

**СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ВІДНОШЕННЯ ШАРПА ПОРТФЕЛЯ
З НАЙМЕНШИМ РІВНЕМ VALUE-AT-RISK**

Проведено статистичний аналіз вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем Value-at-Risk (VaR). Знайдено асимптотичний розподіл цієї оцінки за двох припущень: вектор дохідностей активів портфеля має багатовимірний еліптичний розподіл з неавтокорельованими реалізаціями або вектор дохідностей моделюється слабо стаціонарним процесом Гаусса. На основі імітаційного моделювання встановлено, що звичайній вибірковій оцінці притаманне значне зміщення. Побудовано виправлену оцінку практично без зміщення. Встановлено, що добре наближення для дисперсії досягається при обсягах вибірки розміром 1000 спостережень. Отримані результати використано для дослідження істотності відмінності від нуля відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR за рівня довіри 0.95. Упродовж усього періоду дослідження відношення Шарпа було еквівалентним нулеві. Знайдено максимальний рівень довіри до VaR, за якого відношення Шарпа істотно відрізняється від нуля.

Ключові слова: відношення Шарпа, Value-at-Risk, портфель з найменшим рівнем VaR, багатовимірний еліптичний розподіл, слабо стаціонарний процес Гаусса, асимптотичний розподіл, вибіркова оцінка.

Вступ. Теорія портфеля відіграє важливу роль не лише для практиків фінансового ринку, але й для науковців, що працюють в області фінансової математики. Вважається, що ця теорія бере свій початок з роботи Марковіца [19], в якій запропоновано алгоритм вибору раціональної структури портфеля шляхом оптимізації однієї з двох основних характеристик портфеля: очікуваної дохідності або дисперсії, за фіксованого значення іншої. Змінюючи порогове значення фіксованої характеристики від найменшого можливого до $+\infty$, отримуємо ефективну множину портфелів, для яких неможливо покращити одну з розглянутих характеристик без погіршення іншої. Одним з недоліків запропонованого підходу є вибір дисперсії як міри ризику портфеля. Кращими мірами ризику є так звані квантильні міри ризику [15], найпоширенішою серед яких є міра Value-at-Risk (VaR), яку вперше було запропоновано в [3]. Ця міра, як і дисперсія, має ряд недоліків, основним з яких є відсутність властивості субадитивності [22]. Розширенням VaR до субадитивної міри ризику є умовна VaR (CVaR), теоретичні властивості якої є кращими. З практичної точки зору, процедура оцінювання CVaR є трудомісткою, вимагає значно більше даних та є чутливішою до припущень моделі, натомість оцінка VaR є стійкішою [24, 26]. На сьогодні обидві міри ризику мають широке застосування.

У цій статті для опису ризику портфеля використовуємо міру VaR. Алгоритм побудови портфеля на основі мінімізації VaR і порівняння отриманого портфеля з портфелями, ефективними за Марковіцем, описано в [1]. Змінюючи рівень довіри VaR, можна отримати множину ефективних за Марковіцем портфелів. У [9] знайдено точні розподіли оцінок ваг, очікуваної дохідності, дисперсії та VaR портфеля з найменшим рівнем VaR за припущення нормальності розподілу дохідностей елементів портфеля. У [8] досліджено статистичні властивості характеристик цього портфеля за ширших припущень стосовно поведінки дохідностей його елементів. Використання машинного навчання для побудови портфеля з найменшим рівнем VaR описано в [4]. Порівняння різних підходів до обчислення VaR прове-

✉ taras.zabolotsky@lnu.edu.ua

дено в [5]. Використання Бассівського підходу до вибору структури портфеля з найменшим рівнем VaR та його аналіз описано в [6].

З огляду на поширеність портфеля з найменшим рівнем VaR , виникає необхідність дослідження його показників ефективності, яке дасть змогу порівнювати цей портфель з іншими портфелями та окремими фінансовими активами. Таким показником ефективності є відношення Шарпа [18] – відношення очікуваної дохідності до квадратного кореня з дисперсії портфеля. Популярність цього показника зумовила на основі його максимізації появу нового методу вибору раціональної структури портфеля. Портфель з максимальним відношенням Шарпа є доволі поширеним, але, з теоретичної точки зору, його властивості мають ряд недоліків. Зокрема, доведено відсутність математичного сподівання вибіркової оцінки його ваг [20] та неможливість побудови їхньої незміщеної оцінки [25]. Оскільки портфель з максимальним відношенням Шарпа є ефективним за Марковіцем, то існує рівень довіри VaR , за якого цей портфель буде еквівалентним портфелю з найменшим рівнем VaR за певного рівня довіри. В [11] досліджено статистичні властивості цього рівня довіри та встановлено, що ризик такого портфеля є високим.

Дослідженню статистичних властивостей відношення Шарпа приділяється значна увага. Так, у [18] знайдено асимптотичні розподіли оцінки відношення Шарпа окремого фінансового активу. Ці результати можуть бути розширені на випадок портфеля зі сталими вагами. У [23] досліджено властивості оцінки відношення Шарпа у випадку, коли дохідність активу є слабо стаціонарним процесом Гаусса, а в [14] досліджено статистичні властивості квадрата відношення Шарпа ефективних за Марковіцем портфелів. Статистичні властивості оцінки відношення Шарпа ефективних за Марковіцем портфелів підсумовано в праці [21]. Зауважимо, що, хоча ефективні множини портфелів Марковіца і портфелів з найменшим рівнем VaR співпадають, проте ймовірнісні властивості оцінок ваг портфелів є різними. Іншими словами, ефективні портфелі, отримані за різними критеріями, є математично еквівалентними, але стохастично різними.

У цій роботі досліджено статистичні властивості оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR . Знайдено асимптотичні розподіли оцінки за двох припущень щодо вектора дохідностей елементів портфеля: вектор дохідностей має багатовимірний еліптичний розподіл або він є слабо стаціонарним процесом Гаусса. Обидва припущення часто використовують для опису властивостей дохідностей активів. На наступному етапі дослідимо необхідний обсяг вибірки історичних значень для досягнення потрібного наближення точної густини розподілу асимптотичною. На основі отриманих результатів запропоновано інтервали довіри для відношення Шарпа і за їхньою допомогою: 1) протестовано значення відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR стосовно відмінності від нуля; 2) знайдено максимальний рівень довіри до VaR , за якого відношення Шарпа відповідного портфеля з найменшим рівнем VaR є статистично істотно більшим від нуля.

1. Основні результати. Під портфелем (структурою портфеля) $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)'$ розуміємо вектор, елементами якого є частки коштів, вкладених у відповідний актив, k – кількість активів, включених у портфель. Штрихом позначено операцію транспонування. Означимо дохідність i -го активу в момент часу t як $X_{it} = \ln P_{it}/P_{i(t-1)}$, де P_{it} – ціна активу в цей момент часу. Через $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt})'$ позначимо вектор дохідностей активів портфеля і припустимо, що він є слабо стаціонарним процесом. З означення слабкої стаціонарності маємо, що вектор математичних сподівань $\boldsymbol{\mu}$ та матриця коваріацій $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ не залежать від часу. За цього при-

пущення отримуємо також, що очікувана дохідність $R_w = E(\mathbf{w}'\mathbf{X}_t) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}$ портфеля \mathbf{w} і його дисперсія $V_w = VaR(\mathbf{w}'\mathbf{X}_t) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w}$ не залежать від часу. Згідно з класичною теорією портфеля ці дві характеристики є основними при виборі структури портфеля. Максимізуючи R_w при сталому значенні V_w або мінімізуючи V_w при сталому значенні R_w , отримуємо множину ефективних за Марковіцем портфелів. З розвитком теорії портфеля стало зрозуміло, що дисперсія не є найкращим вибором для відображення ризику портфеля. Кращими є міри, що ґрунтуються на квантилях функції втрат [15], зокрема VaR . Попри критику цієї міри ризику стосовно її теоретичних властивостей, ця міра надалі залишається однією з найпоширеніших для відображення ризику портфеля. Значення VaR за рівня довіри α портфеля зі структурою \mathbf{w} визначаємо як $(1-\alpha)$ -квантиль розподілу дохідності портфеля $\mathbf{w}'\mathbf{X}_t$. Для рівня довіри α , як правило, вибирають значення 0.9, 0.95, 0.99. Для детальнішого аналізу цієї міри ризику необхідно уточнити припущення стосовно поведінки \mathbf{X}_t . Розглянемо два припущення, які використовують у літературі з фінансової математики.

