

**АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ**

Запропоновано аналітично-числову методичку визначення одновимірних нестационарних температурних полів у багатошарових термочутливих плитах за врахування теплового випромінювання. При цьому не накладено обмежень на характер температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей. Методика передбачає використання перетворення Кірхгофа, функції Гріна, узагальнених функцій, лінійних сплайнів і оберненого перетворення Кірхгофа, яке ґрунтується на ітераційній формулі Ньютона для розв'язання алгебричних рівнянь. Досліджено температурні поля, які знайдено з урахуванням і без урахування теплового випромінювання, у дво- та чотиришарових термочутливих плитах за нагрівання тепловими потоками сталої та імпульсної інтенсивності. Для двошарової плити виконано порівняння з результатами, отриманими з використанням точної формули оберненого перетворення Кірхгофа та за іншою методикою, запропонованою раніше.

**Ключові слова:** шарувата термочутлива плита, теплове випромінювання, нелінійна нестационарна задача теплопровідності, перетворення Кірхгофа, функція Гріна, узагальнені функції, лінійні сплайни, ітераційний метод Ньютона.

Нелінійним задачам теплопровідності із залежними від температури теплофізичними характеристиками присвячено численні публікації. Для розв'язання таких задач розроблено низку аналітично-числових методик, у яких використовують перетворення Кірхгофа. Розглянуто задачі з поліноміальними [2–8, 13, 14 та ін.], експоненціальними [22] і степеневими [16, 20] температурними залежностями коефіцієнтів теплопровідності. У цих працях перехід від змінних Кірхгофа до шуканих температур здійснено за точними формулами, якими, зокрема, для поліноміальних залежностей визначаються відповідні корені квадратних і кубічних рівнянь або рівнянь четвертого степеня.

Методи розв'язання задач з температурними залежностями коефіцієнтів теплопровідності, характер яких відрізняється від зазначених вище, запропоновано у [12, 15, 18].

Задачі з температурними залежностями коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей, для яких їхнє відношення (коефіцієнт теплопровідності) не є сталим, розглянуто переважно для одношарових тіл [1, 8, 9, 11, 17 та ін.].

У [10, 19] нестационарні задачі теплопровідності для шаруватих тіл за лінійних температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності і довільних залежностей об'ємних теплоємностей зведено до розв'язання рекурентних систем нелінійних алгебричних рівнянь відносно значень у фіксовані моменти часу змінної Кірхгофа на поверхнях поділу шарів і її похідної за часом на внутрішніх поверхнях.

У цій роботі нестационарну задачу теплопровідності для шаруватої плити з довільними залежностями від температури теплофізичних характеристик, яка нагрівається тепловим потоком, враховуючи також теплове випромінювання, зводимо до визначення з рекурентних лінійних співвідношень змінної Кірхгофа у фіксовані моменти часу на відповідних поверхнях.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо плиту, складену з  $n$  ідеально контактуючих шарів, кожен з яких має початкову температуру  $\tilde{t}_{p0}(\tilde{z})$

<sup>✉</sup> dept19@iapmm.lviv.ua

$\tilde{z}_{p-1} < \tilde{z} < \tilde{z}_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ ,  $\tilde{z}_0 = 0$ . Обмежувальна поверхня  $\tilde{z} = 0$  перебуває під дією теплового потоку зі змінною у часі густиною  $\tilde{q}_0 \tilde{q}(\tau)$  і одночасно з цієї поверхні відводиться тепловий потік власного випромінювання за законом Стефана – Больцмана, а поверхня  $\tilde{z} = \tilde{z}_n$  підтримується при температурі  $\tilde{t}_c(\tau)$ . Визначимо одновимірне нестационарне температурне поле плити за температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів  $\lambda_{tp}(t_p) = \lambda_t^{(p)} \Lambda_p(t_p)$  і їхніх об'ємних теплоємностей  $c_{Vp}(t_p) = c_V^{(p)} C_p(t_p)$ . Тут  $\Lambda_p(t_p)$  і  $C_p(t_p)$  – неперервні функції, множники біля функцій у цих поданнях мають розмірності відповідних величин.

За таких припущень нелінійна задача теплопровідності у безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\bar{\lambda}_t^{(p)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \bar{\Lambda}_p(\bar{t}_p) \frac{\partial \bar{t}_p}{\partial z} \right] = \bar{c}_V^{(p)} \bar{C}_p(\bar{t}_p) \frac{\partial \bar{t}_p}{\partial \text{Fo}}, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$$\bar{\lambda}_t^{(i+1)} \bar{\Lambda}_{i+1}(\bar{t}_{i+1}) \frac{\partial \bar{t}_{i+1}}{\partial z} = \bar{\lambda}_t^{(i)} \bar{\Lambda}_i(\bar{t}_i) \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial z},$$

$$\bar{t}_{i+1} = \bar{t}_i, \quad z = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\bar{\lambda}_t^{(1)} \left( \bar{\Lambda}_1(\bar{t}_1) \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -\text{Ki} \bar{q}(\text{Fo}) + \text{Sk} \varphi(\text{Fo}), \quad \bar{t}_n(z_n, \text{Fo}) = \bar{t}_c(\text{Fo}), \quad (3)$$

$$\bar{t}_p(z, 0) = \bar{t}_{p0}(z), \quad (4)$$

$$\text{де } \bar{t}_p(z, \text{Fo}) = \frac{t_p(\tilde{z}, \tau)}{t_s}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{\ell}, \quad z_p = \frac{\tilde{z}_p}{\ell}, \quad \text{Fo} = \frac{\lambda_t^* \tau}{c_V^* \ell^2}, \quad \text{Ki} = \frac{\ell \tilde{q}_0}{\lambda_t^* t_s}, \quad \text{Sk} = \frac{\ell \varepsilon^* \sigma_0}{\lambda_t^*} t_s^3,$$

$$\bar{\lambda}_t^{(p)} = \frac{\lambda_t^{(p)}}{\lambda_t^*}, \quad \bar{c}_V^{(p)} = \frac{c_V^{(p)}}{c_V^*}, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad \varphi(\text{Fo}) = [\bar{t}_1(0, \text{Fo}) + T_*]^4, \quad T_* = \frac{273}{t_s},$$

$[\bar{\Lambda}_p(\bar{t}_p), \bar{C}_p(\bar{t}_p), \bar{t}_{p0}(z), \bar{t}_c(\text{Fo}), \bar{q}(\text{Fo})] = [\Lambda_p(t_p), C_p(t_p), \tilde{t}_{p0}(\tilde{z}), \tilde{t}_c(\tau), \tilde{q}(\tau)]$ ,  $t_s$  – характерна для задачі температура;  $\ell$ ,  $\lambda_t^*$  і  $c_V^*$  – параметри, що мають розмірності одиниці довжини, коефіцієнта теплопровідності і об'ємної теплоємності;  $\sigma_0$  – стала Стефана – Больцмана;  $\varepsilon^*$  – ступінь чорноти матеріалу.

