0, \quad \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \varphi_1 \Big|_{x=-\delta_n} = U, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial n_2}{\partial x} - n_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \gamma_{n21} w n_2 \right) \Big|_{x=0} = \frac{j_{n2}}{e D_n} \frac{w}{N_i},$$

$$\left(-\frac{\partial p_2}{\partial x} - p_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \gamma_{p21} w p_2\right)\Big|_{x=0} = \frac{j_{p2}}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$\left(\frac{\partial n_2}{\partial x} - n_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \gamma_{n22} w n_2\right)\Big|_{x=1} = \frac{j_{n2}^*}{eD_n} \frac{w}{N_i},$$

$$\left(-\frac{\partial p_2}{\partial x} - p_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \gamma_{p22} w p_2\right)\Big|_{x=1} = \frac{j_{p2}^*}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$j_{n2} + j_{p2} = J, \quad j_{n2}^* + j_{p2}^* = J, \quad (7)$$

$$\Phi_2|_{x=0} = U_n + U_{n-i}, \quad \Phi_2|_{x=1} = U_n + U_{n-i} + U_i, \quad (8)$$

$$\lim_{\delta_p \rightarrow 0} \left(-\frac{\partial p_3}{\partial x} - p_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \gamma_{p31} w p_3\right)\Big|_{x=1+\delta_p} = \frac{j_{p3}}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$\lim_{\delta_p \rightarrow 0} \left(\frac{\partial n_3}{\partial x} - n_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \gamma_{n31} w n_3\right)\Big|_{x=1+\delta_p} = \frac{j_{n3}}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \quad j_{n3} + j_{p3} = J, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial n_3}{\partial x} - n_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \gamma_{n32} w n_3\right)\Big|_{x=d_p} = 0,$$

$$\left(-\frac{\partial p_3}{\partial x} - p_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \gamma_{p32} w p_3\right)\Big|_{x=d_p} = \frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$\lim_{\delta_p \rightarrow 0} \Phi_3|_{x=1+\delta_p} = U_n + U_{n-i} + U_i + U_{p-i}, \quad \Phi_3|_{x=d_p} = U, \quad (10)$$

де праві частини (5), (7), (9) визначають стаціонарні компоненти густини струму електронів і дірок на межах поділу, а праві частини (6), (8), (10) – відповідні значення падіння потенціалу на виділених ділянках досліджуваної системи; $\gamma_{n(sk)} = \alpha_{n(sk)} / D_n$, $\gamma_{p(sk)} = \alpha_{p(sk)} / D_p$, де $\alpha_{n(sk)}$, $\alpha_{p(sk)}$ – коефіцієнти поверхневої рекомбінації відповідно електронів і дірок (індекси (sk) визначають підобласть s та ліву/праву межу k підобласті відповідно). При формуванні умов (6), (8), (10) використано припущення про те, що струм носіїв заряду має дифузійну, дрейфову та рекомбінаційну компоненти. Крім того, вважаємо, що на межі області $x = -d_n$ струм в основному є електронним, а на межі $x = d_p$ – дірковим. Звідси випливають додаткові умови про відсутність неосновних носіїв заряду на контактах $p-i-n$ -структури: $p_1|_{x=-d_n} = 0$, $n_3|_{x=d_p} = 0$. Аналогічними припущеннями доповнимо граничні умови відповідно на межах $x = 0$ та $x = 1$. Отже, $j_{p1}^* = j_{p2} = 0$, $j_{n2}^* = j_{n3} = 0$. Ці умови є обґрунтованими з фізичної точки зору і забезпечують існування єдиного розв'язку задачі. Їхня природність характеризується ще й значним пришвидшенням процесу розв'язання задачі, а також забезпечує стійкість і збіжність відповідних схем розв'язання.

Співвідношення Больцмана у нормованому вигляді запишемо як $n_2|_{x=0} = e^{U_{n-i}}$, $p_2|_{x=1} = e^{U_{p-i}}$. Тоді граничні умови (8) та (10) з урахуванням сказаного вище подамо у такому вигляді:

$$\varphi_2|_{x=0} = U_n + \ln n_2(0), \quad \varphi_2|_{x=1} = U_n + \ln n_2(0) + U_i, \quad (11)$$

$$\lim_{\delta_p \rightarrow 0} \varphi_3|_{x=1+\delta_p} = U_n + \ln n_2(0) + U_i + \ln p_2(1), \quad \varphi_3|_{x=d_p} = U. \quad (12)$$

Для визначення невідомих параметрів задачі U_n , U_i , U_p додатково до (5)–(12) використовуємо умови неперервності функції індукції електромагнітного поля, які подаємо (за умови відсутності поверхневих зарядів на межах поділу) у такому вигляді:

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=-\delta_n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = \lim_{\delta_p \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \Big|_{x=1+\delta_p}. \quad (13)$$

Складність задачі (4)–(13), як вже зазначалось, зумовлена її нелінійністю. Але наявність малого параметра μ у постановці задачі дає змогу шляхом залучення асимптотичних методів теорії збурень для її розв'язання здійснити розщеплення вихідної сингулярно збуреної задачі до рекурентної послідовності лінійних крайових задач (аналогічно, як у [2, 4, 7–9, 11, 16, 18, 20]).

