УДК 517.95

П. Я. Пукач[2], С. М. Репетило[1,2] ✉

КРАЙОВА ЗАДАЧА ЗІ ЗМІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ. I

Встановлено умови однозначної розв'язності в обмеженій циліндричній області задачі з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами для рівнянь із частинними похідними високого порядку, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Розв'язок розглянутої задачі побудовано у вигляді ряду за системою ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Ключові слова: *диференціальні рівняння із частинними похідними, не розв'язані відносно похідної, умови Діріхле – Неймана, однозначна розв'язність, малі знаменники, міра Лебеґа.*

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу Діріхле – Неймана для рівнянь із частинними похідними високого порядку, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною:

$$\mathcal{P}[u] := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} \sum_{|s|\le \omega} a_s^r \frac{\partial^{|s|} u(t,x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0 ,$$

$$(t,x) \in Q_T^p , \qquad (1)$$

$$U_j[u] := \left(\frac{\partial^{2j-2} u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\right)\Bigg|_{t=0} = \varphi_j(x) ,$$

$$U_{n+j}[u] := \left(\frac{\partial^{2j-1} u(t,x)}{\partial t^{2j-1}}\right)\Bigg|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \quad j = 1,\ldots,n, \quad x \in \Omega^p , \qquad (2)$$

де $Q_T^p = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T,\, x \in \Omega^p\}$, $T > 0$, Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z})^p$, $p \in \mathbb{N}$; $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s|\le 2\ell} b_s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}}$ – еліптичний оператор, $a_s^r, b_s \in \mathbb{C}$, $a_0^1 \ne 0$, $s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$. Зауважимо, що вигляд області Q_T^p накладає умови 2π-періодичності за $x_1,\ldots,x_p$ на розв'язок задачі $u(t,x)$ та на функції $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,2n$.

Рівняння, не розв'язані відносно старшої похідної за часовою змінною t, виникають, наприклад, при математичному моделюванні задач про малі коливання ідеальної рідини в посудині, що обертається, при вивченні фільтрації рідини в тріщинуватих породах, у теорії нестаціонарних внутрішніх хвиль. Таким чином, виникає потреба у дослідженні питання коректності постановки та однозначної розв'язності задач, зокрема, задач з крайовими та нелокальними умовами, для таких рівнянь. Різноманітним аспектам дослідження задач для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, присвячено численні публікації (див., наприклад, [3, 8, 14, 15] та бібліографію там). Зокрема, у працях [1, 2, 4, 6, 7, 9] розглянуто задачі з локальними (типу умов Діріхле) і нелокальними (у тому числі й інтегральними) крайовими умовами, а також багатоточкові задачі для рівнянь і

✉ repetylosofiya@gmail.com

систем рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною t, у класах функцій, 2π-періодичних за просторовими координатами. Однак задачі з умовами Діріхле – Неймана для таких рівнянь практично не досліджувались, хоча задачі з умовами Діріхле – Неймана для рівнянь із частинними похідними вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [17–21, 23]). Випадки рівнянь, розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною t, розглянуто у працях [12, 13, 22].

Пропонована робота є дотичною до праць [1, 2], у яких для рівнянь та систем рівнянь типу рівняння (1) розглянуто задачу з умовами типу умов Діріхле та досліджено питання існування та єдиності її класичних розв'язків або розв'язків у просторах періодичних функцій експоненційного типу. Метою роботи є встановлення умов однозначної розв'язності задачі (1), (2) у просторі формальних тригонометричних рядів та у шкалі просторів Соболєва (для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ та для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) коефіцієнтів рівняння (1)).

2. Основні позначення. Надалі використовуємо такі позначення: $\mathbb{Z}_+^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$; $\mathcal{T}$ – простір скінченних тригонометричних поліномів $v(x) = \sum_{|k| \le N} v_k \exp(ik, x)$, $N \in \mathbb{N}$, з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність послідовності $\{v^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}$ до $v \in \mathcal{T}$ визначається таким чином: $v^n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}}{\to}} v(x)$, якщо починаючи з деякого номера, $v^n(x) = \sum_{|k| \le N} v_k^n \exp(ik, x)$, $N \le N_1$, N_1 – деяке фіксоване число, і $v_k^n \underset{n\to\infty}{\to} v_k$ для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$; $\mathcal{T}'$ – простір формальних тригонометричних рядів [5] $v(x) = \sum_{|k|\ge 0} v_k \exp(ik, x)$; $C^r([0, T], \mathcal{T})$ $(C^r([0, T], \mathcal{T}'))$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – простір функцій $v(t, x) = \sum_{|k|\ge 0} v_k(t) \exp(ik, x)$, $v_k(t) \in C^r([0, T])$, $k \in \mathbb{Z}^p$, таких, що $\frac{\partial^j v}{\partial t^j} \in \mathcal{T}$ $\left(\frac{\partial^j v}{\partial t^j} \in \mathcal{T}'\right)$, $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$, при кожному фіксованому $t \in [0, T]$; $H_q(\Omega^p)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}$ за нормою $\|v; H_q(\Omega^p)\| := \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} (1 + k^2)^q |v_k|^2}$; $C^r([0, T], H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – банахів простір функцій $v(t, x)$ таких, що для кожного $t \in [0, T]$ функції $\frac{\partial^j v}{\partial t^j}$, $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$, належать до простору $H_{q-j}(\Omega^p)$ і є неперервними за $t \in [0, T]$ у нормі цього простору