**2. Побудова розв'язку задачі.** Застосовуючи перетворення Кірхгофа

$$\theta_p(z, \text{Fo}) = \Psi_p(\bar{t}_p(z, \text{Fo})), \quad \text{де } \Psi_p(x) = \int_0^x \bar{\Lambda}_p(\zeta) d\zeta,$$

задачу (1)–(4) зводимо до такої:

$$\bar{\lambda}_t^{(p)} \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial z^2} = \bar{c}_V^{(p)} \frac{\partial \theta_p}{\partial \text{Fo}} - \bar{c}_V^{(p)} w_{tp}(z, \text{Fo}), \quad (5)$$

$$\bar{\lambda}_t^{(i+1)} \frac{\partial \theta_{i+1}}{\partial z} = \bar{\lambda}_t^{(i)} \frac{\partial \theta_i}{\partial z}, \quad \theta_{i+1} - \theta_i = F_{i+1}(\text{Fo}), \quad z = z_i, \quad (6)$$

$$\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\text{Ki} \bar{q}(\text{Fo}) + \text{Sk} \varphi(\text{Fo}), \quad \theta_n(z_n, \text{Fo}) = \theta_c(\text{Fo}), \quad (7)$$

$$\theta_p(z, 0) = \theta_{p0}^*(z), \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

де

$$w_{tp}(z, \text{Fo}) = \left[ 1 - \frac{1}{\bar{a}_p(\bar{t}_p(z, \text{Fo}))} \right] \frac{\partial \theta_p(z, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}},$$

$$\bar{a}_p(\bar{t}_p(z, \text{Fo})) = \frac{\bar{\Lambda}_p(\bar{t}_p(z, \text{Fo}))}{\bar{C}_p(\bar{t}_p(z, \text{Fo}))},$$

$$\theta_{p0}^*(z) = \Psi_p(\bar{t}_{p0}(z)), \quad \theta_c(\text{Fo}) = \Psi_n(\bar{t}_c(\text{Fo})),$$

$$F_{i+1}(\text{Fo}) = \Psi_{i+1}(\bar{t}_{i+1}(z_i, \text{Fo})) - \Psi_i(\bar{t}_{i+1}(z_i, \text{Fo})).$$

За відомими змінними Кірхгофа  $\theta_p(z, \text{Fo})$  температури  $\bar{t}_p(z, \text{Fo})$  у фіксованих  $z$  і  $\text{Fo}$  визначаємо з рівнянь

$$\Psi_p^*(\bar{t}_p) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

за ітераційною формулою Ньютона, яка для  $(m+1)$ -го наближення матиме вигляд

$$\bar{t}_p^{(m+1)}(z, \text{Fo}) = \bar{t}_p^{(m)}(z, \text{Fo}) - \frac{\Psi_p^*(\bar{t}_p^{(m)}(z, \text{Fo}))}{\bar{\Lambda}_p(\bar{t}_p^{(m)}(z, \text{Fo}))},$$

де  $\Psi_p^*(\bar{t}_p(z, \text{Fo})) = \Psi_p(\bar{t}_p(z, \text{Fo})) - \theta_p(z, \text{Fo})$ .

Надалі будемо розглядати одне рівняння з узагальненими похідними за координатою  $z$ , еквівалентне системі рівнянь (5) і умовам контакту (6):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \bar{\lambda}_t(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \bar{c}_V(z) \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} - w_t(z, \text{Fo}) \right] + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\lambda}_t^{(i+1)} F_{i+1}(\text{Fo}) \delta'(z - z_i), \quad (10)$$

де  $\delta'(x)$  – похідна від дельта-функції Дірака, а функції  $\theta(z, \text{Fo})$ ,  $\bar{\lambda}_t(z)$ ,  $\bar{c}_V(z)$  і  $w_t(z, \text{Fo})$  при  $z_{p-1} < z < z_p$  співпадають відповідно з  $\theta_p(z, \text{Fo})$ ,  $\bar{\lambda}_t^{(p)}$ ,  $\bar{c}_V^{(p)}$  і  $w_{tp}(z, \text{Fo})$ .

Для розв'язання задачі (10), (7), (8) використаємо функцію Гріна

$$G(z, \zeta, \text{Fo}) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(z, \mu_m) \Phi(\zeta, \mu_m)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}} \quad (11)$$

та суму ряду [19]

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(z, \mu_m) \Phi(\zeta, \mu_m)}{\mu_m^2 N(\mu_m)} = g_1(z, \zeta).$$

Тут

$$\Phi(z, \mu) = \Phi_1(z, \mu) + \sum_{j=1}^{n-1} [\Phi_{j+1}(z, \mu) - \Phi_j(z, \mu)] S(z - z_j),$$

$$\Phi_1(z, \mu) = \cos \varepsilon_1 z, \quad \Phi_1'(z, \mu) = -\varepsilon_1 \sin \varepsilon_1 z,$$

$$\begin{aligned} \Phi_p(z, \mu) &= \Phi_{p-1}(z_{p-1}, \mu) \cos \varepsilon_p (z - z_{p-1}) + \\ &+ K_{\lambda p} \varepsilon_p^{-1} \Phi_{p-1}'(z_{p-1}, \mu) \sin \varepsilon_p (z - z_{p-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_p'(z, \mu) &= -\varepsilon_p \Phi_{p-1}(z_{p-1}, \mu) \sin \varepsilon_p (z - z_{p-1}) + \\ &+ K_{\lambda p} \Phi_{p-1}'(z_{p-1}, \mu) \cos \varepsilon_p (z - z_{p-1}), \quad p = 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

$$N(\mu) = \bar{c}_V^{(1)} z_1 + \sum_{p=2}^n \bar{c}_V^{(p)} (z_p - z_{p-1}) \left\{ \Phi_{p-1}^2(z_{p-1}, \mu) + K_{\lambda p}^2 \varepsilon_p^{-2} [\Phi'_{p-1}(z_{p-1}, \mu)]^2 \right\},$$

$$g_1(z, \zeta) = f_0(z_n) - f_0(\zeta) + [f_0(\zeta) - f_0(z)] S(z - \zeta),$$

$$f_0(z) = \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} z + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(j+1)}} - \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(j)}} \right) (z - z_j) S(z - z_j),$$

$S(x)$  – функція Гевісайда;  $\varepsilon_p = \mu \sqrt{\bar{c}_V^{(p)} / \bar{\lambda}_t^{(p)}}$ ,  $K_{\lambda p} = \bar{\lambda}_t^{(p-1)} / \bar{\lambda}_t^{(p)}$ ;  $\mu_m$  – корені рівняння  $\Phi_n(z_n, \mu) = 0$ .