2. Асимптотика розв'язку. З огляду на постановку задачі і, зокрема, для ефективного забезпечення виконання граничних умов для потенціалу пропонуємо шукати розв'язок у вигляді таких асимптотичних рядів [2, 4, 7–9, 11, 16, 18, 20]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n_s \\ p_s \\ \varphi_s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n_s(x, \mu) \\ p_s(x, \mu) \\ \varphi_s(x, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{s(m)}(x, \mu) \\ P_{s(m)}(x, \mu) \\ \Phi_{s(m)}(x, \mu) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \underline{N}_{s(m)}(\underline{\xi}_s, \mu) \\ \underline{P}_{s(m)}(\underline{\xi}_s, \mu) \\ \underline{\Phi}_{s(m)}(\underline{\xi}_s, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{N}_{s(m)}(\bar{\xi}_s, \mu) \\ \bar{P}_{s(m)}(\bar{\xi}_s, \mu) \\ \bar{\Phi}_{s(m)}(\bar{\xi}_s, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{sn(m)}(x, \mu) \\ R_{sp(m)}(x, \mu) \\ R_{sq(m)}(x, \mu) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} n_{si}(x) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} p_{si}(x) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} \varphi_{si}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} \underline{N}_{si}(\underline{\xi}_s) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} \underline{P}_{si}(\underline{\xi}_s) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} \underline{\Phi}_{si}(\underline{\xi}_s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} \bar{N}_{si}(\bar{\xi}_s) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} \bar{P}_{si}(\bar{\xi}_s) \\ \sum_{i=0}^m \sqrt{\mu^i} \bar{\Phi}_{si}(\bar{\xi}_s) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} R_{sn(m)}(x, \mu) \\ R_{sp(m)}(x, \mu) \\ R_{sq(m)}(x, \mu) \end{pmatrix}, \quad (14) \end{aligned}$$

де $N_{s(m)}(x, \mu)$, $P_{s(m)}(x, \mu)$, $\Phi_{s(m)}(x, \mu)$ – регулярні частини асимптотик; $\underline{N}_{s(m)}(\underline{\xi}_s, \mu)$, $\underline{P}_{s(m)}(\underline{\xi}_s, \mu)$, $\underline{\Phi}_{s(m)}(\underline{\xi}_s, \mu)$, $\bar{N}_{s(m)}(\bar{\xi}_s, \mu)$, $\bar{P}_{s(m)}(\bar{\xi}_s, \mu)$, $\bar{\Phi}_{s(m)}(\bar{\xi}_s, \mu)$ – примежові поправки асимптотик в околах точок $x = 0$ та $x = 1$ відповідно, $\bar{\xi}_1 = \underline{\xi}_2 = \frac{x}{\sqrt{\mu}}$ при $x < 0$ та $x > 0$, $\bar{\xi}_2 = \underline{\xi}_3 = \frac{x-1}{\sqrt{\mu}}$ при $x < 1$ та $x > 1$ – відповідні регуляризуючі розтяги; $R_{sq(m)}(x, \mu)$, $R_{sn(m)}(x, \mu)$, $R_{sp(m)}(x, \mu)$ – залишкові члени.

Підстановкою (14) у рівняння системи (4) та умови (5)–(13) і групуванням компонент рівнянь із однаковими степенями малого параметра анало-

гічно до [2, 4, 7–9, 11, 16, 18, 20] формулюємо задачу для визначення членів відповідних рядів. Зокрема, для знаходження головних членів асимптотики $\varphi_{s0}(x)$, $n_{s0}(x)$, $p_{s0}(x)$, $\underline{\Phi}_{s0}(\underline{\xi})$, $\underline{N}_{s0}(\underline{\xi})$, $\underline{P}_{s0}(\underline{\xi})$, $\bar{\Phi}_{s0}(\bar{\xi})$, $\bar{N}_{s0}(\bar{\xi})$, $\bar{P}_{s0}(\bar{\xi})$, $s = 1, 2, 3$, маємо такі послідовності задач:

– у підобласті Ω_1 ($x \in (-d_n, 0)$)

$$n_{10} = N_n, \quad p_{10} = 0, \quad J = -e\mu_n n_{10} \varphi'_{10},$$

$$\varphi_{10}|_{x=-d_n} = 0, \quad \varphi_{10}|_{x=0} = U_n, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1^2} = -(\bar{P}_{10} - \bar{N}_{10}),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{N}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\bar{N}_{10} \frac{\partial \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1} \right) - n_{10}(0) \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \left(\bar{P}_{10} \frac{\partial \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1} \right) + p_{10}(0) \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{N}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1} - \bar{N}_{10} \frac{\partial \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1} - n_{10}(0) \frac{\partial \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1} \right) \Big|_{\bar{\xi}_1=0} = 0, \quad \lim_{\bar{\xi}_1 \rightarrow -\infty} \bar{N}_{10}(\bar{\xi}_1) = 0,$$

$$\left(-\frac{\partial \bar{P}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1} - \bar{P}_{10} \frac{\partial \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1} - p_{10}(0) \frac{\partial \bar{\Phi}_{10}}{\partial \bar{\xi}_1} \right) \Big|_{\bar{\xi}_1=0} = 0, \quad \lim_{\bar{\xi}_1 \rightarrow -\infty} \bar{P}_{10}(\bar{\xi}_1) = 0,$$

$$\bar{\Phi}_{10}(\bar{\xi}_1) \Big|_{\bar{\xi}_1=0} = 0, \quad \lim_{\bar{\xi}_1 \rightarrow -\infty} \bar{\Phi}_{10}(\bar{\xi}_1) = 0; \quad (16)$$

– у підобласті Ω_2 ($x \in (0, 1)$)

$$n_{20} = p_{20},$$

$$n''_{20} - (n_{20} \varphi'_{20})' - A_{n_2} n_{20} = 0,$$

$$p''_{20} + (p_{20} \varphi'_{20})' - A_{p_2} p_{20} = 0, \quad (17)$$

$$(n'_{20} - n_{20} \varphi'_{20} - 2\gamma_n w n_{20}) \Big|_{x=0} = \frac{wJ}{eD_n N_i}, \quad (-p'_{20} - p_{20} \varphi'_{20}) \Big|_{x=0} = 0,$$

$$(-p'_{20} - p_{20} \varphi'_{20} - 2\gamma_p w p_{20}) \Big|_{x=1} = \frac{wJ}{eD_p N_i}, \quad (n'_{20} - n_{20} \varphi'_{20}) \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2^2} = -(\underline{P}_{20} - \underline{N}_{20}),$$

$$\frac{\partial^2 \underline{N}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_2} \left(\underline{N}_{20} \frac{\partial \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2} \right) - n_{20}(0) \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \underline{P}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_2} \left(\underline{P}_{20} \frac{\partial \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2} \right) + p_{20}(0) \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2^2} = 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial \underline{N}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2} - \underline{N}_{20} \frac{\partial \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2} - n_{20}(0) \frac{\partial \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2} \right) \Big|_{\underline{\xi}_2=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi}_2 \rightarrow \infty} \underline{N}_{20}(\underline{\xi}_2) = 0,$$

$$\left(-\frac{\partial \underline{P}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2} - \underline{P}_{20} \frac{\partial \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2} - p_{20}(0) \frac{\partial \underline{\Phi}_{20}}{\partial \underline{\xi}_2} \right) \Big|_{\underline{\xi}_2=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi}_2 \rightarrow \infty} \underline{P}_{20}(\underline{\xi}_2) = 0,$$

$$(\varphi_{20} + \underline{\Phi}_{20})|_{x=0} = U_n + \ln(n_{20}(0) + \underline{N}_{20}(0)),$$

$$\lim_{\underline{\xi}_2 \rightarrow \infty} \underline{\Phi}_{20}(\underline{\xi}_2) = \lim_{\bar{\xi}_2 \rightarrow -\infty} \bar{\Phi}_{20}(\bar{\xi}_2), \quad \lim_{\underline{\xi}_2 \rightarrow \infty} \frac{\partial \underline{\Phi}_{20}(\underline{\xi}_2)}{\partial \underline{\xi}_2} = \lim_{\bar{\xi}_2 \rightarrow -\infty} \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}(\bar{\xi}_2)}{\partial \bar{\xi}_2},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2^2} = -(\bar{P}_{20} - \bar{N}_{20}),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{N}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} \left(\bar{N}_{20} \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2} \right) - n_{20}(1) \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2} \left(\bar{P}_{20} \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2} \right) + p_{20}(1) \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{N}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2} - \bar{N}_{20} \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2} - n_{20}(1) \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2} \right) \Big|_{\bar{\xi}_2=0} = 0, \quad \lim_{\bar{\xi}_2 \rightarrow -\infty} \bar{N}_{20}(\bar{\xi}_2) = 0,$$

$$\left(-\frac{\partial \bar{P}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2} - \bar{P}_{20} \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2} - p_{20}(1) \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}}{\partial \bar{\xi}_2} \right) \Big|_{\bar{\xi}_2=0} = 0, \quad \lim_{\bar{\xi}_2 \rightarrow -\infty} \bar{P}_{20}(\bar{\xi}_2) = 0,$$

$$(\varphi_{20} + \bar{\Phi}_{20})|_{x=1} = U - U_p + \ln(p_{20}(1) + \bar{P}_{20}(1)),$$

$$\lim_{\underline{\xi}_2 \rightarrow \infty} \underline{\Phi}_{20}(\underline{\xi}_2) = \lim_{\bar{\xi}_2 \rightarrow -\infty} \bar{\Phi}_{20}(\bar{\xi}_2), \quad \lim_{\underline{\xi}_2 \rightarrow \infty} \frac{\partial \underline{\Phi}_{20}(\underline{\xi}_2)}{\partial \underline{\xi}_2} = \lim_{\bar{\xi}_2 \rightarrow -\infty} \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}(\bar{\xi}_2)}{\partial \bar{\xi}_2}; \quad (19)$$

- у підобласті Ω_3 ($x \in (1, d_p)$)

$$p_{30} = N_p, \quad n_{30} = 0, \quad J = -e\mu_p p_{30} \varphi'_{30},$$

$$\varphi_{30}|_{x=1} = U - U_p, \quad \varphi_{30}|_{x=d_p} = U, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{30}}{\partial \underline{\xi}_3^2} = -(\underline{P}_{30} - \underline{N}_{30}),$$

$$\frac{\partial^2 \underline{N}_{30}}{\partial \underline{\xi}_3^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_3} \left(\underline{N}_{30} \frac{\partial \underline{\Phi}_{30}}{\partial \underline{\xi}_3} \right) - n_{30}(1) \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{30}}{\partial \underline{\xi}_3^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \underline{P}_{30}}{\partial \underline{\xi}_3^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}_3} \left(\underline{P}_{30} \frac{\partial \underline{\Phi}_{30}}{\partial \underline{\xi}_3} \right) + p_{30}(1) \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_{30}}{\partial \underline{\xi}_3^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial N_{30}}{\partial \xi_{\underline{3}}} - N_{30} \frac{\partial \Phi_{30}}{\partial \xi_{\underline{3}}} - n_{30}(1) \frac{\partial \Phi_{30}}{\partial \xi_{\underline{3}}} \right) \Big|_{\xi_{\underline{3}}=0} &= 0, & \lim_{\xi_{\underline{3}} \rightarrow \infty} N_{30}(\xi_{\underline{3}}) &= 0, \\
\left(-\frac{\partial P_{30}}{\partial \xi_{\underline{3}}} - P_{30} \frac{\partial \Phi_{30}}{\partial \xi_{\underline{3}}} - p_{20}(1) \frac{\partial \Phi_{30}}{\partial \xi_{\underline{3}}} \right) \Big|_{\xi_{\underline{3}}=0} &= 0, & \lim_{\xi_{\underline{3}} \rightarrow \infty} P_{30}(\xi_{\underline{3}}) &= 0, \\
\Phi_{30}(\xi_{\underline{3}}) \Big|_{\xi_{\underline{3}}=0} &= 0, & \lim_{\xi_{\underline{3}} \rightarrow \infty} \Phi_{30}(\xi_{\underline{3}}) &= 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Відмітимо, що у процесі формулювання задач (15)–(21) використано розвинення функції $\ln n(x)$ за степенями малого параметра $\sqrt{\mu}$ в околі точки $x = 0$ за такою схемою:

$$\begin{aligned}
\ln n(x) &= \ln(N_{(m)}(x) + \underline{N}_{(m)}(\underline{\xi})) = \ln(N_{(m)}(x)) + \\
&+ \left[\ln(N_{(m)}(\sqrt{\mu}\underline{\xi}) + \underline{N}_{(m)}(\underline{\xi})) - \ln(N_{(m)}(\sqrt{\mu}\underline{\xi})) \right] = \\
&= \ln(n_0(x)) + \sqrt{\mu} \frac{n_1(x)}{n_0(x)} + \dots + \ln(n_0(0) + \underline{N}_0(\underline{\xi})) + \\
&+ \sqrt{\mu} \frac{(n'_{x0}(0)\underline{\xi} + n_1(0) + \underline{N}_1(\underline{\xi}))}{n_0(0) + \underline{N}_0(\underline{\xi})} + \dots - \\
&- \ln(n_0(0)) - \sqrt{\mu} \frac{(n'_{x0}(0)\underline{\xi} + n_1(0))}{n_0(0)} - \dots
\end{aligned}$$

Аналогічним способом подаємо функцію $\ln p(x)$ в околі точки $x = 1$.

Для знаходження наступних членів асимптотичних рядів (14) формулюємо задачу, аналогічні до (15)–(21). У результаті отримуємо рекурентну послідовність задач для визначення асимптотичного розв'язку вихідної задачі (4)–(13).

Алгоритм побудови вольт-амперних характеристик $p - i - n$ -діода, який ґрунтується на використанні головних членів асимптотичних рядів (14), полягає у виконанні наступних кроків.

Із (15), (20) випливають такі співвідношення:

$$J = e\mu_n n_{10} \frac{U_n}{d_n}, \quad J = e\mu_p p_{30} \frac{U_p}{d_p}. \tag{22}$$

Задачі (16) і (21) мають тривіальні розв'язки: $\bar{\Phi}_{10} = 0$, $\bar{N}_{10} = 0$, $\bar{P}_{10} = 0$, $\underline{\Phi}_{30} = 0$, $\underline{P}_{30} = 0$, $\underline{N}_{30} = 0$. Відмітимо, що отримані результати є аналогом закону Ома і наслідком фізичних припущень про те, що у високолегованих областях Ω_1 та Ω_3 струм переносять основні носії заряду: в Ω_1 – електрони, а в Ω_3 – дірки.

Шляхом виключення потенціалу із системи рівнянь (17) та відповідних граничних умов приходимо до класичної задачі амбіполярної дифузії:

$$n''_{20} - \frac{A_n + A_p}{2} n_{20} = 0, \tag{23}$$

$$(n'_{02} - \gamma_n w n_{02}) \Big|_{x=0} = \frac{wJ}{2eD_n N_i}, \quad (n'_{20} + \gamma_p w n_{20}) \Big|_{x=1} = -\frac{wJ}{2eD_p N_i},$$

а її розв'язок подаємо у такому вигляді:

$$p_{20}(x) = n_{20}(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{L}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{L}\right), \tag{24}$$

де

$$C_2 = \frac{B(1 + \gamma_n wL) - A(1 + \gamma_p wL)e^{-1/L}}{(1 + \gamma_n wL)(1 + \gamma_p wL)e^{1/L} - (1 - \gamma_n wL)(1 + \gamma_p wL)e^{-1/L}},$$

$$C_1 = \frac{-A(1 + \gamma_n wL) + (1 - \gamma_n wL)C_2}{1 + \gamma_n wL}, \quad A = \frac{J}{2eD_n} \frac{wL}{N_i}, \quad B = -\frac{J}{eD_p} \frac{wL}{N_i},$$

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{2}(A_n + A_p).$$

Головні члени примежових поправок $\Phi_{20}(\xi_2)$, $N_{20}(\xi_2)$, $P_{30}(\xi_2)$ визначаємо як результат розв'язання задачі (18) за схемою, викладеною у роботі [3] (аналогічним способом шукаємо невідомі $\bar{\Phi}_{20}(\bar{\xi}_2)$, $\bar{N}_{20}(\bar{\xi}_2)$, $\bar{P}_{20}(\bar{\xi}_2)$ як результат розв'язання задачі (19)). Скористаємось заміною

$$\mathcal{N}(\xi_2) = N_{20}(\xi_2) + n_{20}(0), \quad \mathcal{P}(\xi_2) = P_{20}(\xi_2) + p_{20}(0),$$

якою перетворюємо (18) до такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{20}}{\partial \xi_2^2} = -(\mathcal{P}(\xi_2) - \mathcal{N}(\xi_2)), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{N}(\xi_2)}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\mathcal{N}(\xi_2) \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \xi_2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}(\xi_2)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\mathcal{P}(\xi_2) \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \xi_2} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{N}(\xi_2)}{\partial \xi_2} - \mathcal{N}(\xi_2) \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \xi_2} \right) \Big|_{\xi_2=0} = 0, \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \mathcal{N}(\xi_2) = n_0(0),$$

$$\left(-\frac{\partial \mathcal{P}(\xi_2)}{\partial \xi_2} - \mathcal{P}(\xi_2) \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \xi_2} \right) \Big|_{\xi_2=0} = 0, \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\xi_2) = p_0(0),$$

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \Phi_{20}(\xi_2) = \lim_{\bar{\xi}_2 \rightarrow -\infty} \bar{\Phi}_{20}(\bar{\xi}_2), \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi_{20}(\xi_2)}{\partial \xi_2} = \lim_{\bar{\xi}_2 \rightarrow -\infty} \frac{\partial \bar{\Phi}_{20}(\bar{\xi}_2)}{\partial \bar{\xi}_2}. \quad (25)$$

У процесі розв'язання системи рівнянь (25) із відповідними граничними умовами приходимо до задачі

$$d(E_{20x}(\xi_2)) = \frac{1}{2} \left[\left((E_{20x}(\xi_2))^2 - (E_{20x}^\infty)^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left((E_{20x}(\xi_2))^2 - (E_{20x}^\infty)^2 + 8n_0(0) \right) \right]^{1/2} d\xi_2,$$

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow \infty} E_{20x}(\xi_2) = E_{20x}^\infty, \quad E_{20x} \in [0, E_{20x}^\infty), \quad (26)$$

у якій шукана функція $E_{20x}(\xi_2) = -\frac{\partial \Phi_{20}(\xi_2)}{\partial \xi_2}$ має зміст напруженості електростатичного поля в об'ємі активної області діода.

При $n_0(0) \rightarrow 0$, тобто при відносно низьких рівнях струмів інжекції носіїв заряду у досліджувану область, задача (26) має аналітичний розв'язок

$$E_{20}(\xi_2) = -E_{20\infty} \operatorname{th} \left(\frac{E_{20\infty} \xi_2}{2} \right),$$

де $E_{20\infty}$ – стала, яка має зміст напруженості силового поля в об'ємі активної області і визначається з умови

$$\int_0^{1/2} E_{20\infty} \operatorname{th} \left(\frac{E_{20\infty} x}{2\sqrt{\mu}} \right) dx - \int_{1/2}^1 E_{20\infty} \operatorname{th} \left(\frac{E_{20\infty} (x-1)}{2\sqrt{\mu}} \right) dx = U_i(E_{20\infty}, J, U)$$

або

$$\int_0^{1/2} E_{20\infty} \operatorname{th} \left(\frac{E_{20\infty} x}{2\sqrt{\mu}} \right) dx - \int_{1/2}^1 E_{20\infty} \operatorname{th} \left(\frac{E_{20\infty} (x-1)}{2\sqrt{\mu}} \right) dx = U - U_n - U_p - \ln(n_{20}(0) + \underline{N}_{20}(0)) - \ln(n_{20}(1) + \bar{P}_{20}(1)), \quad (27)$$

$$\text{де } \underline{N}_{20}(\xi_2) = \frac{E_{20\infty}^2}{2} \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{E_{20\infty} \xi_2}{2} \right) \right), \quad \bar{P}_{20}(\bar{\xi}_2) = \frac{E_{20\infty}^2}{2} \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{E_{20\infty} \bar{\xi}_2}{2} \right) \right) \quad [3].$$

Відповідно, маємо $\underline{N}_{20}(0) = \frac{E_{20\infty}^2}{2}$, $\bar{P}_{20}(1) = \frac{E_{20\infty}^2}{2}$.

З урахуванням (22) і (24) співвідношення (27) подамо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} E_{20\infty} \operatorname{th} \left(\frac{E_{20\infty} x}{2\sqrt{\mu}} \right) dx - \int_{1/2}^1 E_{20\infty} \operatorname{th} \left(\frac{E_{20\infty} (x-1)}{2\sqrt{\mu}} \right) dx = \\ & = U - J \left(\frac{d_n}{e\mu_n N_n} + \frac{d_p}{e\mu_p N_p} \right) - \\ & - \ln \left(C_1(J) + C_2(J) + \frac{E_{20\infty}^2}{2} \right) \left(C_1(J) e^{-\frac{1}{L}} + C_2(J) e^{\frac{1}{L}} + \frac{E_{20\infty}^2}{2} \right). \end{aligned}$$

В результаті інтегрування отримуємо

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{\mu} \ln \left| \operatorname{ch} \left(\frac{E_{20\infty}}{4\sqrt{\mu}} \right) \right| \left| \operatorname{ch} \left(-\frac{E_{20\infty}}{4\sqrt{\mu}} \right) \right| = U - J \left(\frac{d_n}{e\mu_n N_n} + \frac{d_p}{e\mu_p N_p} \right) - \\ & - \ln \left(C_1(J) + C_2(J) + \frac{E_{20\infty}^2}{2} \right) \left(C_1(J) e^{-\frac{1}{L}} + C_2(J) e^{\frac{1}{L}} + \frac{E_{20\infty}^2}{2} \right). \quad (28) \end{aligned}$$

Невідоме значення густини струму J у (28) оцінюємо на основі співвідношення (2), яке подаємо у такому вигляді (інтегрування по об'єму зводиться до інтегрування на відрізьку з огляду на відповідну геометрію області):

$$J = \frac{1}{2} \int_x W(n, p) dx + \frac{1}{2} J_{sr}.$$

Швидкість рекомбінації оцінюємо за умови протікання в об'ємі активної області рекомбінаційного процесу Шоклі – Ріда – Голла [1, 6, 14, 19] (генерація носіїв заряду в досліджуваній області відсутня):

$$W(n(x), p(x)) = \frac{n_0(x)}{\tau_n^*} + \frac{p_0(x)}{\tau_p^*} = n_0(x) \left(\frac{1}{\tau_n^*} + \frac{1}{\tau_p^*} \right).$$

Також враховуємо процес поверхневої рекомбінації на інжектуючих контактах, швидкість якого, згідно з [6], оцінюємо з використанням співвідношення

$$J_{sr} = \gamma_{n21} \bar{N}_0(0) + \gamma_{p22} \bar{P}_0(0) = \gamma_{n21} \frac{E_{20\infty}^2}{2} + \gamma_{p22} \frac{E_{20\infty}^2}{2}.$$

У підсумку вираз для обчислення густини струму J набуває вигляду

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\tau_n^*} + \frac{1}{\tau_p^*} \right) \left(C_1(J) e^{-\frac{x}{L}} + C_2(J) e^{\frac{x}{L}} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\gamma_{n21} \frac{E_{20\infty}^2}{2} + \gamma_{p22} \frac{E_{20\infty}^2}{2} \right). \quad (29)$$

Сумісне розв'язання рівнянь (28), (29) при певних фіксованих значеннях напруги U на контактах, $U > 0$, дає можливість отримати шукану вольт-амперну характеристику $p-i-n$ -діода (функцію $J(U)$).

Запропонована і проілюстрована вище методика моделювання ВАХ $p-i-n$ -діода ґрунтується на використанні головних членів регулярної і примежової складових асимптотики, кожен з яких має відповідне фізичне трактування і відіграє ключову роль в описі процесів протікання електронно-діркових струмів. Зазначимо, що аналогічним чином отримуємо відповідну рекурентну послідовність задач для визначення наступних членів асимптотики [10] і уточнення результатів моделювання. Проте уточнена схема є громіздкою і, як показують комп'ютерні експерименти, не забезпечує помітних покращень результатів.

3. Комп'ютерний експеримент та аналіз результатів. Вольт-амперні характеристики є експериментальною базою для вивчення електрофізичних властивостей відповідних технічних систем. Дані експериментів у поєднанні з теоретичними основами роботи пристрою формують систему уявлень про фізичну природу технічної системи, шляхи вдосконалення її характеристик тощо [12, 15].

Моделювання вольт-амперних характеристик $p-i-n$ -діода виконано при таких значеннях фізичних параметрів досліджуваної системи: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $\varepsilon = 11$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-14}$ Ф/см, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $T_0 = 300$ К, $D_n = 36$ см²/с, $D_p = 12$ см²/с, $\tau_n^* = 1 \cdot 10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-7}$ с, $\tau_p^* = 1 \cdot 10^{-6} \div 1.5 \cdot 10^{-6}$ с, $\gamma_n = 2 \cdot 10^2$ см/с, $\gamma_p = 2.5 \cdot 10^2$ см/с, $\mu_n = 1400$ см²/(В·с), $\mu_p = 500$ см²/(В·с), $\omega = 30 \cdot 10^{-4}$ см, $N_i = 10^{18}$ см⁻³, $N_n = 10^{19}$ см⁻³, $N_p = 10^{19}$ см⁻³. На рис. 2 і рис. 3 різні криві відповідають різним значенням густини струму інжекції: $J = 0.001$ А/см² – суцільній кривій, а $J = 0.005$ А/см² – пунктирній).

Особливістю запропонованих у цій роботі модельних підходів до побудови ВАХ є застосування до розв'язання базової нелінійної модельної сингулярно збуреної задачі (4)–(10) методу примежових поправок. Розв'язок, який у загальному випадку подається у вигляді асимптотичних рядів (14), дає можливість отримати розподіли напруженості електричного поля (див. рис. 2, де показано основні члени асимптотики) та концентрацій носіїв заряду (рис. 3) в активній області та у високолегованих областях $p-i-n$ -структури (Ω_1 , Ω_2 , Ω_3) (див. рис. 1). Очевидно, що умови протікання струму визначаються знайденими розподілами.

На противагу традиційним припущенням про формування в активній області $p-i-n$ -діода електронно-діркової плазми, отримані в процесі виконання досліджень дані свідчать про те, що, крім електронейтральної плазми, яка займає основний об'єм активної області, в i -області поблизу зон $n-i$ - та $p-i$ -контактів (у шарах, що у відносних одиницях мають

товщину порядку $\sqrt{\mu}$) зосереджуються носії зарядів одного певного типу: електрони поблизу $n-i$ -контакту та дірки поблизу $p-i$ -контакту. Таким чином, розподіли зарядів в активній області є структурованими: шар плазми знаходиться між двома областями просторового заряду (ОПЗ). Зауважимо, що концентрація носіїв заряду в ОПЗ на 3-4 порядки перевищує концентрацію зарядів у плазмовій зоні (рис. 3). Також комп'ютерні експерименти показують, що основний вклад у формування електростатичного поля активної області здійснюють електрони та дірки в ОПЗ. Відмінність між характерними величинами напруженості поля регулярної частини асимптотики та відповідними примежовими поправками має порядок 10^2 (рис. 2а, рис. 2б).

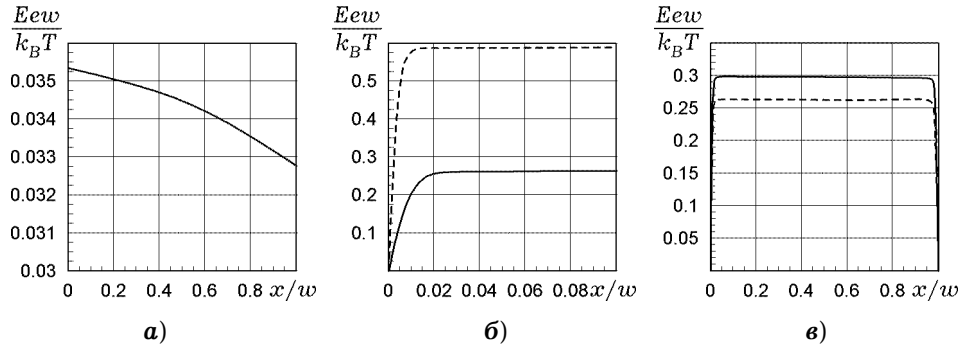


Рис. 2. Розподіл напруженості електростатичного поля: **а)** – за основними компонентами регулярної складової асимптотики; **б)** – за примежовими поправками; **в)** – сумарний вклад.

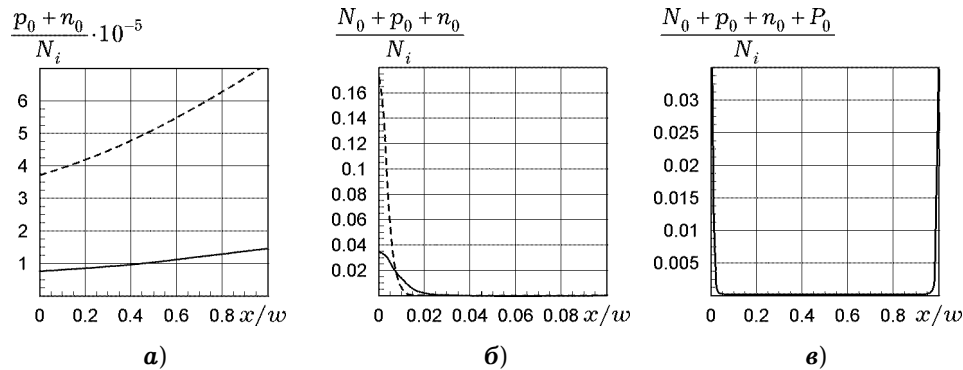


Рис. 3. Розподіл концентрації зарядів: **а)** – за основними компонентами регулярної складової асимптотики; **б)** – за примежовими поправками; **в)** – сумарний вклад.