$$\|v; C^r([0, T], H_q(\Omega^p))\| := \sum_{j=0}^{r} \max_{0\le t\le T} \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j}; H_{q-j}(\Omega^p) \right\|.$$

Через c_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, позначатимемо додатні сталі, які не залежать від k.

3. Єдиність розв'язку. Надалі вважатимемо, що $\varphi_j(x) \in \mathcal{T}'$ і

$$\varphi_j(x) = \sum_{|k|\ge 0} \varphi_{jk} \exp(ik, x), \quad j \in \{1, \ldots, 2n\},$$

$$\varphi_{jk} = (2\pi)^{-p} \int_{\Omega^p} \varphi_j(x) \exp(-ik, x)\, dx, \quad j \in \{1, \ldots, 2n\}.$$

Означення 1. Розв'язком задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$ називатимемо функцію

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t) \exp(ik, x) \tag{3}$$

таку, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, належить до простору $C^{2n}([0,T])$ і справджує, відповідно, рівності

$$L(ik) u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le\omega} a_s^r (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} u_k^{(2r)} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{4}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0) = \varphi_{rk}, \quad u_k^{(2r-1)}(T) = \varphi_{n+r,k}, \quad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Отже, розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$ шукаємо у вигляді ряду (3), де $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі (4), (5).

Надалі вважатимемо, що $L\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ – еліптичний оператор, тобто для всіх $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{|s|=2\ell} b_s (i\xi_1)^{s_1} \ldots (i\xi_p)^{s_p} \right| \ge c_0 |\xi|^{2\ell}.$$

Якщо, крім цього, для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p$ виконується умова

$$L(i\xi) = \sum_{|s|\le 2\ell} b_s (i\xi_1)^{s_1} \ldots (i\xi_p)^{s_p} \ne 0,$$

то аналогічно, як і в [7], можемо встановити, що існують сталі c_1 та $K \equiv \equiv K(c_1)$ такі, що

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p,\ |k| \ge K) \quad |L(ik)| \ge c_1 |k|^{2\ell}.$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ рівнянню (4) відповідає характеристичне рівняння

$$L(ik)\eta^{2n} + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le\omega} a_s^r (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \eta^{2r} = 0, \tag{6}$$

η-корені якого є такими:

$$\eta_j := \eta_j(k) = \sqrt{|\lambda_j(k)|} \exp(i \arg \lambda_j(k) / 2),$$

$$\eta_{n+j} := \eta_{n+j}(k) = -\eta_j(k), \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

де $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ – корені рівняння

$$\lambda^n + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le\omega} a_s^r \frac{(ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p}}{L(ik)} \lambda^r = 0. \tag{7}$$

Припустимо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\eta_1(k), \ldots, \eta_n(k), -\eta_1(k), \ldots,$ $-\eta_n(k)$ рівняння (6) є різними, а отже, відмінними від нуля. Не порушуючи загальності, надалі будемо вважати, що $\operatorname{Re}\eta_j(k) \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Для λ-коренів рівняння (7) справджуються такі оцінки (див. [16, с. 101]):

$$\left|\lambda_j(0)\right| \leq c_2, \quad \left|\lambda_j(k)\right| \leq \begin{cases} c_3\,|k|^{\omega-2\ell}, & \omega \geq 2\ell, \\ c_4\,|k|^{(\omega-2\ell)/n}, & \omega < 2\ell, \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{8}$$

Рівняння (4) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ має фундаментальну систему розв'язків

$$\{u_{kj}(t) = \exp(\eta_j(k)t), \;\; u_{k,n+j}(t) = \exp(-\eta_j(k)t), \quad j \in \{1, \ldots, n\}\},$$