Зауважимо, що функція Гріна  $G(z, \zeta, F_0)$  задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \bar{\lambda}_t(z) \frac{\partial G}{\partial z} \right] = \bar{c}_V(z) \frac{\partial G}{\partial F_0} \quad (12)$$

і граничні та початкову умови

$$\left( \bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial G}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad G \Big|_{z=z_n} = 0, \quad G \Big|_{F_0=0} = \frac{1}{\bar{c}_V(\zeta)} \delta(z - \zeta). \quad (13)$$

Веручи до уваги (11)–(13), для змінної Кірхгофа  $\theta(z, F_0)$  отримаємо таке інтегральне подання:

$$\theta(z, F_0) = \theta_L(z, F_0) + \theta_w(z, F_0) + \theta_F(z, F_0) - \text{Sk } \theta_\varphi(z, F_0). \quad (14)$$

Тут

$$\begin{aligned} \theta_L(z, F_0) = & \sum_{i=1}^n \bar{c}_V^{(i)} \int_{z_{i-1}}^{z_i} G_i(z, \zeta, F_0) \theta_{0i}^*(\zeta) d\zeta + \\ & + \text{Ki} \int_0^{F_0} G_1(z, 0, F_0 - \xi) \bar{q}(\xi) d\xi - \\ & - \bar{\lambda}_t^{(n)} \int_0^{F_0} \frac{\partial G_n(z, \zeta, F_0 - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_n} \theta_c(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\theta_w(z, F_0) = \int_0^{F_0} \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \bar{c}_V^{(i)} G_i(z, \zeta, F_0 - \xi) w_{ti}(\zeta, \xi) d\zeta d\xi, \quad (16)$$

$$\theta_F(z, F_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\lambda}_t^{(i+1)} \int_0^{F_0} \frac{\partial G_{i+1}(z, \zeta, F_0 - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_i} F_{i+1}(\xi) d\xi, \quad (17)$$

$$\theta_\varphi(z, F_0) = \int_0^{F_0} G_1(z, 0, F_0 - \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (18)$$

$$G_i(z, \zeta, F_0) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(z, \mu_m) \Phi_i(\zeta, \mu_m)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 F_0}. \quad (19)$$

Знайдемо розподіли функцій  $\theta_w(z, F_0)$ ,  $\theta_F(z, F_0)$  і  $\theta_\varphi(z, F_0)$ , які входять у подання (14), у фіксовані моменти часу.

Для визначення функцій  $\theta_w(z, F_0_q)$  у співвідношенні (16) при  $F_0 = F_0_q$  інтеграл за часом подамо у вигляді суми інтегралів на проміжках  $[0, F_0_{q-1}]$

і  $[F_{o_{q-1}}, F_{o_q}]$ , а інтеграли за координатою – як суму інтегралів на проміжках  $[z_{j-1}^i, z_j^i]$ ,  $j = 1, 2, \dots, J_i$ ,  $z_{i-1} = z_0^i < z_1^i < \dots < z_{J_i}^i = z_i$ . Замінивши  $w_{ti}(\zeta, \xi)$  на  $w_{ij}(\xi)$ , де  $w_{ij}(\xi) \approx w_{ti}(z_{ij}, \xi)$ ,  $z_{ij} = (z_{j-1}^i + z_j^i)/2$ , одержимо

$$\begin{aligned} \theta_w(z, F_{o_q}) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{J_i} \left[ \int_0^{F_{o_{q-1}}} w_{ij}(\xi) H_{0ij}(z, F_{o_q} - \xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{F_{o_{q-1}}}^{F_{o_q}} w_{ij}(\xi) H_{0ij}(z, F_{o_q} - \xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут  $H_{0ij}(z, \eta)$  є сумами рядів

$$\begin{aligned} H_{\gamma ij}(z, \eta) = & 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(z, \mu_m) \Phi_{ij}(\mu_m)}{\mu_m^{2\gamma} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \eta} \quad \text{при } \gamma = 0, \\ \Phi_{ij}(\mu) = & \int_{z_{j-1}^i}^{z_j^i} \Phi_i(\zeta, \mu) d\zeta = \frac{\Phi'_i(z_{j-1}^i, \mu) - \Phi'_i(z_j^i, \mu)}{\varepsilon_i^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

У першому інтегралі в рівності (20) підінтегральну функцію  $w_{ij}(\xi)$  на проміжку інтегрування  $[0, F_{o_{q-1}}]$  апроксимуємо лінійним сплайном, вважаючи відомими значення  $w_{ij}(F_{o_k})$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , а в другому інтегралі, на проміжку  $[F_{o_{q-1}}, F_{o_q}]$ , приймаємо, що  $w_{ij}(\xi) = w_{ij}(F_{o_{q-1}})$ .

У співвідношеннях, отриманих із (17) і (18),

$$\begin{aligned} \theta_F(z, F_{o_q}) = & \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\lambda}_t^{(i+1)} \left[ \int_0^{F_{o_{q-1}}} \frac{\partial G_{i+1}(z, \zeta, F_{o_q} - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_i} F_{i+1}(\xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{F_{o_{q-1}}}^{F_{o_q}} \frac{\partial G_{i+1}(z, \zeta, F_{o_q} - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_i} F_{i+1}(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \theta_\varphi(z, F_{o_q}) = & \int_0^{F_{o_{q-1}}} G_1(z, 0, F_{o_q} - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \\ & + \int_{F_{o_{q-1}}}^{F_{o_q}} G_1(z, 0, F_{o_q} - \xi) \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (23)$$