Припущення 1. k -вимірний вектор \mathbf{X}_t має еліптичний розподіл з вектором математичних сподівань $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею коваріацій $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ з незалежними (неавтокорельованими) реалізаціями. Таке припущення є коректним [16].

Припущення 2. k -вимірний вектор \mathbf{X}_t моделюється як слабо стаціонарний процес Гауса з вектором математичних сподівань $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\boldsymbol{\Gamma}(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі зміщенням h . Це припущення часто використовують у фінансовій математиці [18, 23], і в цьому випадку реалізації вектора \mathbf{X}_t не є незалежними.

Зауважимо, що за *припущень 1, 2* міра ризику VaR є когерентною [2], тобто задовольняє умову субадитивності, яка, з одного боку, обґрунтовує використання портфелів, а з іншого – забезпечує існування та єдиність розв'язку задачі мінімізації ризику портфеля.

За *припущень 1, 2* міру ризику VaR портфеля зі структурою \mathbf{w} при рівні довіри α можемо обчислити як

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) = q_\alpha \sqrt{V_w} - R_w = q_\alpha \sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}, \quad (1)$$

де q_α , згідно з *припущенням 2*, є α -квантилем стандартного нормального розподілу, а згідно з *припущенням 1* маємо $q_\alpha = d_\alpha/\alpha$, де d_α – α -квантиль випадкової величини $(\mathbf{a}'\mathbf{X} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu})/\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a}}$ для довільного ненульового вектора \mathbf{a} , $\mathbf{D} = \boldsymbol{\Gamma}(0)/\gamma^2$, $\gamma^2 = -2\psi'(0)$, функція ψ – характеристичний генератор еліптичного розподілу, ψ' – похідна від функції ψ .

Структуру портфеля з найменшим рівнем VaR отримаємо, мінімізуючи VaR портфеля (1) за умови $\mathbf{i}'\mathbf{w} = 1$, де \mathbf{i} – k -вимірний одиничний вектор. Структуру \mathbf{w}_{VaR} , очікувану дохідність R_{VaR} та дисперсію V_{VaR} такого портфеля визначаємо за формулами [9]:

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{q_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

$$R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{q_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}},$$

$$V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR} \sum \mathbf{w}_{VaR} = \frac{q_\alpha^2}{q_\alpha^2 - s} V_{GMV},$$

де

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{i}}{\mathbf{i}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{i}}, \quad R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{i}}{\mathbf{i}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{i}}, \quad V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{i}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{i}},$$

$$s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{i} \mathbf{i}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}}{\mathbf{i}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{i}}.$$

Відношення Шарпа SR_{VaR} портфеля \mathbf{w}_{VaR} означимо як

$$SR_{VaR} = \frac{R_{VaR}}{\sqrt{V_{VaR}}} = \frac{R_{GMV} \sqrt{q_\alpha^2 - s}}{q_\alpha \sqrt{V_{GMV}}} + \frac{s}{q_\alpha}. \quad (2)$$

Оскільки відношення Шарпа портфеля \mathbf{w}_{VaR} залежить від невідомих на практиці параметрів розподілу вектора \mathbf{X}_t , то для його обчислення потрібно використати оцінки цих невідомих параметрів. Для цього використаємо вибірку історичних значень вектора дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ та побудуємо вибіркові оцінки невідомих параметрів:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i, \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \quad (3)$$

Підставивши оцінки (3) в (2), отримаємо вибіркову оцінку відношення Шарпа портфеля \mathbf{w}_{VaR} , яку позначимо \widehat{SR}_{VaR} . Очевидно, що оцінки (3) невідомих параметрів вектора \mathbf{X}_t є випадковими величинами (в.в.), а тому вибіркова оцінка відношення Шарпа \widehat{SR}_{VaR} теж є випадковою величиною.

Теорема 1. *Нехай портфель із найменшим рівнем VaR за рівня довіри α складається з k фінансових активів, вектор дохідностей активів портфеля \mathbf{X}_t задовольняє припущення 1 і відношення Шарпа \widehat{SR}_{VaR} побудовано на вибірці історичних значень вектора дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$. Якщо $s < q_\alpha^2$, то $Y_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{SR;el}^2)$ при $n \rightarrow \infty$,*

$$\sigma_{SR;el}^2 = \frac{1}{q_\alpha^2} \left((2\lambda s^2 + 4s) \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right)^2 + \frac{(\lambda R_{GMV}^2 + 2(1 + \lambda s)V_{GMV})(q_\alpha^2 - s)}{2V_{GMV}} \right),$$

де \xrightarrow{d} означає збіжність за розподілом, $\lambda = \frac{\psi''(0)}{(\psi'(0))^2}$,

$$Y_n = \sqrt{n}(\widehat{SR}_{VaR} - SR_{VaR}).$$

Д о в е д е н н я. Якщо виконується припущення 1, то з результатів роботи [11] випливає, що

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d}$$

$$\xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+\lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s + 2\lambda s^2 \end{pmatrix} \right),$$

а відповідно до [12, с. 211] отримуємо, що

$$\sqrt{n}(\widehat{SR}_{VaR} - SR_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{SR;el}^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

де

$$\sigma_{SR;el}^2 = \left(\frac{\partial SR_{VaR}}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial s} \right) \times \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+\lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s + 2\lambda s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial V_{GMV}} \\ \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial s} \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial SR_{VaR}}{\partial R_{GMV}} = \frac{\sqrt{q_\alpha^2 - s}}{q_\alpha \sqrt{V_{GMV}}}, \quad \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial V_{GMV}} = -\frac{R_{GMV} \sqrt{q_\alpha^2 - s}}{2q_\alpha V_{GMV}^{3/2}},$$

$$\frac{\partial SR_{VaR}}{\partial s} = -\frac{R_{GMV}}{2q_\alpha \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} + \frac{1}{q_\alpha},$$

то

$$\sigma_{SR;el}^2 = \frac{q_\alpha^2 - s}{q_\alpha^2 V_{GMV}} V_{GMV}(1+\lambda s) + \frac{R_{GMV}^2 (q_\alpha^2 - s)}{4q_\alpha^2 V_{GMV}^3} 2\lambda V_{GMV}^2 +$$

$$+ \left(-\frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} + 1 \right)^2 \frac{2\lambda s^2 + 4s}{q_\alpha^2},$$

що доводить теорему 1. \blacklozenge

Теорема 2. Нехай портфель з найменшим рівнем VaR за рівня довіри α складається з k фінансових активів, вектор дохідностей активів портфеля \mathbf{X}_t задовольняє припущення 2 і відношення Шарпа \widehat{SR}_{VaR} побудовано на вибірці історичних значень вектора дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$. Якщо $s < q_\alpha^2$ і ряди $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h)$, $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h))$ є збіжними,

то $Y_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{SR;Gauss}^2)$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\sigma_{SR;Gauss}^2 = \frac{1}{q_\alpha^2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[a q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + 2R_{GMV}^2 c^2 q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})^2 + \right.$$

$$+ 4c^2 (q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2) -$$

$$- 8R_{GMV} c^2 q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i}) q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) + 2b^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 +$$

$$+ 4R_{GMV} b c q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2 - 8b c q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) +$$

$$+ 4b^2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\Gamma}(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + 4\sqrt{ab} \mathbf{i}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \Big],$$

де \xrightarrow{d} означає збіжність за розподілом, $a = (q_a^2 - s)V_{GMV}$, $b = \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{a}}\right)$, $c = \left(R_{GMV}b - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$, $q_h = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{b}$, k -вимірні вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} є довільними, \otimes – добуток Кронекера.