а характеристичний визначник задачі (4), (5) обчислюється за формулою

$$\Delta(k,T) = (-1)^n \prod_{1 \leq s < t \leq n} (\eta_s^2 - \eta_t^2)^2 \prod_{j=1}^{n} \left(\eta_j \left(e^{\eta_j T} + e^{-\eta_j T}\right)\right).$$

Відомо (див. [10, с. 108]), що задача (4), (5) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(k,T) \neq 0$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p, \;\; \forall m \in \mathbb{Z}) \quad i\eta_j(k)T \neq \pi(m + 1/2), \;\; j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{9}$$

Д о в е д е н н я теореми здійснюється за схемою доведення теореми 1 з [13]. ♦

4. Існування розв'язку задачі.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (9). *Якщо* $\varphi_j \in \mathcal{T}'$ $(\varphi_j \in \mathcal{T})$, $j \in$ $\in \{1, \ldots, 2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ $\left(C^{2n}([0,T],\mathcal{T})\right)$, *який визначається формулою*

$$u(t,x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) e^{(ik,x)} :=$$

$$:= \sum_{|k| \geq 0} \sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j}^{(q)} \frac{\varphi_{jk}\eta_q\left(e^{\eta_q(T-t)} + e^{-\eta_q(T-t)}\right) + \varphi_{n+j,k}\left(e^{\eta_q t} - e^{-\eta_q t}\right)}{(-1)^{n+j}\eta_q\left(e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T}\right) \prod\limits_{s=1,\, s \neq q}^{n} (\eta_s^2 - \eta_q^2)} e^{(ik,x)}, \tag{10}$$

де $S_\ell^{(q)}$, $\ell \in \{1, \ldots, n-1\}$, *– сума всіх можливих добутків* ℓ *елементів з набору* $\eta_1^2, \ldots, \eta_{q-1}^2, \eta_{q+1}^2, \ldots, \eta_n^2$, $S_0^{(q)} \equiv 1$.

Д о в е д е н н я ґрунтується на теоремі 1, теоремі 6.2 з [5, с. 111] (згідно з якою довільний тригонометричний ряд у просторі $\mathcal{T}'$ є збіжним), а також на тому факті, що простір $\mathcal{T}$ неперервно вкладається у простір $\mathcal{T}'$ [5, с. 110]. ♦

Для проміжних (між $C^{2n}([0,T],\mathcal{T})$ і $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$) просторів, зокрема для просторів $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$, існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане, взагалі кажучи, з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [11] і бібліографію там), оскільки модулі виразів $\eta_q(k)$, $e^{\eta_q(k)T} + e^{-\eta_q(k)T}$, $\eta_s^2(k) - \eta_q^2(k)$, $q, s \in \{1, \ldots, n\}$, $q \neq s$, які входять у вирази (10) як знаменники і є відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Означення 2. Розв'язком задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$, називатимемо функцію $u(t,x)$ з цього простору, яка задовольняє такі умови:

$$\left\| \mathcal{P}[u]; C([0,T], H_{q-2n}(\Omega^p)) \right\| = 0,$$

$$\left\| \boldsymbol{U}_r[u] - \varphi_r; H_{q-2r+2}(\Omega^p) \right\| = 0,$$

$$\left\| \boldsymbol{U}_{n+r}[u] - \varphi_{n+r}; H_{q-2r+1}(\Omega^p) \right\| = 0, \quad r \in \{1, \ldots, n\}.$$

Для дослідження питання про існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$, потрібні такі допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо* $2\ell > \omega$, *то для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *справджуються оцінки*

$$\max_{0 \le t \le T} \frac{\left| e^{\eta_q t} - e^{-\eta_q t} \right|}{\left| e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T} \right|} \le c_5 \left| \eta_q \right|, \quad q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{11}$$

$$\max_{0 \le t \le T} \frac{\left| e^{\eta_q (T-t)} + e^{-\eta_q (T-t)} \right|}{\left| e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T} \right|} \le c_6, \quad q \in \{1, \ldots, n\}. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що при $2\ell > \omega$ виконується оцінка (див. (8))

$$\left| \eta_q \right| = \sqrt{\left| \lambda_q(k) \right|} \le \sqrt{c_4 \, |k|^{(\omega - 2\ell)/n}} \le \sqrt{c_4 \, |k|^{-1/n}}, \quad q \in \{1, \ldots, n\}. \tag{13}$$