виконаємо аналогічні перетворення: в перших інтегралах функції  $F_{i+1}(\xi)$  і  $\varphi(\xi)$  апроксимуємо на проміжку  $[0, F_{o_{q-1}}]$  лінійними сплайнами, а в других інтегралах приймаємо  $F_{i+1}(\xi) = F_{i+1}(F_{o_{q-1}})$  і  $\varphi(\xi) = \varphi(F_{o_{q-1}})$  відповідно. При цьому для апроксимацій сплайнами використовуємо подання

$$\begin{aligned} \chi_{\eta}(\text{Fo}) \approx & s_{\eta,1}^{(1)} \text{Fo} + s_{\eta,1}^{(0)} + \\ & + \sum_{\bar{q}=1}^{K-1} (s_{\eta, \bar{q}+1}^{(1)} \text{Fo} + s_{\eta, \bar{q}+1}^{(0)} - s_{\eta, \bar{q}}^{(1)} \text{Fo} - s_{\eta, \bar{q}}^{(0)}) S(\text{Fo} - F_{o_{\bar{q}}}), \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$s_{\eta, \bar{q}}^{(1)} = \frac{\chi_{\eta, \bar{q}} - \chi_{\eta, \bar{q}-1}}{F_{O_1}}, \quad s_{\eta, \bar{q}}^{(0)} = \frac{\chi_{\eta, \bar{q}-1} F_{O_{\bar{q}}} - \chi_{\eta, \bar{q}} F_{O_{\bar{q}-1}}}{F_{O_1}}, \quad \eta = ij, i+1, 0,$$

$$\chi_{ij, \bar{q}} = w_{ij, \bar{q}} = w_{ij}(F_{O_{\bar{q}}}), \quad \chi_{i+1, \bar{q}} = F_{i+1, \bar{q}} = F_{i+1}(F_{O_{\bar{q}}}), \quad \chi_{0, \bar{q}} = \varphi_{\bar{q}} = \varphi(F_{O_{\bar{q}}}),$$

$F_{O_{\bar{q}}} = \bar{q} F_{O_1}$ ,  $\bar{q} = 0, 1, 2, \dots, K$ ,  $K+1$  – кількість вузлів сплайна;  $F_{O_1} = F_{O_1}|_{\tau=\Delta\tau}$  і  $\Delta\tau$  – відповідно безрозмірний і розмірний крок сітки.

Обчисливши інтеграли у (20), (22) і (23), враховуючи (19) і (24), а також те, що при  $z_{i-1} < \zeta < z_i$  виконується рівність

$$\begin{aligned} g_1(z, \zeta) &= g_{1,i}(z, \zeta) = H_{1,i}(z, \zeta, 0) = \\ &= f_{0,n}(z_n) - f_{0,i}(\zeta) + [f_{0,i}(\zeta) - f_0(z)]S(z - \zeta), \end{aligned}$$

де  $f_{0,i}(\zeta) = \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(i)}} \zeta - \Lambda_i$ ,  $\Lambda_i = \Lambda_{i-1} + \left( \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(i)}} - \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(i-1)}} \right) z_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, n$ ,  $\Lambda_1 = 0$ , одержимо

ЖИМО

$$\theta_w(z, F_{O_1}) = \sum_{i=1}^n \bar{c}_V^{(i)} \sum_{j=1}^{J_i} w_{ij,0} [H_{1ij}(z, 0) - H_{1ij}(z, F_{O_1})],$$

$$\begin{aligned} \theta_w(z, F_{O_q}) &= \sum_{i=1}^n \bar{c}_V^{(i)} \sum_{j=1}^{J_i} \left[ w_{ij,q-1} H_{1ij}(z, 0) + s_{ij,1}^{(1)} H_{2ij}(z, F_{O_q}) - \right. \\ &\quad \left. - s_{ij,q-1}^{(1)} H_{2ij}(z, F_{O_1}) + \sum_{\bar{q}=1}^{q-2} d_{ij, \bar{q}} H_{2ij}(z, F_{O_q} - F_{O_{\bar{q}}}) - \right. \\ &\quad \left. - w_{ij,0} H_{1ij}(z, F_{O_q}) \right], \quad q = 2, 3, \dots, K, \end{aligned}$$

$$\theta_F(z, F_{O_1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\lambda}_t^{(i+1)} F_{i+1,0} \left[ g'_{1,i+1}(z, \zeta) - H'_{1,i+1}(z, \zeta, F_{O_1}) \right] \Big|_{\zeta=z_i},$$

$$\begin{aligned} \theta_F(z, F_{O_q}) &= \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\lambda}_t^{(i+1)} \left[ F_{i+1,q-1} g'_{1,i+1}(z, \zeta) + s_{i+1,1}^{(1)} H'_{2,i+1}(z, \zeta, F_{O_q}) - \right. \\ &\quad \left. - s_{i+1,q-1}^{(1)} H'_{2,i+1}(z, \zeta, F_{O_1}) + \sum_{\bar{q}=1}^{q-2} d_{i+1, \bar{q}} H'_{2,i+1}(z, \zeta, F_{O_q} - F_{O_{\bar{q}}}) - \right. \\ &\quad \left. - F_{i+1,0} H'_{1,i+1}(z, \zeta, F_{O_q}) \right] \Big|_{\zeta=z_i}, \quad q = 2, 3, \dots, K, \end{aligned}$$

$$\theta_\varphi(z, F_{O_1}) = \varphi_0 [g_{1,1}(z, 0) - H_1(z, F_{O_1})],$$

$$\begin{aligned} \theta_\varphi(z, F_{O_q}) &= \varphi_{q-1} g_{1,1}(z, 0) + s_{0,1}^{(1)} H_2(z, F_{O_q}) - s_{0,q-1}^{(1)} H_2(z, F_{O_1}) + \\ &\quad + \sum_{\bar{q}=1}^{q-2} d_{0, \bar{q}} H_2(z, F_{O_q} - F_{O_{\bar{q}}}) - \varphi_0 H_1(z, F_{O_q}), \quad q = 2, 3, \dots, K. \end{aligned}$$