Д о в е д е н н я. Оскільки ряди $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h)$ та $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h))$ є збіжними, то, згідно з припущенням 2, з [10] випливає, що

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\sigma_1^2 = V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + 2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})^2 + (q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2) - 4R_{GMV} q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) \right],$$

$$\sigma_2^2 = 2V_{GMV}^4 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})^2,$$

$$\sigma_3^2 = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[4\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\Gamma}(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + 2R_{GMV}^4 q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})^2 + 4R_{GMV}^2 (q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2) + 2q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 - 8R_{GMV}^3 q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) + 4R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2 - 8R_{GMV} q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \right],$$

$$\sigma_{12} = 2V_{GMV}^3 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[R_{GMV} q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})^2 - q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) \right],$$

$$\sigma_{13} = 2V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[\mathbf{i}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} - R_{GMV}^3 q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})^2 - R_{GMV} (q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2) + 3R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \right],$$

$$\sigma_{23} = -2V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})^2 - 2R_{GMV} q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2 \right].$$

Из [12, с. 211] отримуємо $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{VaR} - SR_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{SR;Gauss}^2)$ при $n \rightarrow \infty$,
де

$$\sigma_{SR;Gauss}^2 = \left(\frac{\partial SR_{VaR}}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial s} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial V_{GMV}} \\ \frac{\partial SR_{VaR}}{\partial s} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\sigma_{SR;Gauss}^2 = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{q_\alpha^2 - s}{q_\alpha^2 V_{GMV}} \sigma_1^2 + \frac{R_{GMV}^2 (q_\alpha^2 - s)}{4q_\alpha^2 V_{GMV}^3} \sigma_2^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{q_\alpha^2} \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right)^2 \sigma_3^2 - \frac{R_{GMV} (q_\alpha^2 - s)}{2q_\alpha^2 V_{GMV}^2} \sigma_{12} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{q_\alpha^2 - s}}{q_\alpha^2 \sqrt{V_{GMV}}} \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right) \sigma_{13} -$$

$$\left. - \frac{R_{GMV} \sqrt{q_\alpha^2 - s}}{q_\alpha^2 V_{GMV}^{3/2}} \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right) \sigma_{23} \right] =$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(q_\alpha^2 - s) V_{GMV}}{q_\alpha^2} q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + \frac{2}{q_\alpha^2} \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right)^2 \times \right.$$

$$\times q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + \left(R_{GMV} \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s} \right)^2 \left(\frac{2R_{GMV}^2}{q_\alpha^2} q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i})^2 + \right.$$

$$+ \frac{4}{q_\alpha^2} (q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2) - \frac{8R_{GMV}}{q_\alpha^2} q_h(\mathbf{i}, \mathbf{i}) q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) \left. \right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right) \left(R_{GMV} \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s} \right) \left(\frac{4R_{GMV}}{q_\alpha^2} q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu})^2 - \frac{8}{q_\alpha^2} q_h(\mathbf{i}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \right) +$$

$$+ \frac{4\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}}{q_\alpha^2} \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right)^2 +$$

$$+ \frac{4i'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}}{q_\alpha^2} \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s} \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{q_\alpha^2 - s}} \right) \Big].$$

Позначивши $a = (q_\alpha^2 - s)V_{GMV}$, $b = 1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{a}}$, $c = R_{GMV}b - \frac{\sqrt{a}}{2}$, отримаємо твердження теореми. \blacklozenge

Зауваження 1. У теоремах 1, 2 умова $s < q_\alpha^2$ є необхідною для існування портфеля з найменшим рівнем VaR . Зауважимо, що виконання цієї умови не забезпечує виконання умови $\hat{s} < q_\alpha^2$, яка є необхідною для існування вибіркової оцінки ваг портфеля. У [8] доведено, що асимптотично умова $\hat{s} < q_\alpha^2$ виконується з імовірністю 1 за умови виконання $s < q_\alpha^2$.

Зауваження 2. На практиці для аналізу характеристик портфелів часто використовують припущення про нормальність розподілу вектора \mathbf{X}_t . У цьому випадку, підставивши $\lambda = 1$ у вираз для $\sigma_{SR;el}^2$ або $\Gamma(h) = 0$ для всіх $h \neq 0$ у вираз для $\sigma_{SR;Gauss}^2$, з результатів теорем 1, 2 отримуємо

$$Y_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{SR;norm}^2) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\sigma_{SR;norm}^2 = \frac{1}{z_\alpha^2} \left((2s^2 + 4s) \left(1 - \frac{R_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right)^2 + \frac{(R_{GMV}^2 + 2(1+s)V_{GMV})(z_\alpha^2 - s)}{2V_{GMV}} \right),$$

де z_α – α -квантиль стандартного нормального розподілу.

Зауваження 3. Асимптотичні дисперсії, отримані в теоремах 1, 2, залежать від невідомих параметрів розподілу вектора доходностей \mathbf{X}_t . Консистентність їхніх вибірових оцінок випливає з твердження теореми 1.14 з [13], що обґрунтовує коректність їхнього використання.

Результати теорем 1, 2 дають можливість використовувати інтервальні оцінки для відношення Шарпа. Якщо $\sigma_{SR}^2 = \{\sigma_{SR;norm}^2, \sigma_{SR;Gauss}^2, \sigma_{SR;el}^2\}$, то двосторонній $(1 - \gamma)$ -довірчий інтервал для відношення Шарпа портфеля з найменшим відношенням Шарпа матиме вигляд

$$\left[\widehat{SR}_{VaR} - z_{1-\gamma/2} \frac{\hat{\sigma}_{SR}}{\sqrt{n}}, \widehat{SR}_{VaR} + z_{1-\gamma/2} \frac{\hat{\sigma}_{SR}}{\sqrt{n}} \right], \quad (4)$$

а односторонні інтервали –

$$\left[-\infty, \widehat{SR}_{VaR} + z_{1-\gamma} \frac{\sigma_{SR}}{\sqrt{n}} \right], \quad \left[\widehat{SR}_{VaR} - z_{1-\gamma} \frac{\sigma_{SR}}{\sqrt{n}}, +\infty \right]. \quad (5)$$

Для використання інтервалів довіри відношення Шарпа (4), (5) необхідно визначити розмір вибірки n , за якого досягатиметься потрібне наближення. Використаємо для цього імітаційне моделювання.

2. Імітаційне моделювання. Використання асимптотичних статистичних властивостей оцінок параметрів, які становлять інтерес, обґрунтовано в [17]. Основною проблемою в цьому випадку є встановлення достатньої кількості історичних спостережень n , за якою буде досягнуто потрібне набли-

ження. Для знаходження обсягу вибірки історичних значень застосуємо такий **алгоритм імітаційного моделювання**.

Крок 1. На першому етапі необхідно уточнити припущення щодо поведінки вектора \mathbf{X}_t . Нехай вектор \mathbf{X}_t *нормально розподілений*, t_5 -*розподілений* або *розподілений за законом Лапласа* і реалізації вектора \mathbf{X}_t є неавтокорельованими або є *векторним авторегресійним процесом* порядку 1 ($VAR(1)$: $\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t$) з нормально розподіленими залишками. Це останнє припущення часто використовують для моделювання автокорельованих дохідностей (див. [21, с. 111; 23]).