Легко бачити, що для довільних чисел $\beta \in \mathbb{C}$ справджуються рівності

$$\left| e^{\beta} - e^{-\beta} \right| = \sqrt{\left(e^{\operatorname{Re}\beta} - e^{-\operatorname{Re}\beta} \right)^2 + 4\sin^2(\operatorname{Im}\beta)}, \tag{14}$$

$$\left| e^{\beta} + e^{-\beta} \right| = \sqrt{\left(e^{\operatorname{Re}\beta} - e^{-\operatorname{Re}\beta} \right)^2 + 4\cos^2(\operatorname{Im}\beta)}. \tag{15}$$

У формулі (14) покладемо $\beta = \eta_q t$ і використаємо розвинення функції $\sin(t \operatorname{Im} \eta_q)$ у ряд Маклорена. Після цього отримаємо таку оцінку:

$$\begin{aligned}
\left| e^{\eta_q t} - e^{-\eta_q t} \right| &= \sqrt{\left(e^{t \operatorname{Re} \eta_q} - e^{-t \operatorname{Re} \eta_q} \right)^2 + 4\sin^2(t \operatorname{Im} \eta_q)} \le \\
&\le \sqrt{\left(e^{t \operatorname{Re} \eta_q} - e^{-t \operatorname{Re} \eta_q} \right)^2} + \sqrt{4\sin^2(t \operatorname{Im} \eta_q)} = \\
&= \left| e^{t \operatorname{Re} \eta_q} - e^{-t \operatorname{Re} \eta_q} \right| + 2\left| \sin(t \operatorname{Im} \eta_q) \right| \le \\
&\le 2\left(\left| t \operatorname{Re} \eta_q \right| + \frac{1}{3!}\left| t \operatorname{Re} \eta_q \right|^3 + \frac{1}{5!}\left| t \operatorname{Re} \eta_q \right|^5 + \ldots \right) + \\
&+ 2\left| \sin(t \operatorname{Im} \eta_q) \right|.
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи формулу для суми нескінченної спадної геометричної прогресії і нерівність $\sin x \le x$, $x \ge 0$, отримаємо, що

$$\max_{0\le t\le T}\left|e^{\eta_q t}-e^{-\eta_q t}\right|\le 2\left|T\operatorname{Re}\eta_q\right|\times$$

$$\times\frac{1}{3!}\left(3!+\left|T\operatorname{Re}\eta_q\right|^2+\left|T\operatorname{Re}\eta_q\right|^4+\ldots\right)+2T\left|\operatorname{Im}\eta_q\right|\le$$

$$\le 2\left|T\operatorname{Re}\eta_q\right|\frac{1}{3!}\left(3!+\frac{\left|T\operatorname{Re}\eta_q\right|^2}{1-\left|T\operatorname{Re}\eta_q\right|^2}\right)+2T\left|\operatorname{Im}\eta_q\right|\le$$

$$\le 2T\left|\eta_q\right|c_7+2T\left|\eta_q\right|=2T\left|\eta_q\right|(c_7+1), \qquad (16)$$

якщо $\left|T\operatorname{Re}\eta_q\right|<1$. Таким чином, із урахуванням оцінки (13) оцінка (16) виконується для всіх k таких, що $|k|>\left(\sqrt{c_4}T\right)^{2n}$.

Аналогічно з урахуванням оцінки (13) та нерівності $\cos x\le\frac{\sin x}{x}$, $0<x\le\pi$, поклавши $\beta=\eta_q(T-t)$ у формулі (15), отримаємо, що для всіх k таких, що $|k|>\left(\sqrt{c_4}T\right)^{2n}$, справджується оцінка

$$\max_{0\le t\le T}\left|e^{\eta_q(T-t)}+e^{-\eta_q(T-t)}\right|\le c_8. \qquad (17)$$

Розвинувши у ряд Маклорена функції $e^{\pm\eta_q T}$, отримуємо оцінку

$$e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}=1+\frac{1}{2!}(\eta_q T)^2+\frac{1}{4!}(\eta_q T)^4+\ldots+\frac{1}{(2n)!}(\eta_q T)^{2n}+\ldots\ge$$

$$\ge 1-\frac{1}{2}\left|(\eta_q T)^2+(\eta_q T)^4+\ldots\right|\ge 1-\frac{1}{2}\left(\left|\eta_q T\right|^2+\left|\eta_q T\right|^4+\ldots\right).$$