Тут

$$d_{ij, \bar{q}} = \frac{w_{ij, \bar{q}+1} - 2w_{ij, \bar{q}} + w_{ij, \bar{q}-1}}{F_{O_1}},$$

$$\begin{aligned}
d_{i+1,\bar{q}} &= \frac{F_{i+1,\bar{q}+1} - 2F_{i+1,\bar{q}} + F_{i+1,\bar{q}-1}}{F_{O_1}}, \\
d_{0,\bar{q}} &= \frac{\varphi_{\bar{q}+1} - 2\varphi_{\bar{q}} + \varphi_{\bar{q}-1}}{F_{O_1}}, \\
H_{1ij}(z, 0) &= \int_{z_{j-1}^i}^{z_j^i} g_{1,i}(z, \zeta) d\zeta = (z_j^i - z_{j-1}^i) \left[ \Lambda_i + f_0(z_n) - \frac{1}{\lambda_t^{(i)}} z_{ij} \right] - \\
&\quad - \left[ \frac{1}{2\lambda_t^{(i)}} (z + z_j^i) - \Lambda_i - f_0(z) \right] (z - z_j^i) S(z - z_j^i) + \\
&\quad + \left[ \frac{1}{2\lambda_t^{(i)}} (z + z_{j-1}^i) - \Lambda_i - f_0(z) \right] (z - z_{j-1}^i) S(z - z_{j-1}^i), \\
g'_{1,i+1}(z, z_i) &= \frac{1}{\lambda_t^{(i+1)}} [S(z - z_i) - 1], \\
H_{\gamma,i+1}(z, \zeta, F_0) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(z, \mu_m) \Phi_{i+1}(\zeta, \mu_m)}{\mu_m^{2\gamma} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 F_0}, \\
H_{\gamma}(z, F_0) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(z, \mu_m)}{\mu_m^{2\gamma} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 F_0}, \quad \gamma = 0, 1, 2,
\end{aligned}$$

$H_{1ij}(z, \eta)$  і  $H_{2ij}(z, \eta)$  є сумами рядів (21) при відповідних  $\gamma$ ; штрихом позначено похідну за  $\zeta$ .

Значення  $w_{ij,q-1}$ ,  $q = 1, 2, \dots, K$ , обчислюємо за формулами

$$\begin{aligned}
w_{ij,0} &= \left[ \bar{a}_i(\bar{t}_{i0}(z_{ij})) - 1 \right] \theta_{Li}^*(z_{ij}, 0), \\
w_{ij,q-1} &= \left[ \bar{a}_i(\bar{t}_i(z_{ij}, F_{O_{q-1}})) - 1 \right] \left[ \theta_{Li}^*(z_{ij}, F_{O_{q-1}}) + \theta_{wi}^*(z_{ij}, F_{O_{q-1}}) + \right. \\
&\quad \left. + \theta_{Fi}^*(z_{ij}, F_{O_{q-1}}) - \text{Sk} \theta_{\varphi_i}^*(z_{ij}, F_{O_{q-1}}) \right], \quad q = 2, 3, \dots, K,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\theta_L^*(z, F_0) &= \frac{\partial \theta_L(z, F_0)}{\partial F_0}, \\
\theta_w^*(z, F_{O_1}) &= \sum_{p=1}^n \bar{c}_V^{(p)} \sum_{\bar{p}=1}^{J_p} w_{p\bar{p},0} \left[ H_{0p\bar{p}}(z, F_{O_1}) - M_{p\bar{p}}(z) \right], \\
\theta_w^*(z, F_{O_k}) &= - \sum_{p=1}^n \bar{c}_V^{(p)} \sum_{\bar{p}=1}^{J_p} \left[ s_{p\bar{p},1}^{(1)} H_{1p\bar{p}}(z, F_{O_k}) + w_{p\bar{p},q-1} M_{p\bar{p}}(z) - \right. \\
&\quad - s_{p\bar{p},k-1}^{(1)} H_{1p\bar{p}}(z, F_{O_1}) + \sum_{\bar{q}=1}^{k-2} d_{p\bar{p},\bar{q}} H_{1p\bar{p}}(z, F_{O_k} - F_{O_{\bar{q}}}) - \\
&\quad \left. - w_{p\bar{p},0} H_{0p\bar{p}}(z, F_{O_k}) \right], \quad k = 2, 3, \dots, K-1,
\end{aligned}$$

$$\theta_F^*(z, \text{Fo}_1) = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\lambda}_t^{(i+1)} F_{i+1,0} H'_{0,i+1}(z, z_i, \text{Fo}_1),$$

$$\theta_F^*(z, \text{Fo}_k) = - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\lambda}_t^{(i+1)} \left[ s_{i+1,1}^{(1)} H'_{1,i+1}(z, \zeta, \text{Fo}_k) - s_{i+1,k-1}^{(1)} H'_{1,i+1}(z, \zeta, \text{Fo}_1) + \right. \\ \left. + \sum_{\bar{q}=1}^{k-2} d_{i+1,\bar{q}} H'_{1,i+1}(z, \zeta, \text{Fo}_k - \text{Fo}_{\bar{q}}) - F_{i+1,0} H'_{0,i+1}(z, \zeta, \text{Fo}_k) \right] \Big|_{\zeta=z_i}, \quad k = 2, 3, \dots, K-1,$$

$$\theta_\varphi^*(z, \text{Fo}_1) = \varphi_0 G(z, 0, \text{Fo}_1),$$

$$\theta_\varphi^*(z, \text{Fo}_k) = -s_{0,1}^{(1)} H_1(z, \text{Fo}_k) + s_{0,k-1}^{(1)} H_1(z, \text{Fo}_1) - \sum_{\bar{q}=1}^{q-2} d_{0,\bar{q}} H_1(z, \text{Fo}_k - \text{Fo}_{\bar{q}}) + \varphi_0 G(z, 0, \text{Fo}_k),$$

$$k = 2, 3, \dots, K-1,$$

$$M_{p\bar{p}}(z) = \frac{1}{c_V^{(p)}} \left[ S(z_{\bar{p}}^p - z) - S(z_{\bar{p}-1}^p - z) \right].$$

### 3. Приклади числових розрахунків.

**3.1.** Розглянемо *двошарову плиту* ( $n = 2$ ). За матеріали шарів вибрано склокераміку [1], для якої

$$\lambda_t^{(1)} = 1.21 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), \quad \Lambda_1(t) = 1 + 19.8 \cdot 10^{-5} t,$$

$$c_V^{(1)} = 4.1 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}), \quad C_1(t) = 1 - 0.268 e^{-0.0019(t-27)},$$

і сталь 15Х1М1Ф [5], для якої

$$\lambda_t^{(2)} = 42.31 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), \quad \Lambda_2(t) = 1 - 20.56 \cdot 10^{-5} t,$$

$$c_V^{(2)} = 31.64 \cdot 10^5 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}), \quad C_2(t) = 1 + 13.53 \cdot 10^{-4} t.$$

Приймаємо, що  $\tilde{g}(\tau) = 1$  (тепловий потік сталої інтенсивності),  $\tilde{t}_c = 0^\circ\text{C}$ ,  $\tilde{t}_{p0}(z) = 0^\circ\text{C}$ ,  $p = 1, 2$ . З формули (17) отримуємо  $\theta_L(z, \text{Fo}) = \text{Ki} J(z, \text{Fo})$ , де

$$J(z, \text{Fo}) = f_{0,n}(z_n) - f_0(z) - H_1(z, \text{Fo}). \quad (25)$$

Досліджено температурне поле при  $\tilde{q}_0 = 1.118 \cdot 10^6 \text{ Вт}/\text{м}^2$ ,  $\text{Sk} = 0$ ,  $\lambda_t^* = (\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)})/2$ ,  $c_V^* = (c_V^{(1)} + c_V^{(2)})/2$ ,  $t_s = \ell \tilde{q}_0 / \lambda_t^*$ ,  $\tilde{z}_1 = 2 \text{ мм}$ ,  $\tilde{z}_2 = 11 \text{ мм}$ ,  $\ell = \tilde{z}_2$ ,  $\Delta\tau = 0.03125 \text{ с}$ . Кількість ітерацій  $n$  під час розв'язання рівнянь (9) не перевищувала 30.