Крок 2. Далі необхідно встановити точні значення параметрів розподілу вектора дохідностей \mathbf{X}_t . За перших трьох *припущень* потрібно визначити вектор математичних сподівань $\boldsymbol{\mu}$ і матрицю коваріацій $\Gamma(0)$. За четвертого припущення додатково потрібно оцінити матрицю \mathbf{A} . Виберемо щоденні дохідності акцій компаній з переліку *Dow Jones*, відсортовані за назвами тикерів в алфавітному порядку за період від **19.10.2020** по **16.10.2023** (за 3 роки) – всього 753 значення дохідностей – та розглянемо 6 портфелів з найменшим рівнем *VaR* за рівня довіри $\alpha = 0.95$, що складаються з $k = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ перших акцій з розглянутого списку, оцінимо $\boldsymbol{\mu}$ і $\Gamma(0)$ за формулами (3) та приймемо ці оцінки за точні значення. На основі цих вибраних даних оцінимо матрицю \mathbf{A} – за четвертого припущення.

Крок 3. Використовуючи припущення про \mathbf{X}_t з **кроку 1** та точні значення параметрів з **кроку 2**, згенеруємо $n = \{250, 500, 1000, 2000\}$ значень вектора дохідностей, з яких оцінимо відношення Шарпа для усіх портфелів та повторимо цей крок, наприклад, 20000 разів.

Крок 4. На основі отриманих вибірок значень відношення Шарпа за кожного припущення і заданих k та n побудуємо оцінки точних розподілів та за формулами (3) математичних сподівань і дисперсій випадкових величин Y_n та порівняємо їх з відповідними асимптотичними значеннями.

Таблиця 1. Асимптотичні оцінки та оцінки точних математичних сподівань і дисперсій в. в. Y_n за припущення, що вектор \mathbf{X}_t є нормально розподілений.

$k \backslash n$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 5$	0.0994	0.0716	0.0452	0.0342	0
	1.0389	1.0252	1.0096	1.0054	1.0024
$k = 10$	0.22345	0.1595	0.1140	0.0795	0
	1.0941	1.0490	1.0319	1.0162	1.0202
$k = 15$	0.3611	0.2525	0.1744	0.1223	0
	1.1429	1.0721	1.0464	1.0311	1.0270
$k = 20$	0.4997	0.3418	0.2399	0.1637	0
	1.1991	1.1047	1.0588	1.0427	1.0432
$k = 25$	0.6525	0.4411	0.2993	0.2116	0
	1.2569	1.1350	1.0832	1.0596	1.0479
$k = 30$	0.8047	0.5340	0.3641	0.2564	0
	1.3230	1.1638	1.0988	1.0669	1.0659

Результати моделювання відображено в табл. 1–8 та на рис. 1–8. На рис. 1–8 наведено порівняння оцінок точних густин з відповідними асимптотичними оцінками для портфелів з $k = 15$ активів (рис. 1а–рис. 8а) і для

$k = 30$ активів (рис. 1б–рис. 8б). У табл. 1–8 значення у верхніх комірках для кожного k відповідають математичному сподіванню, а в нижніх – дисперсії.

На рис. 1–рис. 4 криві 1–4 відповідають оцінкам точних розподілів відповідних в. в. за обсягів вибірок історичних значень $n = 250, 500, 1000, 2000$, а криві 5 відповідають асимптотичним розподілам [8].

З табл. 1–4 бачимо, що в усіх випадках оцінки точних дисперсій швидко збігаються до асимптотичної оцінки. При $n = 1000$, $k = 30$ і за припущення t_5 -розподілу вектора \mathbf{X}_t оцінка точної дисперсії становить 1.1405, а оцінка асимптотичної дисперсії становить 1.1332.

Таблиця 2. Асимптотичні оцінки та оцінки точних математичних сподівань і дисперсій в. в. Y_n за припущення, що вектор \mathbf{X}_t є t_5 -розподілений.

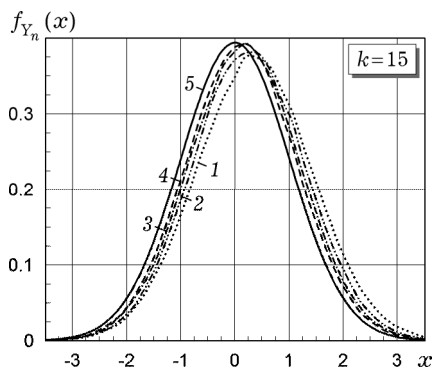
$k \backslash n$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 5$	0.1216	0.0849	0.0629	0.0417	0
	1.0424	1.0253	1.0189	1.0094	1.0055
$k = 10$	0.2797	0.1880	0.1361	0.0980	0
	1.1048	1.0663	1.0483	1.0367	1.0415
$k = 15$	0.4287	0.3018	0.2105	0.1463	0
	1.1533	1.0906	1.0600	1.0485	1.0552
$k = 20$	0.5856	0.4005	0.2799	0.1952	0
	1.2226	1.1293	1.0920	1.0767	1.0875
$k = 25$	0.7540	0.5125	0.3535	0.2526	0
	1.2778	1.1611	1.1134	1.0882	1.0971
$k = 30$	0.9307	0.6242	0.4295	0.2995	0
	1.3560	1.2068	1.1405	1.1144	1.1332

Таблиця 3. Асимптотичні оцінки та оцінки точних математичних сподівань і дисперсій в. в. Y_n за припущення, що вектор \mathbf{X}_t є розподілений за законом Лапласа.

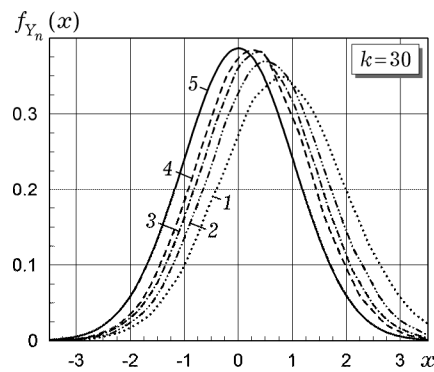
$k \backslash n$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 5$	0.1100	0.0773	0.0580	0.0368	0
	1.0462	1.0218	1.0128	1.0076	1.0040
$k = 10$	0.2485	0.1758	0.1215	0.0877	0
	1.1040	1.0643	1.0431	1.0315	1.0305
$k = 15$	0.3965	0.2720	0.1929	0.1344	0
	1.1623	1.0877	1.0621	1.0422	1.0401
$k = 20$	0.5390	0.3659	0.2510	0.1764	0
	1.2215	1.1325	1.0848	1.0635	1.0646
$k = 25$	0.7061	0.4674	0.3212	0.2241	0
	1.2827	1.1596	1.1003	1.0746	1.0717
$k = 30$	0.8642	0.5772	0.3894	0.2744	0
	1.3596	1.2024	1.1317	1.0988	1.0983

Таблиця 4. Асимптотичні оцінки та оцінки точних математичних сподівань і дисперсій в. в. Y_n за припущення, що вектор $X_t \in VAR(1)$ процесом.