Згідно з оцінкою (13) для всіх k, $|k|>\left(\sqrt{c_4}T\right)^{2n}$, маємо, що $\left|\eta_q T\right|<1$, тому за формулою для суми нескінченної спадної геометричної прогресії отримаємо

$$\left|\eta_q T\right|^2+\left|\eta_q T\right|^4+\left|\eta_q T\right|^6+\ldots=\frac{\left|\eta_q T\right|^2}{1-\left|\eta_q T\right|^2}.$$

З наведених вище міркувань отримуємо, що для всіх k, $|k|>\left(\sqrt{c_4}T\right)^{2n}$, виконується оцінка

$$\left|e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}\right|\ge\left|1-\frac{1}{2}\frac{\left|\eta_q T\right|^2}{1-\left|\eta_q T\right|^2}\right|=c_9. \qquad (18)$$

З оцінок (16)–(18) випливає доведення леми для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. ♦

Лема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) коефіцієнтів рівняння* (1) *оцінки*

$$\left|\eta_q(k)\right|\ge c_{10}(1+|k|)^{-\alpha_1},\qquad q\in\{1,\ldots,n\}, \qquad (19)$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_1>\frac{p}{2}+\beta\frac{n-1}{2}$, *де* $\beta=\begin{cases}\omega-2\ell, & \omega\ge 2\ell,\\ \dfrac{\omega-2\ell}{n}, & \omega<2\ell.\end{cases}$

Д о в е д е н н я леми здійснюється за схемою доведення леми 1 з [13]. ♦

Лема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) коефіцієнтів рівняння* (1) *оцінки*

$$\left| \prod_{s=1, s\neq q}^{n} \left(\eta_s^2 - \eta_q^2\right) \right| \geq c_{11}(1+|k|)^{-\alpha_2}, \quad q \in \{1,\dots,n\}, \tag{20}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_2 > (n-1)(p+\beta n - \omega + 2\ell)$, *де* $\beta = \begin{cases} \omega - 2\ell, & \omega \geq 2\ell, \\ \dfrac{\omega - 2\ell}{n}, & \omega < 2\ell. \end{cases}$

Доведення леми здійснюється за схемою доведення леми 2 з [13]. ♦

Лема 4. Якщо $\omega > 2\ell$, то для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел T та для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) коефіцієнтів рівняння (1) оцінки

$$\left| e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T} \right| \geq c_{12}(1+|k|)^{-\alpha_3} e^{\operatorname{Re}\eta_q T}, \qquad q \in \{1,\dots,n\},$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_3 > 3p/2 + \beta(n-1)/2$, *де* $\beta = \omega - 2\ell$.

Доведення леми здійснюється за схемою доведення леми 3 з [13] з урахуванням того, що

$$\left| e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T} \right| = e^{\operatorname{Re}\eta_q T} \left| 1 + e^{-2\eta_q T} \right|, \quad q \in \{1,\dots,n\}.$$

Легко бачити, що

$$\max_{0\leq t\leq T} \left| e^{\eta_q t} - e^{-\eta_q t} \right| \leq 2e^{\operatorname{Re}\eta_q T}, \quad \max_{0\leq t\leq T} \left| e^{\eta_q (T-t)} + e^{-\eta_q (T-t)} \right| \leq 2e^{\operatorname{Re}\eta_q T},$$

$$q \in \{1,\dots,n\}.$$ ♦

З цих оцінок і леми 4 випливає наступне твердження.

Лема 5. *Якщо* $\omega > 2\ell$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) коефіцієнтів рівняння* (1) *оцінки*

$$\max_{0\leq t\leq T} \frac{\left| e^{\eta_q t} - e^{-\eta_q t} \right|}{\left| e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T} \right|} \leq 2\frac{1}{c_{12}}(1+|k|)^{\alpha_3}, \quad q \in \{1,\dots,n\}, \tag{21}$$

$$\max_{0\leq t\leq T} \frac{\left| e^{\eta_q (T-t)} + e^{-\eta_q (T-t)} \right|}{\left| e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T} \right|} \leq 2\frac{1}{c_{12}}(1+|k|)^{\alpha_3}, \quad q \in \{1,\dots,n\}, \tag{22}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_3 > 3p/2 + \beta(n-1)/2$, *де* $\beta = \omega - 2\ell$.

Теорема 3. *Нехай справджуються умови* (9). *Якщо* $2\ell > \omega$, $\varphi_s \in H_{\chi+q}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{\chi+\beta/2+\alpha_1+q}(\Omega^p)$, $s \in \{1,\dots,n\}$, $\chi = \beta(n-1) + \alpha_2$, $\alpha_1 > p/2 + \beta(n-1)/2$, $\alpha_2 > (n-1)(p+\beta n - \omega + 2\ell)$, $\beta = (\omega - 2\ell)/n$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) коефіцієнтів рівняння* (1) *у просторі* $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* $\varphi_s(x)$, $s \in \{1,\dots,2n\}$.