Виконано також розрахунки температурного поля з використанням точного розв'язку рівнянь (9):

$$\bar{t}_p(z, \text{Fo}) = \frac{\sqrt{1 + 2\bar{k}_p \theta_p(z, \text{Fo})} - 1}{\bar{k}_p}, \quad p = 1, 2,$$

де  $\bar{k}_p$  – кутові коефіцієнти в залежностях  $\bar{\Lambda}_p(\bar{t}_p)$ .



Порівняльний аналіз відповідних температур показав, що вони відрізняються, як і в стаціонарному випадку [12], щонайбільше двома останніми значущими цифрами.

У табл. 1 наведено температури на поверхнях  $z = 0, z_1/4, 3z_1/4, z_1$ , обчислені для різних моментів часу за запропонованою методикою (верхній рядок) і за методикою [10] (нижній рядок). В останньому рядку наведено значення температури, обчислені на основі розв'язку відповідної стаціонарної задачі ( $\tau = \infty$ ), визначеного згідно з [12].

Таблиця 1

$\tau, c \backslash z$	0	$z_1/4$	$3z_1/4$	$z_1$
0.15625	0.39458	0.02838	0.00004	0.0
	0.39490	0.02871	0.00004	0.0
0.3125	0.57220	0.11437	0.00136	0.00006
	0.57223	0.11441	0.00137	0.00007
0.625	0.82710	0.29311	0.01542	0.00104
	0.82715	0.29316	0.01546	0.00104
1.5625	1.30164	0.70692	0.12999	0.01621
	1.30176	0.70704	0.13005	0.01617
3.125	1.78682	1.17634	0.34973	0.06897
	1.78693	1.17643	0.34940	0.06791
15.625	2.98048	2.36219	1.06857	0.37705
	2.97268	2.35290	1.05820	0.36675
31.25	3.13529	2.51670	1.17091	0.42749
	3.13221	2.51356	1.16829	0.42551
46.875	3.14715	2.52853	1.17875	0.43135
	3.14665	2.52803	1.17837	0.43110
62.50	3.14805	2.52943	1.17935	0.43164
	3.14799	2.52937	1.17930	0.43162
78.125	3.14812	2.52950	1.17940	0.43166
	3.14811	2.52949	1.17939	0.43167
93.75	3.14812	2.52950	1.17940	0.43167
	3.14812	2.52950	1.17940	0.43167
$\infty$	3.14812	2.52950	1.17940	0.43167

Дані, наведені в табл. 1, засвідчують добру узгодженість розрахованих значень температур.

**3.2. Для чотиришарової плити** досліджено вплив на температурне поле теплового випромінювання і температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності та об'ємних теплоємностей (чинників, які зумовлюють нелінійність задачі теплопровідності). За матеріали шарів плити вибрано склокераміку (**шар 1**), кераміку  $ZrO_2$  [21] (**шар 2**), сплав  $Ti - 6Al - 4V$  [21] (**шар 3**), сталь 15X1M1Ф (**шар 4**). Характеристики першого та четвертого шарів наведено вище, а другого і третього є такими:

$$\lambda_t^{(2)} = 1.78 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), \quad \Lambda_2(t) = 1 + 15.39 \cdot 10^{-5} t + 6.53 \cdot 10^{-8} t^2,$$

$$c_V^{(2)} = 1.64 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}),$$

$$C_2(t) = \frac{1 + 11.05 \cdot 10^{-4} t - 10.58 \cdot 10^{-7} t^2 + 38.14 \cdot 10^{-11} t^3}{(1 + \alpha_{t_2}(t)(t - 27))^3},$$

$$\alpha_{t_2}(t) = 90.97 \cdot 10^{-7} - 11.97 \cdot 10^{-9} t + 12.7 \cdot 10^{-12} t^2 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1},$$

$$\lambda_t^{(3)} = 5.74 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), \quad \Lambda_3(t) = 1 + 29.61 \cdot 10^{-4} t,$$

$$c_V^{(3)} = 2.33 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}),$$

$$C_3(t) = \frac{1 + 84.63 \cdot 10^{-5} t - 11.62 \cdot 10^{-7} t^2 + 8.42 \cdot 10^{-10} t^3}{(1 + \alpha_{t_3}(t)(t - 27))^3},$$

$$\alpha_{t_3}(t) = 8.75 \cdot 10^{-6} + 4.09 \cdot 10^{-9} t - 2.69 \cdot 10^{-12} t^2 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

При  $\tilde{t}_c = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $\tilde{t}_{p_0}(z) = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $p = 1, 2, 3, 4$ , розглянуто нагрів тепловим потоком сталої,  $\tilde{g}(\tau) = 1$ , та імпульсної інтенсивності

$$\tilde{q}(\tau) = \sum_{j=1}^{m^*} \left[ S(\tau - b_j) - S(\tau - b_j - \tau_a) \right],$$

де  $b_j = (j-1)(\tau_a + \tau_b)$ ,  $m^*$  – кількість імпульсів,  $\tau_a$  і  $\tau_b$  – тривалість імпульсу і паузи.

У випадку, коли  $\tilde{g}(\tau) = 1$ , вираз для  $\theta_L(z, \text{Fo})$  має такий самий вигляд, як і в попередньому прикладі, а для імпульсної теплової дії отримано

$$\theta_L(z, \text{Fo}) = \text{Ki} \sum_{j=1}^{m^*} \left[ J(z, \text{Fo} - \bar{b}_j) S(\text{Fo} - \bar{b}_j) - J(z, \text{Fo} - \bar{b}_j - \text{Fo}_a) S(\text{Fo} - \bar{b}_j - \text{Fo}_a) \right],$$

де  $\bar{b}_j = (j-1)(\text{Fo}_a + \text{Fo}_b)$ ,  $\text{Fo}_a = \frac{\lambda_t^* \tau_a}{c_V^* \ell^2}$ ,  $\text{Fo}_b = \frac{\lambda_t^* \tau_b}{c_V^* \ell^2}$ ;  $J(z, \text{Fo})$  визначаємо за формулою (25) при  $n = 4$ .

Таблиця 2

		$\tau, \text{c}$		5	10	15	25	50	110	$\infty$
		$z$	Sk							
0	$\bar{t}_{st}$	0.0	1.317	1.876	2.296	2.874	3.509	3.749	3.762	
		0.044	1.160	1.416	1.523	1.596	1.616	1.617	1.617	
	$\bar{t}_{pr}$	0.0	1.183	1.624	1.936	2.333	2.711	2.822	–	
		0.044	1.080	1.333	1.450	1.536	1.563	1.564	–	
	$\bar{t}$	0.0	1.309	1.785	2.107	2.487	2.777	2.825	2.825	
		0.044	1.159	1.389	1.484	1.546	1.563	1.564	1.564	
$z_1$	$\bar{t}_{st}$	0.0	0.221	0.567	0.849	1.242	1.673	1.836	1.845	
		0.044	0.210	0.480	0.636	0.755	0.792	0.793	0.793	
	$\bar{t}_{pr}$	0.0	0.217	0.538	0.780	1.088	1.378	1.462	–	
		0.044	0.208	0.474	0.629	0.753	0.794	0.796	–	
	$\bar{t}$	0.0	0.293	0.642	0.896	1.199	1.427	1.464	1.465	
		0.044	0.269	0.532	0.669	0.767	0.794	0.796	0.796	
$z_2$	$\bar{t}_{st}$	0.0	0.033	0.132	0.221	0.348	0.486	0.538	0.541	
		0.044	0.032	0.115	0.172	0.218	0.232	0.233	0.233	
	$\bar{t}_{pr}$	0.0	0.033	0.118	0.185	0.270	0.349	0.372	–	
		0.044	0.032	0.107	0.156	0.196	0.209	0.210	–	
	$\bar{t}$	0.0	0.046	0.141	0.213	0.298	0.362	0.372	0.373	
		0.044	0.043	0.122	0.168	0.200	0.209	0.210	0.210	
$z_3$	$\bar{t}_{st}$	0.0	0.005	0.029	0.052	0.085	0.122	0.136	0.137	
		0.044	0.005	0.026	0.042	0.055	0.059	0.059	0.059	
	$\bar{t}_{pr}$	0.0	0.005	0.030	0.055	0.090	0.127	0.139	–	
		0.044	0.005	0.027	0.045	0.062	0.068	0.068	–	
	$\bar{t}$	0.0	0.008	0.037	0.065	0.102	0.134	0.139	0.139	
		0.044	0.008	0.032	0.050	0.064	0.068	0.068	0.068	

Обчислення виконано при  $\tilde{q}_0 = 1.118 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$ ,  $\tilde{z}_1 = 2 \text{ мм}$ ,  $\tilde{z}_2 = 4 \text{ мм}$ ,  $\tilde{z}_3 = 6 \text{ мм}$ ,  $\tilde{z}_4 = 11 \text{ мм}$ ,  $l = \tilde{z}_4$ ,  $\Delta\tau = 0.125 \text{ с}$ ,

$$\lambda_t^* = (\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)} + \lambda_t^{(3)} + \lambda_t^{(4)})/4, \quad c_V^* = (c_V^{(1)} + c_V^{(2)} + c_V^{(3)} + c_V^{(4)})/4.$$

У табл. 2 наведено значення температури  $\bar{t}_{st}$ ,  $\bar{t}_{pr}$  і  $\bar{t}$ , зумовлені тепловим потоком сталої інтенсивності та обчислені відповідно за сталих характеристик  $\bar{\Lambda}_p(\bar{t}_p) = 1$ ,  $\bar{C}_p(\bar{t}_p) = 1$ , простої нелінійності,  $\bar{a}_p(\bar{t}_p) = 1$ , і температурозалежних характеристик при  $Sk = 0$  та  $Sk = 0.044$  для різних моментів часу. В останньому стовпці,  $\tau = \infty$ , подано значення температури, обчислені на основі розв'язків відповідних стаціонарних задач, визначених з використанням методики [12]. Порівняльний аналіз цих температур засвідчує, що врахування теплового випромінювання приводить до заниження значень температури, які є максимальними у стаціонарному режимі. На поверхні  $z = 0$  відповідні температури відрізняються за сталих характеристик у 2.3 рази, за температурозалежних – у 1.9 разів, у випадку одночасного врахування теплового випромінювання і температурозалежності – у 2.5 рази. За врахування лише температурних залежностей характеристик максимальна температура є у 1.2 рази меншою. Різниця між температурами  $\bar{t}_{pr}$  і  $\bar{t}$  може досягати 8%.

На рис. 1 зображено зміну температур з часом на поверхні  $z = 0$  за імпульсної теплової дії при  $m^* = 16$ ,  $\tau_a = 1.5 \text{ с}$ ,  $\tau_b = 0.5 \text{ с}$ . Графіки побудовано на основі розв'язків, що не враховують (крива 1) і враховують (крива 2) теплове випромінювання і температурну залежність характеристик.

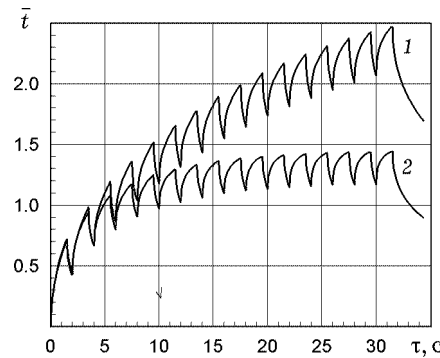


Рис. 1

На рисунку бачимо, що за врахування нелінійностей температура після 11-го імпульсу виходить на усталений режим, а коли їх не враховувати, то після 11-го імпульсу триває ще перехідний режим. Для значень часу, віддалених від початкового, перепад температур протягом пауз є меншим за врахування нелінійностей. На початковій стадії нагріву вплив нелінійностей є неістотним. Відповідні значення температури в кінці дії 16-го імпульсу відрізняються майже у 2 рази.

**Висновки.** Розроблено методику розв'язання нестационарних задач теплопровідності для багат шарових плит за врахування залежності теплофізичних характеристик від температури і теплового випромінювання. Методику апробовано на нелінійних задачах теплопровідності для дво- і чотиришарових плит за нагрівання тепловими потоками сталої та імпульсної інтенсивності. Числові дослідження, зокрема, засвідчили, що теплове випромінювання має більший вплив на температурне поле, ніж температурна залежність об'ємних теплоємностей і коефіцієнтів теплопровідності.

1. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – **81**, № 6. – С. 1058–1062.  
Te same: *Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V.* Numerical-analytical method of solution of a nonlinear unsteady heat-conduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – **81**, No. 6. – P. 1099–1103.  
– <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0150-8>.
2. *Вовк О. М., Соляр Т. Я.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпростору та шару // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 78–87.  
Te same: *Vovk O. M., Solyar T. Y.* Thermoelastic state of contacting thermally sensitive half space and thermally sensitive layer // J. Math. Sci. – 2021. – **256**, No. 4. – P. 455–466. – <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05438-8>.
3. *Гарматій Г. Ю., Попович В. С.* Моделювання і визначення неусталеного термопружного стану двошарової термочутливої пластини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 131–138.  
Te same: *Harmatii G. Yu., Popovych V. S.* Modeling and determination of the nonsteady thermoelastic state of a two-layer thermosensitive plate // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 162–172.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3174-6>.
4. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
5. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Про визначення усталеного термопружного стану багатшарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 42–47.
6. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Споллом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
7. *Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б.* Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.  
Te same: *Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B.* Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater. Sci. – 2010. – **46**, No. 1. – P. 1–15.  
– <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9258-4>.
8. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.
9. *Процюк Б. В.* Визначення квазістатичного термопружного стану шаруватих термочутливих плит // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2019. – Вип. 1. – С. 162–165.  
– <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/1.37>.
10. *Процюк Б. В.* Визначення статичного термопружного стану шаруватих термочутливих плити, циліндра і кулі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 1. – С. 87–106. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.1.87-106>.  
Te same: *Protsiuk B. V.* Determination of the static thermoelastic state of layered thermosensitive plate, cylinder and sphere // J. Math. Sci. – 2023. – **274**, No. 5. – P. 678–707. – <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06630-8>.
11. *Процюк Б. В.* Нестационарні задачі теплопровідності для термочутливої плити за нелінійної граничної умови на одній із поверхонь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 2. – С. 117–128.  
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.2.117-128>.  
Te same: *Protsiuk B. V.* Nonstationary problems of heat conduction for a thermosensitive plate with nonlinear boundary condition on one surface // J. Math. Sci. – 2023. – **272**, No. 1. – P. 135–150.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06405-1>.
12. *Процюк Б. В.* Спосіб розв'язання нелінійних нестационарних задач теплопровідності для півпростору // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18. – С. 93–101. – <https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.93-101>.
13. *Процюк Б. В., Горун О. П.* Квазістатичний термопружний стан термочутливого трискладового шару за конвективно-променевого теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 2. – С. 98–108.  
Te same: *Protsyuk B. V., Horun O. P.* Quasistatic thermoelastic state of a heat-sensitive three-component layer under the conditions of convective-radiative

- heat exchange // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 2. – P. 117–131.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3342-3>.
14. Процюк Ю. Б. Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 151–161.  
Te same: Protsyuk Yu. B. Static thermoelasticity problems for layered thermosensitive plates with cubic dependence of the coefficients of heat conductivity on temperature // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 4. – P. 481–496.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0700-z>.
  15. Annasabi Z., Erchiqui F. Robust Kirchhoff transformation using B-spline for finite element analysis of the non-linear heat conduction // Int. Commun. Heat Mass Transf. – 2021. – **120**. – Article 104985.  
– <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104985>.
  16. Bagnall K. R., Muzychka Y. S., Wang E. N. Application of the Kirchhoff transform to thermal spreading problems with convection boundary conditions // IEEE Trans. Compon. Packag. Manuf. Technol. – 2014. – **4**, No. 3. – P. 408–420.  
– <https://doi.org/10.1109/TCPMT.2013.2292584>.
  17. Chen Y. Y., Frankel J. I., Keyhani M. A new nonlinear surface heat flux calibration method based on Kirchhoff transformation and rescaling principles // Inverse Probl. Sci. Eng. – 2014. – **22**, No. 8. – P. 1394–1421.  
– <https://doi.org/10.1080/17415977.2014.880906>.
  18. Gama R. M. S., Pазetto R. A linear approach suitable for a class of steady-state heat transfer problems with temperature-dependent thermal conductivity // Math. Probl. Eng. – 2021. – **2021**. – P. 1–12.  
– <https://doi.org/10.1155/2021/7004581>.
  19. Kushnir R., Protsiuk B. Determination of the thermal fields and stresses in multilayer solids by means of the constructed Green functions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht, etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931. – [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7\\_608](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_608).
  20. Quirino J. M., Correa E. D., Sobral R. L. The Kirchhoff transformation for convective-radiative thermal problems in fins // Int. J. Mech. – 2021. – **15**. – P. 12–21.  
– <https://doi.org/10.46300/9104.2021.15.2>.
  21. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.  
– <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.
  22. Vadasz P. Analytical solution to nonlinear thermal diffusion: Kirchhoff versus Cole – Hopf transformations // J. Heat Transfer. – 2010. – **132**, No. 12. – Article 123102. – 6 p. – <https://doi.org/10.1115/1.4002325>.

#### ANALYTICAL-NUMERICAL METHOD FOR SOLVING NON-STATIONARY NONLINEAR HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR MULTILAYER PLATES

*An analytical-numerical technique is proposed for the determination of the one-dimensional non-stationary temperature fields in multilayer thermosensitive plates under the conditions of thermal radiation. In this case, no restrictions are imposed on the nature of the temperature dependences of thermal conductivity coefficients and volumetric heat capacities. The technique implies the use of the Kirchhoff transform, generalized functions, Green's function, linear splines and the inverse Kirchhoff transform, which is based on Newton's iterative formula for solving algebraic equations. Temperature fields are studied, which are found when either accounting the thermal radiation or disregarding it, in two- and four-layer thermosensitive plates heated by the heat fluxes of constant and pulsed intensity. For a two-layer plate, a comparison is made with the results obtained using the exact formula of the inverse Kirchhoff transformation and by another technique suggested earlier.*

**Key words:** layered thermosensitive plate, thermal radiation, non-linear non-stationary heat conduction problem, Kirchhoff transformation, Green's function, generalized functions, linear splines, Newton's iterative method.