$k \backslash$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 5$	0.1812	0.1296	0.0944	0.0718	0
	1.0143	0.9872	0.9771	0.9704	0.9598
$k = 10$	0.4211	0.3163	0.2569	0.2323	0
	1.1219	1.0633	1.0369	1.0215	1.0089
$k = 15$	0.6600	0.4881	0.3845	0.3395	0
	1.2036	1.1113	1.0711	1.0526	1.0346
$k = 20$	0.9197	0.6781	0.5486	0.4958	0
	1.2320	1.1053	1.0531	1.0227	0.9993
$k = 25$	1.1513	0.8375	0.6665	0.5865	0
	1.2542	1.0908	1.0215	0.9904	0.9618
$k = 30$	1.4360	1.0403	0.8309	0.7516	0
	1.4352	1.2213	1.1280	1.0906	1.0464

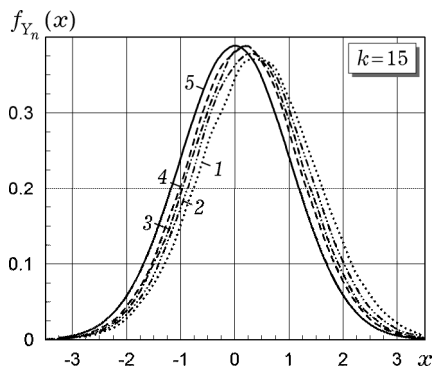


а)

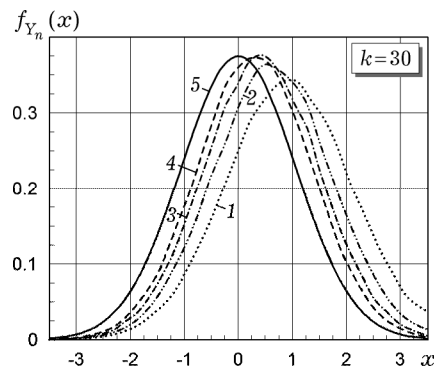


б)

Рис. 1. Асимптотична оцінка та оцінки точних густин в. в. Y_n за припущення, що вектор $X_t \in$ нормально розподілений.



а)



б)

Рис. 2. Асимптотична оцінка та оцінки точних густин в. в. Y_n за припущення, що вектор $X_t \in t_5$ -розподілений.

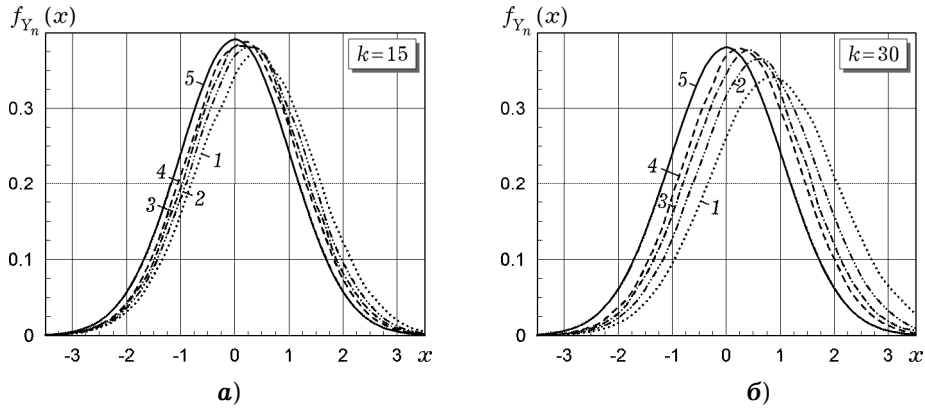


Рис. 3. Асимптотична оцінка та оцінки точних густин в. в. Y_n за припущення, що вектор X_t є розподілений за законом Лапласа.

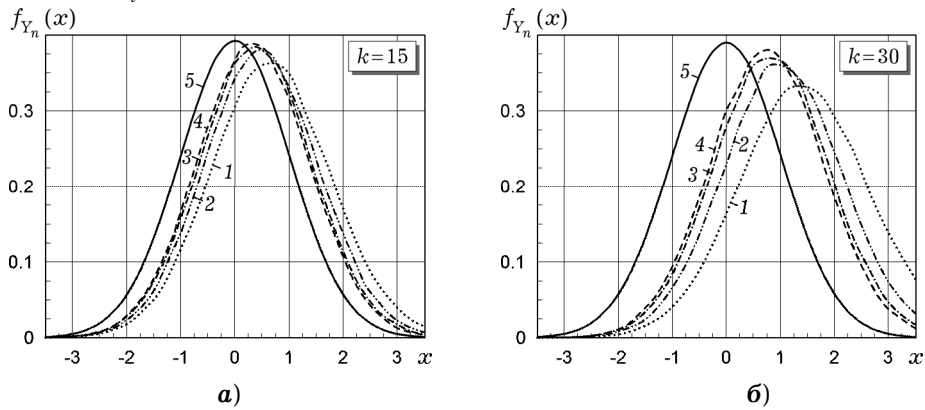


Рис. 4. Асимптотична оцінка та оцінки точних густин в. в. Y_n за припущення, що вектор $X_t \in VAR(1)$ процесом.

Швидкість збіжності оцінок математичних сподівань є незадовільною, оскільки, як видно з рис. 1–4, густини в. в. Y_n сильно зміщені вправо, навіть при $n = 2000$. Отриманий результат зумовлений тим, що вибіркова оцінка відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR є зміщеною (хоча асимптотично є незміщеною). Відповідно, для зменшення зміщення можна збільшувати обсяги вибірок історичних значень або побудувати виправлену оцінку відношення Шарпа.

Із [7], за припущення нормального розподілу вектора X_t , випливає, що випадкова величина \hat{V}_{GMV} не залежить від \hat{R}_{GMV} та \hat{s} , тому

$$\begin{aligned}
 E(\widehat{SR}_{VaR}) &= E\left(\frac{\hat{R}_{GMV} \sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}}{z_\alpha \sqrt{\hat{V}_{GMV}}} + \frac{\hat{s}}{z_\alpha}\right) = \\
 &= \frac{1}{z_\alpha} E\left(\hat{R}_{GMV} \sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}\right) E\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}\right) + \frac{E(\hat{s})}{z_\alpha}.
 \end{aligned}$$

Також із [7] отримуємо, що

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{V_{GMV}} \sim \chi_{n-k}^2,$$

$$\hat{R}_{GMV} |_{\hat{s}=s^*} \sim N\left(R_{GMV}, \frac{1+ns^*/(n-1)}{n} V_{GMV}\right),$$

$$\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} \sim F_{k-1, n-k+1; ns},$$

де через $F_{k-1, n-k+1; ns}$ позначено нецентральний розподіл Фішера з $k-1$ та $n-k+1$ ступенями свободи та нецентральним параметром ns , а χ_{n-k}^2 – χ^2 -розподіл з $n-k$ ступенями свободи. Оскільки $\frac{\sqrt{n-1}\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}{\sqrt{V_{GMV}}} \sim \chi_{n-k}$, то

випадкова величина $\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{n-1}\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}$ матиме обернений χ -розподіл з $n-k$ ступенями свободи, а отже,

$$E\left(\frac{n-k-1}{n-1} \hat{s} - \frac{k-1}{n}\right) = s,$$

$$E\left(\frac{\sqrt{2}\Gamma((n-k)/2)}{\sqrt{n-1}\Gamma((n-k-1)/2)\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}\right) = E\left(\frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}}\right).$$

Тому розглянемо виправлену оцінку

$$\begin{aligned} \widehat{SR}_{VaR}^{\text{adj}} &= \frac{\sqrt{2}\Gamma((n-k)/2)\hat{R}_{GMV}\sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}}{z_\alpha\sqrt{n-1}\Gamma((n-k-1)/2)\sqrt{\hat{V}_{GMV}}} + \\ &\quad + \frac{(n-k-1)\hat{s}/(n-1) - (k-1)/n}{z_\alpha}, \end{aligned}$$

де $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функція.

Дослідимо збіжність випадкової величини $Y_n^{\text{adj}} = \sqrt{n}(\widehat{SR}_{VaR}^{\text{adj}} - SR_{VaR})$ за алгоритмом, описаним вище. Результати обчислень наведено в табл. 5–8 та на рис. 5–8.

Таблиця 5. Асимптотичні оцінки та оцінки точних математичних сподівань і дисперсій в. в. Y_n^{adj} за припущення, що вектор \mathbf{X}_t є нормально розподіленим.