Доведення. З леми 1 випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджуються такі оцінки:

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\left(e^{\eta_q t}-e^{-\eta_q t}\right)\right|\left|e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}\right|^{-1}\le c_5\left|\eta_q\right|^{2j+1}, \quad j\in\{0,\dots,n\},$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^{2j-1}}{dt^{2j-1}}\left(e^{\eta_q t}-e^{-\eta_q t}\right)\right|\left|e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}\right|^{-1}\le c_6\left|\eta_q\right|^{2j-1}, \quad j\in\{0,\dots,n\},$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\left(e^{\eta_q (T-t)}+e^{-\eta_q (T-t)}\right)\right|\left|e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}\right|^{-1}\le c_6\left|\eta_q\right|^{2j},$$

$$j\in\{0,\dots,n\},$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^{2j-1}}{dt^{2j-1}}\left(e^{\eta_q (T-t)}+e^{-\eta_q (T-t)}\right)\right|\left|e^{\eta_q T}+e^{-\eta_q T}\right|^{-1}\le c_5\left|\eta_q\right|^{2j},$$

$$j\in\{0,\dots,n\}.$$

На підставі формули (10), наведених вище оцінок, а також оцінок (19) і (20) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ отримуємо

$$\max_{0\le t\le T}\left|u_k^{(r)}(t)\right|\le c_{13}\Bigg(\left|\eta_q\right|^{2n-2+r}(1+|k|)^{\alpha_2}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|+$$

$$+c_{10}^{-1}\left|\eta_q\right|^{2n-1+r}(1+|k|)^{\alpha_1+\alpha_2}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\Bigg), \quad r\in\{0,2,\dots,2n\},$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|u_k^{(r)}(t)\right|\le c_{13}\Bigg(\left|\eta_q\right|^{2n-1+r}(1+|k|)^{\alpha_2}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|+$$

$$+c_{10}^{-1}\left|\eta_q\right|^{2n-2+r}(1+|k|)^{\alpha_1+\alpha_2}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\Bigg),$$

$$r\in\{1,3,\dots,2n-1\}. \tag{23}$$

Оцінимо норму розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$ на підставі формули (10), оцінок (8), (23) і нерівності Коші − Буняковського:

$$\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\right\|:=\sum_{r=0}^{2n}\max_{0\le t\le T}\sqrt{\sum_{|k|>0}(1+|k|^2)^{q-r}\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2}\le$$

$$\le\sqrt{2}(2n+1)c_{14}\left(\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+|k|^2)^{\beta(n-1)+\alpha_2+q}\left|\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|\right|^2}+\right.$$

$$\left.+c_{10}^{-1}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+|k|^2)^{\beta(n-1)+\beta/2+\alpha_1+\alpha_2+q}\left|\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\right|^2}\right)\le$$

$$\le\sqrt{2}(2n+1)c_{14}\left(\sqrt{n\sum_{|k|\ge 0}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|^2(1+|k|^2)^{\beta(n-1)+\alpha_2+q}}+\right.$$

$$\left.+c_{10}^{-1}\sqrt{n\sum_{|k|\ge 0}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|^2(1+|k|^2)^{\beta(n-1)+\beta/2+\alpha_1+\alpha_2+q}}\right)\le$$

$$\le c_{15}\left(\sum_{s=1}^{n}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}|\varphi_{sk}|^2(1+|k|^2)^{\beta(n-1)+\alpha_2+q}}+\right.$$

$$+\sum_{s=n+1}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_{sk}|^2\,(1+|k|^2)^{\beta(n-1)+\beta/2+\alpha_1+\alpha_2+q}}\Bigg)=$$

$$=c_{15}\left(\sum_{s=1}^{n}\left\|\varphi_s;H_{\beta(n-1)+\alpha_2+q}(\Omega^p)\right\|+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=n+1}^{2n}\left\|\varphi_s;H_{\beta(n-1)+\beta/2+\alpha_1+\alpha_2+q}(\Omega^p)\right\|\right). \tag{24}$$

З нерівності (24) та лем 2 і 3 випливає доведення теореми для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) коефіцієнтів рівняння (1). ♦

Теорема 4. *Нехай справджуються умови* (9). *Якщо* $\omega > 2\ell$, $\varphi_s \in H_{\chi+q}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{\chi+\alpha_1+q}(\Omega^p)$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\chi = \beta(n-1)+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1 > p/2+\beta(n-1)/2$, $\alpha_2 > (n-1)(p+\beta n-\omega+2\ell)$, $\alpha_3 > 3p/2+\beta(n-1)/2$, $\beta = \omega-2\ell$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *та для майже всіх* (*стосовно міри Лебеґа*) *коефіцієнтів рівняння* (1) *в просторі* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2). *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* $\varphi_s(x)$, $s \in \{1,\ldots,2n\}$.