На рис. 4а показано теоретичні ВАХ, що побудовані з урахуванням різних факторів формування електричного струму, для випадку подачі на діод напруги прямого зміщення ($U > 0$). Штрихова крива відображає результати моделювання ВАХ за умови, коли потік носіїв заряду, який описується регулярними членами асимптотики, не враховується. Штрих-пунктирна крива відповідає теоретичній ВАХ, при побудові якої не враховуються примежові поправки. Суцільну криву побудовано з урахуванням і регулярних компонент, і примежових поправок відповідних асимптотичних рядів. Показовим є те, що особливості поведінки цієї кривої узгоджуються з відповідними експериментальними даними, які для порівняння подано на рис. 4б.

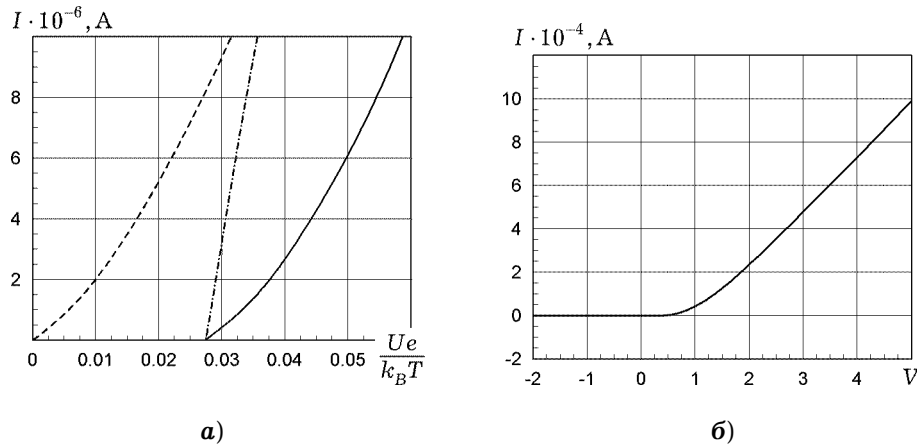


Рис. 4. Вольт-амперні характеристики $p-i-n$ -діода: **а)** – теоретичні, **б)** – експериментальні [13].

Зауважимо, що для демонстрації поточкової (повної) відповідності теоретичної та експериментальної кривих не вистачає необхідних вхідних даних (геометричних параметрів конкретного фізичного пристрою, конкретних електрофізичних характеристик використаних напівпровідникових матеріалів) для проведення розрахунків. В експериментальних роботах фігурують, як правило, інтегральні характеристики складових досліджуваної системи (використовується інженерний підхід у моделюванні).

Відмітимо, що сучасна обчислювальна техніка та відповідні інструментальні засоби дають змогу розв'язувати задачі у постановці (4)–(10) (наприклад, різницеvими методами). Проте ефективність згаданих обчислювальних методів знижується в околах точок $x = 0$ та $x = 1$, в яких шукані функції мають великі градієнти [17].

Висновки. Запропоновано вдосконалену математичну модель вольт-амперної характеристики напівпровідникового $p-i-n$ -діода, що будується в рамках гідродинамічного наближення протікання стаціонарних дифузійних і дрейфових струмів через діод. Моделювання ВАХ зводиться до пошуку розподілів концентрацій носіїв заряду та потенціалу в структурних елементах досліджуваної системи. В основу моделі покладено нелінійну сингулярно збурену систему рівнянь неперервності електронно-діркових струмів і рівнянь Пуассона з відповідними граничними умовами, яка розв'язується із залученням асимптотичного методу примежових поправок. Застосування методу примежових поправок теорії збурень забезпечило можливість уточнити розподіли концентрацій носіїв заряду в зонах $p-i$ - та $n-i$ -контактів (порівняно з результатами досліджень, що виконувались у рамках наближення амбіполярної дифузії), і, що важливо, виокремити розподіл електростатичного поля в активній області діода, яке в основному формується зарядами, що зосереджені в зонах контактів. Розв'язок сформульованої нелінійної задачі побудовано у вигляді відповідних асимптотичних рядів. Іншою особливістю моделі є врахування впливу бар'єрів ($p-i$ -, $n-i$ -переходів) на формування просторового заряду в активній області діода.

Застосовані у дослідженні методи забезпечують проведення декомпозиції вихідної задачі так, що отримані підзадачі мають нижчий рівень складності (є лінійними) та відповідне фізичне трактування. Зокрема, примежові поправки описують розподіли концентрацій носіїв заряду в так званих областях просторового заряду поблизу $p-i$ - та $n-i$ -контактів структури, які, у свою чергу, породжують електростатичне поле в досліджуваній області та відповідне падіння потенціалу. Зазначимо, що заряд

ОПЗ відіграє важливу роль у формуванні уявної частини імпедансу структури. Регулярні складові розв'язку задачі описують властивості електронно-діркової плазми активної області i , в основному, дійсну частину імпедансу.

Виконано серію комп'ютерних експериментів, результати яких корелюються з відомими даними експериментальних досліджень, розкриваючи суть останніх.

1. Адирович Э. И., Карагеоргий-Алкалаев П. М., Лейдерман А. Ю. Токи двойной инжекции в полупроводниках / Под ред. Е. И. Гальперина. – Москва: Сов. Радио, 1978. – 320 с.
2. Белянин М. П. Об асимптотическом решении одной модели $p-n$ -перехода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1986. – **26**, № 2. – С. 306–311.
Te same: Belyanin M. P. On the asymptotic solution of a model of a $(p-n)$ junction // USSR Comput. Math. Math. Phys. – 1986. – **26**, No. 1. – P. 188–192.
– [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(86\)90206-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(86)90206-5).
3. Бомба А. Я., Мороз І. П. Чисельно-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених модельних задач про стаціонарний розподіл носіїв заряду в активній області P-I-N-діодів // Вісн. Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокорист. Сер. Техн. науки. – 2022. – Вип. 1(97). – С. 291–306.
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5(77). – С. 3–122.
5. Кошевая С. Н., Кищенко Я. И., Самойловский В. М., Трапезон В. А. Быстродействующие модуляторы на $p-i-n$ -диодах (обзор) // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1989. – № 10. – С. 3–31.
Te same: Koshevaya S. V., Kishenko Ya. I., Smoilovskii M. I., Trapezon V. A. Fast wideband modulators on $p-i-n$ -structures // Radioelectron. Commun. Syst. – 1989. – No. 10. – P. 14–23.
6. Пека Г. П., Стриха В. І. Поверхневі та контактні явища у напівпровідниках. – Київ: Либідь, 1992. – 240 с.
7. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. – 1952. – **31**(73), № 3. – С. 575–586.
8. Vambusi D. Perturbation theory for PDEs // In: G. Gaeta (Ed.) Perturbation theory. – Ser. Encyclopedia of complexity and systems science series. – New York: Springer, 2009. – P. 229–246. – https://doi.org/10.1007/978-1-0716-2621-4_401.
9. Bomba A., Baranovsky S., Blavatska O., Bachyshyna L. Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction // Comput. Biol. Med. – 2022. – **146**. – Article 105561. – P. 55–61.
– <https://doi.org/10.1016/j.compbimed.2022.105561>.
10. Bomba A., Moroz I. Analysis of nonlinear processes in the $p-i-n$ diodes plasma by the perturbation theory methods // Proc. 13th Int. Conf. Adv. Comput. Inform. Technologies (ACIT-2023, 21-23 Sept. 2023, Wrocław, Poland). – P. 117–120.
– <https://doi.org/10.1109/ACIT58437.2023.10275722>.
11. Bomba A., Moroz I., Boichura M. Constructing and analyzing mathematical model of plasma characteristics in the active region of integrated $p-i-n$ -structures by the methods of perturbation theory and conformal mappings // East-Eur. J. Enterp. Technol. – **5**, No. 5(113). – 2021. – P. 51–61.
– <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.243097>.
12. Borblik V. L. Analytic theory for current-voltage characteristic of a nanowire radial $p-i-n$ -diode // Semiconduct. Phys. Quantum Electron. & Optoelectron. – 2021. – **24**, No. 4. – P. 419–424. – <https://doi.org/10.15407/spqeo24.04.419>.
13. Hodson T., Miao B., Chen C., Sharkawy A., Prather D. Silicon based photonic crystal electro-optic modulator utilizing the plasma dispersion effect // Proc. Conf. on Lasers and Electro-Optics CLEO-2007 (6–11 May 2007, Baltimor, Maryland, USA). – <https://doi.org/10.1109/CLEO.2007.4452748>.
14. Kwok K. Complete guide to semiconductor devices. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – xxii+740 p. – <https://ieeexplore.ieee.org/book/5271197>.
15. Kyhälä J., Andersson M. An advanced PIN-diode model // Microwave J. – 2005. – **48**, No. 9. – 4 p.

16. Liu H. Perturbation method for differential control equations and its application in the analysis of dynamic characteristics of curved beam // Alexandria Eng. J. – 2020. – **59**, Iss. 4. – P. 2583–2590. – <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.04.022>.
17. Polsky B. S., Rimshans J. S. Numerical simulation of transient processes in 2-D bipolar transistor // Solid State Electron. – 1981. – **24**, No. 12. – P. 1081–1085. – [https://doi.org/10.1016/0038-1101\(81\)90173-8](https://doi.org/10.1016/0038-1101(81)90173-8).
18. Smith D. R. Singular-perturbation theory. An introduction with applications. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – xv+500 p.
19. Sze S. M., Ng K. K. Physics of semiconductor devices. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2006. – x+815 p. – <https://doi.org/10.1002/0470068329>.
20. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F., Kalachev L. V. The boundary function method for singular perturbation problems. – Philadelphia: SIAM, 1995. – 221 p. – <https://doi.org/10.1137/1.9781611970784>.

PERTURBATION THEORY METHODS IN SYSTEM SIMULATION OF THE $p-i-n$ -DIODE VOLT-AMPERE CHARACTERISTICS

A technique for mathematical modeling of the current-voltage characteristics of a semiconductor volumetric $p-i-n$ -diode is proposed, which is based on a systematic approach to investigate the electronic device under study and the analysis of the corresponding physical processes using methods of perturbation theory. Stationary processes of current flow under the influence of an applied potential difference in the highly alloyed, contact and active regions of the diode are considered in the hydrodynamic approximation. Modeling the current-voltage characteristic is reduced to searching for the distributions of charge carrier concentrations and potential in the structural elements of the studied system. The basis of the mathematical model is the traditional nonlinear singularly perturbed system of the continuity equations for electron-hole currents and Poisson's equation with the corresponding boundary conditions. The features of the proposed approach are the representation of the solution of the given nonlinear problem in the form of asymptotic series, which are constructed by using the method of boundary corrections of perturbation theory, and taking into account the influence of barriers ($p-i$, $n-i$ junctions) on the formation of electron-hole plasma in the active region of $p-i-n$ -diode. The found boundary corrections in the solution play a key role in describing the distribution of the electrostatic field in the studied system, they make it possible to ascertain for the first time the important details of the electron-hole currents flow process in the diode. The obtained results correlate with known experimental data.

Key words: *perturbation method, singularly perturbed problem, asymptotic series, diffusion-drift process, volume $p-i-n$ -diode, current-voltage characteristic.*

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокорист., Рівне

Одержано
27.09.23