$k \backslash n$	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 5$	-0.0025	0.0003	-0.0050	-0.0012	0
	1.0159	1.0139	1.0041	1.0026	1.0024
$k = 10$	-0.0107	-0.0029	0.0004	-0.0004	0
	1.0473	1.0267	1.0210	1.0108	1.0202
$k = 15$	-0.0096	-0.0017	-0.0026	-0.0020	0
	1.0703	1.0383	1.0301	1.0230	1.0270
$k = 20$	-0.0075	-0.0020	0.0016	-0.0030	0
	1.0975	1.0584	1.0367	1.0319	1.0432
$k = 25$	-0.0081	-0.0017	-0.0058	-0.0014	0
	1.1234	1.0756	1.0551	1.0459	1.0479
$k = 30$	-0.0055	-0.0024	-0.0034	0.0005	0
	1.1533	1.0905	1.0645	1.0503	1.0659

Таблиця 6. Асимптотичні оцінки та оцінки точних математичних сподівань і дисперсій в. в. Y_n^{adj} за припущення, що вектор $X_t \in t_5$ -розподілений.

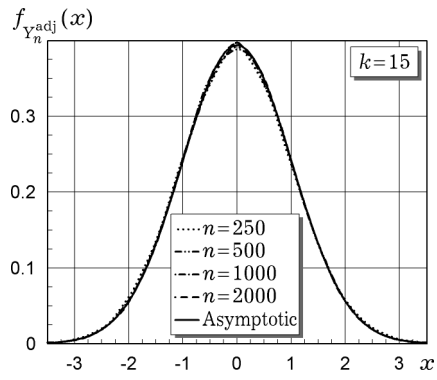
k	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 5$	0.0091	0.0062	0.0076	0.0026	0
	1.0193	1.0140	1.0132	1.0066	1.0055
$k = 10$	0.0203	0.0086	0.0105	0.0096	0
	1.0574	1.0436	1.0372	1.0312	1.0415
$k = 15$	0.0180	0.0204	0.0147	0.0089	0
	1.0798	1.0562	1.0433	1.0403	1.0552
$k = 20$	0.0220	0.0191	0.0158	0.0104	0
	1.1183	1.0818	1.0692	1.0654	1.0875
$k = 25$	0.0204	0.0215	0.0155	0.0167	0
	1.1412	1.1001	1.0844	1.0741	1.0971
$k = 30$	0.0286	0.0280	0.0215	0.0155	0
	1.1806	1.1303	1.1047	1.0970	1.1332

Таблиця 7. Асимптотичні оцінки та оцінки точних математичних сподівань і дисперсій в. в. Y_n^{adj} за припущення, що вектор X_t розподілений за законом Лапласа.

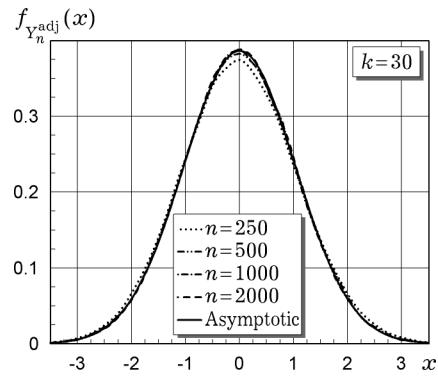
k	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 5$	0.0061	0.0046	0.0068	0.0007	0
	1.0230	1.0105	1.0073	1.0048	1.0040
$k = 10$	0.0093	0.0101	0.0056	0.0062	0
	1.0569	1.0417	1.0321	1.0261	1.0305
$k = 15$	0.0175	0.0125	0.0123	0.0077	0
	1.0884	1.0534	1.0454	1.0340	1.0401
$k = 20$	0.0200	0.0146	0.0079	0.0063	0
	1.1178	1.0850	1.0621	1.0525	1.0646
$k = 25$	0.0295	0.0151	0.0098	0.0068	0
	1.1466	1.0989	1.0717	1.0607	1.0717
$k = 30$	0.0334	0.0285	0.0140	0.0130	0
	1.1853	1.1266	1.0963	1.0817	1.0983

Таблиця 8. Асимптотичні оцінки та оцінки точних математичних сподівань і дисперсій в. в. Y_n^{adj} за припущення, що вектор $X_t \in VAR(1)$ процесом.

k	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 5$	0.0093	0.0070	0.0047	0.0040	0
	0.9842	0.9734	0.9713	0.9682	0.9598
$k = 10$	0.0032	0.0014	0.0009	0.0022	0
	1.0488	1.0262	1.0168	1.0094	1.0089
$k = 15$	0.0044	0.0040	-0.0009	0.0010	0
	1.0848	1.0528	1.0383	1.0322	1.0346
$k = 20$	0.0081	0.0040	0.0028	0.0035	0
	1.0679	1.0262	1.0104	0.9965	0.9993
$k = 25$	-0.0072	-0.0030	-0.0005	-0.0017	0
	1.0484	0.9965	0.9725	0.9620	0.9618
$k = 30$	-0.0064	-0.0032	-0.0053	0.0002	0
	1.1593	1.0959	1.0651	1.0543	1.0464

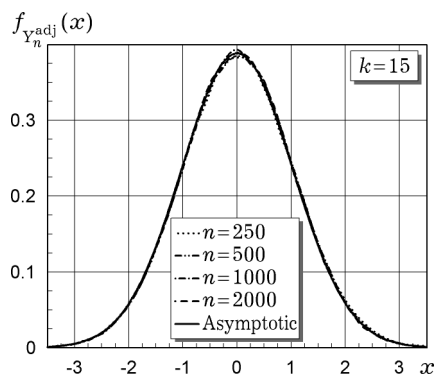


а)

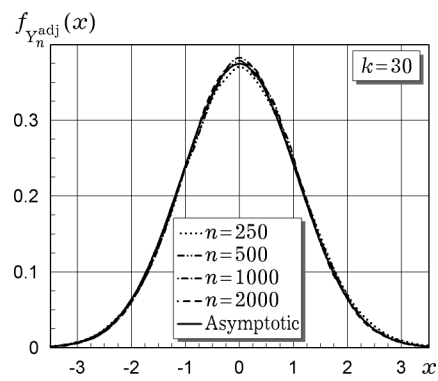


б)

Рис. 5. Асимптотична оцінка та оцінки точних густин в. в. Y_n^{adj} за припущення, що вектор X_t має нормальний розподіл.

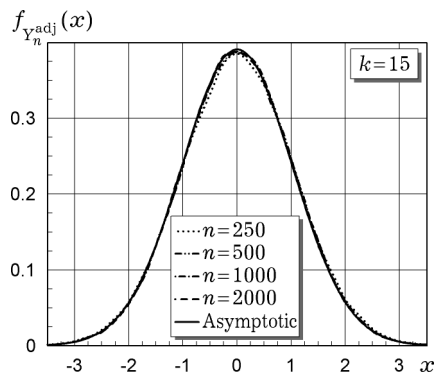


а)

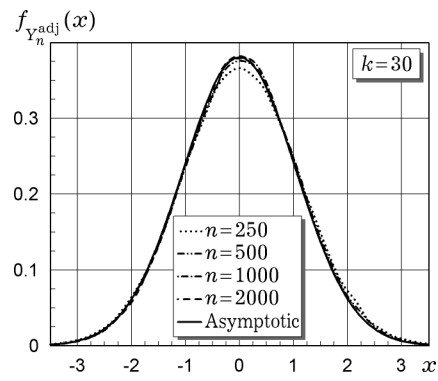


б)

Рис. 6. Асимптотична оцінка та оцінки точних густин в. в. Y_n^{adj} за припущення, що вектор X_t має t_3 -розподіл.



а)



б)

Рис. 7. Асимптотична оцінка та оцінки точних густин в. в. Y_n^{adj} за припущення, що вектор X_t розподілений за законом Лапласа.