Д о в е д е н н я теореми здійснюється за схемою доведення теореми 3 з урахуванням оцінок (21) і (22) замість оцінок (11) і (12) леми 1.

Зауваження. Результати роботи можна перенести на задачу у такій постановці: в області $\Theta_T^p = \{(t,x)\in\mathbb{R}^{p+1} : 0<t<T,\ x\in\mathbb{R}^p\}$ для рівняння (1) знайти майже періодичний за $x_1,\ldots,x_p$ із заданим спектром $\mathcal{M}$ розв'язок, який за змінною t задовольняє умови (2), де

$$\mathcal{M} := \{\mu_k\in\mathbb{R}^p : \mu_{k_j}=\eta_{k_j},\ \ \eta_{k_j}\in\mathcal{N},\ \ j=1,\ldots,p,\ \ k\in\mathbb{Z}^p\},$$

$$\mathcal{N} := \{\eta_k\in\mathbb{R} : \eta_{-n}=-\eta_n,\ \ \eta_0=0,\ \ d_1|n|^\sigma \leq |\eta_n| \leq d_2|n|^\sigma,$$

$$d_2\geq d_1>0,\ \ \sigma>0,\ \ n\in\mathbb{Z}\},$$

а функції $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,2n$, є майже періодичними за просторовими координатами функціями зі спектром $\mathcal{M}$.

5. Висновки. В обмеженій циліндричній області досліджено задачу з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами для рівнянь із частинними похідними високого порядку, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Побудовано розв'язок розглянутої задачі у вигляді ряду за системою ортогональних функцій. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі у просторі формальних тригонометричних рядів та у шкалі просторів Соболєва. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід. Отримані результати доповнюють дослідження, проведені у працях [1, 2, 13].

Робота виконана за часткової підтримки держбюджетної теми Міністерства освіти і науки України № 0123U101691.

1. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.
Те саме: *Bilusyak N. I., Komarnyts'ka L. I., Ptashnyk B. I.* Dirichlet-type problems for systems of partial differential equations unresolved with respect to the highest time derivative // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, No. 12. – P. 1930–1942. – https://doi.org/10.1023/A:1024065029561.

2. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для рівнянь зі змінними коефіцієнтами, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 2. – С. 42–52.
Те саме: *Bilusyak N. I., Ptashnyk B. Yo.* Boundary-value problem for equations with variable coefficients unsolvable with respect to the higher time derivative // J. Math. Sci. – 2009. – **162**, No. 1. – P. 44–58.
– https://doi.org/10.1007/s10958-009-9619-4.
3. *Бойчук О. А., Чуйко С. М., Кузьміна В. О.* Нелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі з відхиленням аргументу, не розв'язані щодо похідної // Укр. мат. журн. – 2022. – **74**, № 9. – С. 1170–1181.
– https://doi.org/10.37863/umzh.v74i9.6707.
Те саме: *Boichuk O. A., Chuiko S. M., Kuzmina V. O.* Nonlinear integrodifferential boundary-value problems with deviating argument unsolved with respect to the derivative // Ukr. Math. J. – 2023. – **74**, No. 9. – P. 1334–1347.
– https://doi.org/10.1007/s11253-023-02139-0.
4. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 3. – С. 370–381.
Те саме: *Vlasii O. D., Ptashnyk B. I.* Nonlocal boundary-value problem for linear partial differential equations unsolved with respect to the higher time derivative // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, No. 3. – P. 409–422.
– https://doi.org/10.1007/s11253-007-0026-z.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
Те саме: *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. – xi+347 p.
6. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1604–1613.
Те саме: *Klyus I. S., Ptashnyk B. I.* A multipoint problem for partial differential equations unresolved with respect to the higher time derivative // Ukr. Math. J. – 1999. – **59**, No. 12. – P. 1813–1823. – https://doi.org/10.1007/BF02525139.
7. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197–1208.
Те саме: *Komarnitskaya L. I., Ptashnik B. I.* Boundary-value problems for differential equations unsolvable with respect to the higher time derivative // Ukr. Math. J. – 1995. – **47**, No. 9. – P. 1364–1377.
– https://doi.org/10.1007/BF01057511.
8. *Креневич А. П.* Про існування і єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь в гільбертовому просторі не розв'язаних відносно «похідної» // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Сер. Матем. – 2007. – Вип. 349. – С. 46–49.
– https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/582.
9. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. Михайлець В. А. – 2014. – **11,** № 2. – С. 200–224.
– http://nbuv.gov.ua/UJRN/Zpim_2014_11_2_12.
10. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
11. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
12. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле – Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 3. – С. 15–28.
Те саме: *Ptashnyk B. Yo., Repetylo S. M.* Dirichlet – Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, No. 4. – P. 501–517.
– https://doi.org/10.1007/s10958-015-2263-2.
13. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійних безтипних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 2016.– **68**, № 5. – С. 665–682.

Те саме: *Ptashnyk B. I., Repetylo S. M.* Boundary-value problem with mixed conditions for typeless linear partial differential equations // Ukr. Math. J. – 2016. – **68**, No. 5. – P. 756–776. – https://doi.org/10.1007/s11253-016-1256-8.

14. *Самойленко А. М., Чуйко С. М., Нєсмєлова О. В.* Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної // Укр. мат. журн. – 2020. – **72**, № 8. – С. 1106–1118.

    Те саме: *Samoilenko A. M., Chuiko S. M., Nesmelova O. V.* Nonlinear boundary-value problems unsolved with respect to the derivative // Ukr. Math. J. – 2021. – **72**, No. 8. – P. 1280–1293. – https://doi.org/10.1007/s11253-020-01852-4.

15. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384–393.

    Те саме: *Slyusarchuk V. Yu.* Conditions for almost periodicity of bounded solutions of nonlinear differential equations unsolved with respect to the derivative // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 3. – P. 432–442.
    – https://doi.org/10.1007/s11253-014-0941-8.

16. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – Москва: Наука, 1972. – 304 с.
17. *Aray C. A., Vanegas C. J.* A mixed problem with a Dirichlet – Neumann boundary condition in the first quadrant for the Poisson equation // AIP Conf. Proc. – 2024. – **2994**, No. 1. – Art. 020013. – https://doi.org/10.1063/5.0188127.
18. *Carmona J., Colorado E., Leonori T., Ortega A.* Regularity of solutions to a fractional elliptic problem with mixed Dirichlet – Neumann boundary data // Adv. Calc. Var. – 2021. – **14,** No. 4. – P. 521–539. – https://doi.org/10.1515/acv-2019-0029.
19. *Fu X., Xiao J., Xiong Q.* Dirichlet or Neumann problem for weighted 1-Laplace equation with application to image denoising // J. Geom. Anal. – 2024. – **34**. – Art. No. 32. – https://doi.org/10.1007/s12220-023-01483-8.
20. *Karimov K. T.* On one version of the Dirichlet – Neumann problem for a three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients // Uzb. Math. J. – 2018. – № 3. – P. 102–115. – https://doi.org/10.29229/uzmj.2018-3-10.
21. *Mukherjee T., Sharma L.* On nonlocal problems with mixed operators and Dirichlet–Neumann mixed boundary conditions. – arXiv: 2311.02567v1. – 2023. – 17 p. – https://arxiv.org/pdf/2311.02567.
22. *Pukach P. Ya., Repetylo S. M., Symotiuk M. M., Vovk M. I.* Dirichlet – Neumann problem for the partial differential equations with deviation over the space argument // Карпат. мат. публікації. – 2021. – **13**, No. 2. – P. 315–325.
    – https://doi.org/10.15330/cmp.13.2.315-325.
23. *Taghizadeh N., Mohammadi V. S.* Dirichlet and Neumann problems for Poisson equation in half lens // J. Contemp. Math. Anal. (Armen. Acad. Sci). – 2017. – **52,** No. 2. – P. 61–69. – https://doi.org/10.3103/S1068362317020017.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS UNSOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER TIME DERIVATIVE. I

The conditions for the unique solvability in the bounded cylindrical domain of the problem with Dirichlet – Neumann conditions with respect to time variable and the conditions of periodicity with respect to spatial coordinates for the partial differential equations of high order unsolved with respect to the highest time derivative are established. The solution of the considered problem is constructed in the form of series by the system of orthogonal functions. A metric approach is used for estimations from below of small denominators that appear in the construction of solution of the problem.

Key words: *partial differential equations unsolved with respect to the derivative, Dirichlet – Neumann conditions, unique solvability, small denominator, Lebesgue measure.*

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
22.08.23