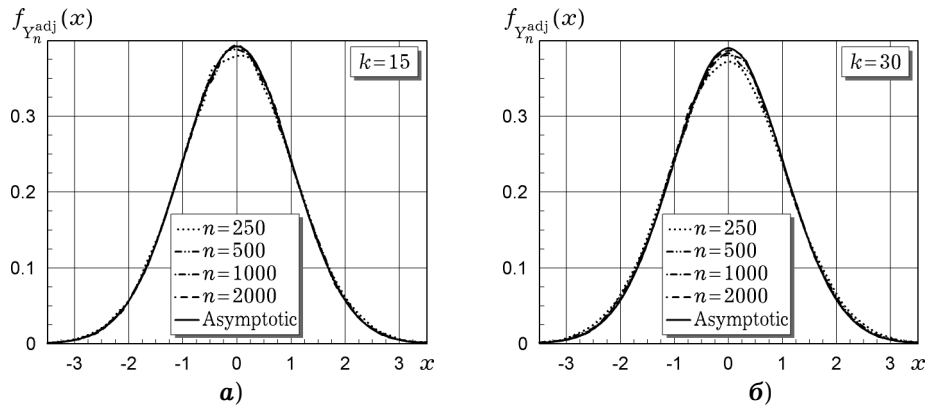


Рис. 8. Асимптотична оцінка та оцінки точних густин в. в. Y_n^{adj} за припущення, що вектор X_t є VAR (1) процесом.

Бачимо, що для виправленої оцінки практично відсутнє зміщення незалежно від кількості активів k у портфелі. Поведінка виправленої оцінки є кращою в усіх випадках розглянутих припущень стосовно поведінки вектора дохідностей активів портфеля X_t . Графічне зображення оцінок точних густин та відповідних асимптотичних оцінок підтверджує наші висновки.

Отже, використання виправленої оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR на практиці є коректним за широких припущень щодо поведінки вектора дохідностей активів портфеля X_t за обсягу вибірок історичних значень $n = \{500, 1000\}$. Отримані результати можуть бути використані для дослідження статистичної значущості відмінності відношення Шарпа портфеля від нуля та обчислення максимального рівня довіри до VaR, за якого відношення Шарпа відповідного портфеля буде статистично істотно додатним. Продемонструємо це на прикладі даних про ціни акцій, включених до переліку Dow Jones.

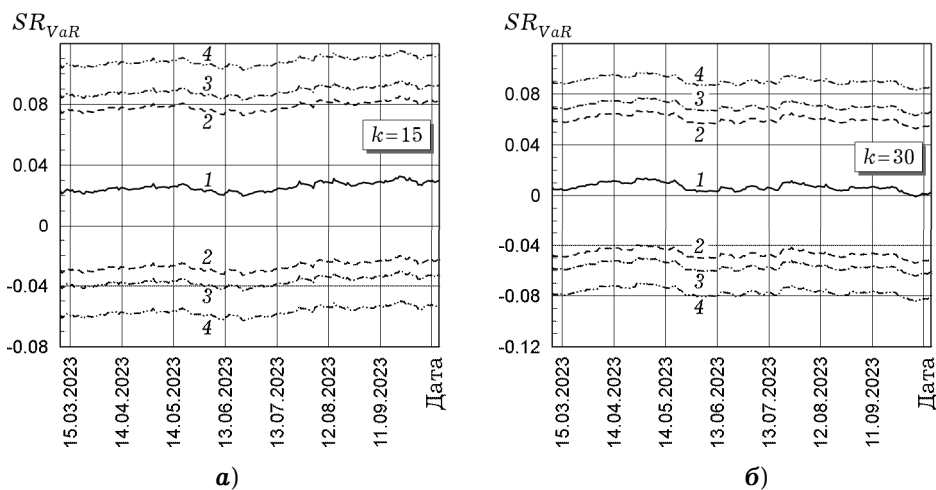


Рис. 9. $(1 - \gamma)$ -інтервали довіри для відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR за рівня довіри $\alpha = 0.95$, отримані методом біжучого вікна шириною $m = 1000$ спостережень.

3. Емпіричні результати. Дослідимо значущість відмінності відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR за рівня довіри $\alpha = 0.95$, скла-

деного з $k = \{15, 30\}$ перших акцій з переліку *Dow Jones*, посортованого за назвами тикерів в алфавітному порядку. Розглянемо щоденні дохідності акцій відповідних компаній за період від **21.03.2019** по **16.10.2023** (всього 1152 дохідності). Використовуючи метод біжучого вікна шириною $m = 1000$ спостережень, побудуємо $(1 - \gamma)$ -інтервали довіри, $\gamma = \{0.1, 0.05, 0.01\}$, для відповідних відношень Шарпа та обчислимо, у скількох зі 152 днів відповідні інтервали не містять нуля. Результати дослідження наведено на рис. 9. Криві 2–4 відповідають значенням $\gamma = \{0.01, 0.05, 0.1\}$. Криві 1 відповідають точковій оцінці відношення Шарпа відповідного портфеля.

На рис. 9 бачимо, що за розглянутий період не було жодного дня, коли б нуль не належав інтервалу довіри для відношення Шарпа. Отже, відношення Шарпа жодного разу не відрізнялося статистично істотно від нуля. Виникає питання: за якого рівня довіри до VaR відношення Шарпа буде статистично істотно відмінним від нуля? Щоб відповісти на це питання, необхідно підібрати α так, щоб нижня межа інтервалу довіри (4) була додатною.

На рис. 10 зображено відповідні рівні довіри VaR для портфельів з найменшим рівнем VaR , складених із $k = 15$ і $k = 30$ акцій, за яких нижні межі відповідних інтервалів довіри (4) для відношення Шарпа дорівнюють нулеві.

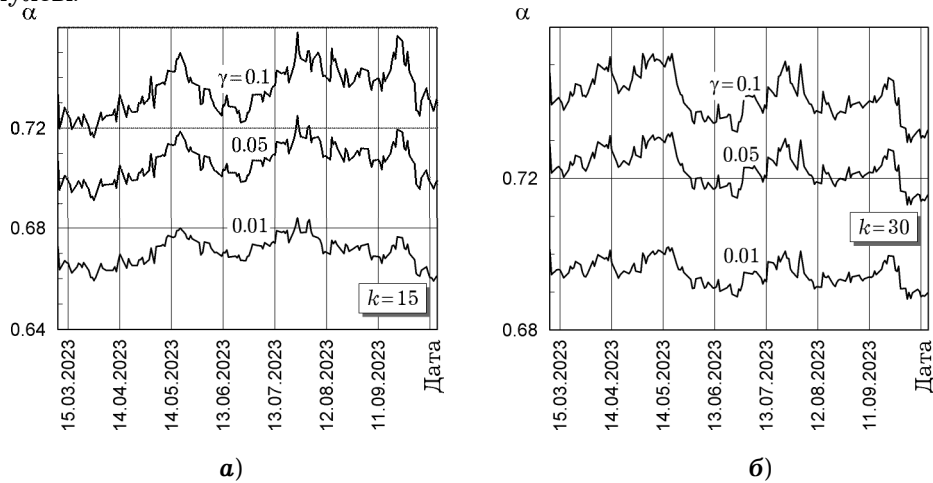


Рис. 10. Рівні довіри до VaR , за якого нижні межі $(1 - \gamma)$ -інтервалів довіри для відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR дорівнюють нулеві, отримані методом біжучого вікна шириною $m = 1000$ спостережень.

На рис. 10 бачимо, що для того щоб відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR було статистично істотно відмінним від нуля, потрібно вибирати рівень довіри VaR нижчим від 0.8, що вказує на високу ризиковність таких портфельів. Подібні результати отримано в [11] стосовно портфеля з максимальним відношенням Шарпа.

Висновки. У роботі проведено статистичний аналіз вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшим рівнем VaR . Знайдено асимптотичний розподіл цієї оцінки за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має багатовимірний еліптичний розподіл (теорема 1) або є слабко стаціонарним процесом Гаусса (теорема 2). На основі імітаційного моделювання встановлено, що оцінки точних дисперсій є близькими до відповідних асимптотичних значень при обсязі вибірки історичних спостережень $n = 1000$. Оскільки звичайній вибірковій оцінці притаманне значне зміщення, в роботі побудовано виправлену оцінку, властивості якої є кращими. Із використанням отриманих результатів на прикладі портфельів з наймен-

шим рівнем VaR , складених із акцій з переліку *Dow Jones*, встановлено, що за рівня довіри VaR , що дорівнює 0.95, відношення Шарпа портфеля істотно не відрізняється від нуля. Для досягнення відношення Шарпа, істотно відмінного від 0, необхідно використати рівень довіри, менший ніж 0.8, що відповідає дуже ризиковному портфелю.

1. *Alexander G. J., Baptista M. A.* Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis // *J. Economic Dyn. & Control.* – 2002. – **26**, No. 7-8. – P. 1159–1193.
– [https://doi.org/10.1016/S0165-1889\(01\)00041-0](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(01)00041-0).
2. *Artzner P., Delbaen F., Eber J. M., Heath D.* Coherent measures of risk // *Math. Finance.* – 1999. – **9**, No. 3. – P. 203–228.
– <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>.
3. *Baumol W. J.* An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection // *Management Sci.* – 1963. – **10**, No. 1. – P. 174–182.
– <https://doi.org/10.1287/mnsc.10.1.174>.
4. *Behera J., Pasayat A. K., Behera H., Kumar P.* Prediction based mean-value-at-risk portfolio optimization using machine learning regression algorithms for multi-national stock markets // *Eng. Appl. Artif. Intell.* – 2023. – **120**. – Article 105843.
– <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2023.105843>.
5. *Bhatia P., Gupta P.* Portfolio optimization with VaR approach: A comparative analysis for Japan, London, New York and India // *Theor. Appl. Economics.* – 2020. – **27**, No. 4(625). – P. 245–262. – <http://store.ectap.ro/articole/1506.pdf>.
6. *Bodnar T., Lindholm M., Niklasson V., Thorsén E.* Bayesian portfolio selection using VaR and CVaR // *Appl. Math. Comput.* – 2022. – **427**. – Article 127120.
– <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127120>.
7. *Bodnar T., Schmid W.* Econometrical analysis of the sample efficient frontier // *Eur. J. Finance.* – 2009. – **15**, No. 3. – P. 317–335.
– <https://doi.org/10.1080/13518470802423478>.
8. *Bodnar T., Schmid W., Zabolotskiy T.* Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data // *Metrika.* – 2013. – **76**, No. 8. – P. 1105–1134. – <https://doi.org/10.1007/s00184-013-0432-1>.
9. *Bodnar T., Schmid W., Zabolotskiy T.* Minimum VaR and minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests // *Statistics & Risk Modeling.* – 2012. – **29**, No. 4. – P. 281–314. – <https://doi.org/10.1524/strm.2012.1118>.
10. *Bodnar T., Schmid W., Zabolotskiy T.* Statistical inference of the efficient frontier for dependent asset returns // *Statistical Papers.* – 2009. – **50**, No. 3. – P. 593–604.
– <https://doi.org/10.1007/s00362-007-0108-x>.
11. *Bodnar T., Zabolotskiy T.* How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? // *AStA – Advances in Statistical Analysis.* – 2017. – **101**, No. 1. – P. 1–28. – <https://doi.org/10.1007/s10182-016-0270-3>.
12. *Brockwell P. J., Davis R. A.* Time series: Theory and methods. – New York: Springer, 2006. – 600 p.
13. *DasGupta A.* Asymptotic theory of statistics and probability. – New York: Springer, 2008. – xxvii+722 p.
14. *Kourtis A.* The Sharpe ratio of estimated efficient portfolios // *Finance Res. Lett.* – 2016. – **17**. – P. 72–78. – <https://doi.org/10.1016/j.frl.2016.01.009>.
15. *Krokhmal P., Zabaranin M., Uryasev S.* Modeling and optimization of risk // *Surveys in Operations Research and Management Science.* – 2011. – **16**, No. 2. – P. 49–66. – <https://doi.org/10.1016/j.sorms.2010.08.001>.
16. *Linden M.* A model for stock return distribution // *Int. J. Finance & Econ.* – 2001. – **6**, No. 2. – P. 159–169. – <https://doi.org/10.1002/ijfe.149>.
17. *Ling S., McAleer M.* Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model // *Econometric Theory.* – 2003. – **19**, No. 2. – P. 280–310.
– <http://www.jstor.org/stable/3533354>.
18. *Lo A. W.* The statistics of Sharpe ratios // *Financial Analysts J.* – 2002. – **58**, No. 4. – P. 36–52. – <https://doi.org/10.2469/faj.v58.n4.2453>.
19. *Markowitz H.* Portfolio selection // *J. Finance.* – 1952. – **7**, No. 1. – P. 77–91.
– <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>.
20. *Okhrin Y., Schmid W.* Distributional properties of optimal portfolio weights // *J. Econometrics.* – 2006. – **134**, No. 1. – P. 235–256.

- <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.06.022>.
21. Pav S. E. The Sharpe ratio: Statistics and applications. – Boca Raton: CRC Press, 2022. – 500 p.
 22. Pflug G. Ch. Some remarks on the value-at-risk and conditional value-at-risk // S. P. Uryasev (Ed.): Probabilistic Constrained Optimization. Methodology and Applications. – Book Ser.: Nonconvex Optimization and Its Applications (NOIA, Vol. 49). – New York: Springer, 2000. – P. 272–281.
– https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3150-7_15.
 23. Qi J., Rekkas M., Wong A. Highly accurate inference on the Sharpe ratio for auto-correlated return data // J. Statistical & Econometric Meth. – 2018. – 7, No. 1. – P. 21–50. – http://www.sciencpress.com/Upload/JSEM/Vol%207_1_2.pdf.
 24. Sarykalin S., Serraino G., Uryasev S. Value-at-risk vs. conditional value-at-risk in risk management and optimization // Tutorials in Operations Research. – INFORMS, 2008. – P. 270–294. – <https://doi.org/10.1287/educ.1080.0052>.
 25. Schmid W., Zabolotsky T. On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio // AStA – Advances in Statistical Analysis. – 2008. – 92, No. 1. – P. 29–34.
– <https://doi.org/10.1007/s10182-008-0054-5>.
 26. Yamai Y., Yoshida T. Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition, and optimization // Monetary and economic studies. – 2002. – 20, No. 1. – P. 87–121.
– <https://www.imes.boj.or.jp/research/papers/english/me20-1-4.pdf>.

STATISTICAL ANALYSIS OF THE SHARPE RATIO OF THE MINIMUM VALUE-AT-RISK PORTFOLIO

Statistical analysis of sample estimator of the Sharpe ratio of minimum Value-at-Risk (VaR) portfolio is provided. It is found the asymptotic distribution of this estimator under two assumptions regarding the behavior of the vector of portfolio asset returns: it follows multivariate elliptical distribution with non-autocorrelated realizations or behaves like weakly stationary Gaussian process. A simulation study reveals that the standard sample estimator exhibits a significant bias. To address this, an adjusted estimator is developed that mitigates the bias. Additionally, it is established that a historical sample size of 1000 observations provides a good approximation for variances. These findings are utilized to examine the significance of the difference between the Sharpe ratio of the minimum VaR portfolio and zero, with a confidence level of 0.95. Throughout the observation period, the Sharpe ratio remains equivalent to zero. The confidence level for VaR such that the Sharpe ratio of the minimum VaR portfolio is determined significantly different from zero is determined.

Key words: Sharpe ratio, Value-at-Risk, minimum VaR portfolio, multivariate elliptic distribution, weakly stationary Gaussian process, asymptotic distribution, sample estimate.

¹ Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів