

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ БАГАТОШАРОВИМИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМИ ПОКРИТТЯМИ

Розроблено методику розрахунку термопружного стану елементів конструкцій з тонкими трансверсально-ізотропними багатошаровими покриттями, яка ґрунтується на моделюванні таких покриттів оболонками з відповідними термомеханічними властивостями покриття. При такому підході вплив покриттів на механічний стан всієї системи тіло – покриття описується спеціальними узагальненими граничними умовами. Для випадку трансверсально-ізотропних покриттів ураховано поперечні деформації як додаткові ступені свободи. Ефективність підходу проілюстровано порівнянням результатів, отриманих за допомогою цього підходу, з точним розв'язком тестової задачі про термопружний стан суцільного циліндра з керамічним покриттям.

Ключові слова: термопружність, тонкі покриття, багатошарові трансверсально-ізотропні покриття, керамічні покриття, узагальнені граничні умови.

Вступ. У зв'язку з широким використанням елементів конструкцій з нанесеними захисними покриттями є актуальною розробка ефективних методик розрахунку напружено-деформованого стану таких систем. При цьому важливо враховувати реальні властивості матеріалу покриття, зокрема неоднорідність та анізотропію, які можуть бути наслідком специфічних особливостей технологічного процесу виготовлення елементів конструкцій або впливу температурних і фізичних полів під час експлуатації.

Задачі про визначення напруженого стану тіл з анізотропними покриттями розглядали в працях [6, 8, 15–18, 23, 25], де наведено аналітичні та числові підходи до розв'язування відповідних крайових задач за врахування або без врахування теплових деформацій.

Для тонких покриттів ефективним є моделювання їх тонкими оболонками з термомеханічними властивостями покриття. Тоді вплив покриттів на стан тіла описується відповідними узагальненими граничними умовами (УГУ), що дає можливість розв'язувати задачі термомеханіки для тіл з тонкими покриттями [19]. При побудові УГУ механічного спряження для трансверсально-ізотропних покриттів виникає необхідність враховувати поперечні деформації. Для одношарового покриття такі УГУ побудовано в [22]. Отримано УГУ механічного [12] і термомеханічного [13] спряження тіла із середовищем для випадку багатошарового ізотропного покриття.

У цій роботі підхід [22] узагальнено для багатошарового трансверсально-ізотропного покриття. Ефективність ілюструється за допомогою порівняння результатів, отриманих з використанням цього наближеного підходу, з точним розв'язком тестової задачі про термопружний стан суцільного циліндра з керамічним покриттям.

1. Граничні та контактні умови задачі термопружності для покриття.

Досліджуваний об'єкт – тіло з багатошаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$,

шари якого виготовлено з різних трансверсально-ізотропних матеріалів. При цьому n -шарове покриття розглядаємо як тонку оболонку, віднесену до триортгональної змішаної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, які є, відповідно, лініями головних кривин поверхні поділу тіло – покриття і нормаллю до неї (рис. 1).

✉ shevchuk@iapmm.lviv.ua

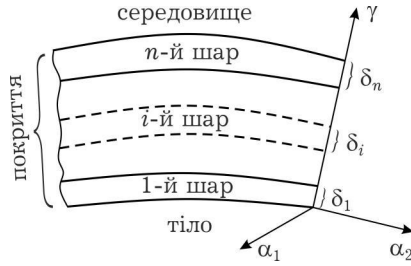


Рис. 1

Приймаємо, що на границі покриття – середовище задано вектор напружень

$$\boldsymbol{\sigma}_3^n = \boldsymbol{\sigma}_3^\Pi \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_n = \sum_{i=1}^n \delta_i = \delta, \quad (1)$$

а на поверхнях контакту шарів покриття і покриття з тілом виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i-1} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j, \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_I \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_0 = 0; \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3^i = \boldsymbol{\sigma}_3^{i-1} \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_{i-1}, \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3^1 = \boldsymbol{\sigma}_3^I \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_0 = 0. \quad (3)$$

Тут індексами i , \mathbf{I} та \mathbf{II} позначено величини, що відносяться до i -го шару покриття, тіла та середовища відповідно; $\boldsymbol{\sigma}_3$ – вектор напружень, який діє на поверхні $\gamma = \text{const}$; $\boldsymbol{\sigma}_3 = \sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3$, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 – орти координатного триєдра на базисній поверхні S_0 оболонки; δ_i , $\mathbf{U}_i = u_i\mathbf{e}_1 + v_i\mathbf{e}_2 + w_i\mathbf{e}_3$ – товщина і вектор переміщень точок i -го шару, $i \in \{1, \dots, n\}$; $\mathbf{U}_I = u_I\mathbf{e}_1 + v_I\mathbf{e}_2 + w_I\mathbf{e}_3$ – значення вектора переміщень точок тіла (підкладки) на поверхні контакту з покриттям.

Розподіл температури $t^i(\gamma)$ в кожному шарі покриття вважаємо заданим (визначеним за методикою, викладеною в [10, 11, 14, 19, 20]).

2. Узагальнені граничні умови механічного спряження. Виведення УГУ механічного спряження тіла з середовищем через тонке покриття виконаємо на основі теорії анізотропних оболонок [1, 4, 5].

Для одержання цих умов використовуємо гіпотезу Кірхгофа – Лява, враховуючи, однак, з огляду на відмінності між модулями Юнга трансверсально-ізотропних шарів покриття, поперечну деформацію ε_3^i кожного шару оболонки як додатковий ступінь свободи [2, с. 67; 3, 5, с. 56; 9, 24, 26]. Тоді геометричні співвідношення для переміщень мають вигляд

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) = (1 + k_1\gamma)u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) - \frac{\gamma}{A_1} \frac{\partial w_1(\alpha_1, \alpha_2, 0)}{\partial \alpha_1},$$

$$v_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) = (1 + k_2\gamma)v_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) - \frac{\gamma}{A_2} \frac{\partial w_1(\alpha_1, \alpha_2, 0)}{\partial \alpha_2},$$

$$w_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) = w_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \overline{\varepsilon_3^i}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma),$$

де $\gamma \in [\gamma_{i-1}, \gamma_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\overline{\varepsilon_3 \gamma}^i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma) = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \varepsilon_3^j(\alpha_1, \alpha_2) + (\gamma - \gamma_{i-1}) \varepsilon_3^i(\alpha_1, \alpha_2), \quad (4)$$

а відповідні співвідношення для деформацій у випадку тонкостінної оболонки є такими:

$$\begin{aligned} e_{11}^i &= \varepsilon_1 + \alpha_1 \gamma + k_1 \overline{\varepsilon_3 \gamma}^i, & e_{22}^i &= \varepsilon_2 + \alpha_2 \gamma + k_2 \overline{\varepsilon_3 \gamma}^i, \\ e_{33}^i &= \varepsilon_3^i, & e_{12}^i &= \varepsilon_{12} + 2\alpha_{12} \gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

де A_1, A_2 – коефіцієнти першої квадратичної форми; k_1, k_2 – головні кривини координатних ліній; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$ – компоненти деформації базисної поверхні S_0 .

Рівняння рівноваги шаруватої анізотропної оболонки за відсутності масових сил з урахуванням умов контакту (3) та умови (1) записуються у вигляді [3, 24]:

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{B}, \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = [q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, 0]^\top,$$

$$q_j = \delta \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} (1 + \delta k_1)(1 + \delta k_2) - \sigma_{j3}^{\mathbf{I}}, \quad m_j = \delta \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} (1 + \delta k_1)(1 + \delta k_2),$$

$$j \in \{1, 2, 3\},$$

де \mathbf{C} – матриця диференціальних операторів:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{A_1 A_2} \begin{pmatrix} -\partial_1(A_2(\cdot)) & A_{1,2} & k_1 A_1 A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & -\partial_2(A_1(\cdot)) & k_2 A_1 A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 A_2 \\ -A_{1,2} & -\partial_1(A_2(\cdot)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_2(A_1(\cdot)) & -A_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 A_1 A_2 & 0 & -\partial_1(A_2(\cdot)) & A_1 A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 A_1 A_2 & -\partial_2(A_1(\cdot)) & 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1(A_2(\cdot)) & A_{1,2} & A_1 A_2 k_1 \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,1} & -\partial_2(A_1(\cdot)) & A_1 A_2 k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -A_{1,2} & -\partial_1(A_2(\cdot)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_2(A_1(\cdot)) & -A_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1(A_2(\cdot)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_2(A_1(\cdot)) \end{pmatrix}^\top,$$

$\boldsymbol{\xi} = [N_1, N_2, N_3, N_{12}, N_{21}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}, M_{13}, M_{23}]^\top$ – вектор-стовпець зусиль і моментів в оболонці. Порівняно з випадком ізотропного покриття тут додатково враховано нормальне поперечне зусилля N_3 і моменти першого порядку напружень поперечного зсуву M_{j3} , що виникають у покритті:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_j, N_{j\ell}, Q_j \\ M_j, M_{j\ell}, M_{j3} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \left\{ \sigma_{jj}^i, \sigma_{j\ell}^i, \sigma_{j3}^i \right\} (1 + k_\ell \gamma) \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \gamma \end{array} \right\} d\gamma, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \ell = 3 - j, \quad (7)$$

$$N_3 = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \sigma_{33}^i (1 + k_1 \gamma)(1 + k_2 \gamma) d\gamma, \quad (8)$$

$A_{j,\ell} = \partial A_j / \partial \alpha_\ell$, $\partial_j = \partial / \partial \alpha_j$, $j, \ell \in \{1, 2\}$; у дужках (\cdot) наведено аргумент відповідного оператора (операнд); « \top » – символ транспонування.

Для переходу до трансформованих рівнянь рівноваги попередньо приймемо квадратичний розподіл для зсувних напружень σ_{j3}^i уздовж товщини оболонки [1, с. 103; 4, с. 427]:

$$\sigma_{j3}^i(\gamma) = B_0 + B_1 \gamma + B_2 \gamma^2, \quad \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Задовольнивши граничні умови (1) для зсувних напружень на межі із середовищем та умови контакту (3) на поверхні поділу тіло – покриття, відповідно до означення (7) для перерізуючої сили Q_j (з точністю до малих доданків) отримаємо подання

$$\sigma_{j3}^i(\gamma) = Q_j \frac{6\gamma(\delta - \gamma)}{\delta^3} + \sigma_{j3}^{\text{II}} \left(-\frac{2\gamma}{\delta} + \frac{3\gamma^2}{\delta^2} \right) + \sigma_{j3}^{\text{I}} \left(1 - \frac{4\gamma}{\delta} + \frac{3\gamma^2}{\delta^2} \right). \quad (9)$$

Подання (9) зсувних напружень дає можливість виразити моменти M_{j3} з формули (7) через перерізуючі зусилля і значення напружень на поверхнях покриття – середовище і покриття – тіло, врахувавши, що $k_1 \delta$, $k_2 \delta \ll 1$, у вигляді:

$$M_{j3} = Q_j \frac{\delta}{2} + (\sigma_{j3}^{\text{II}} - \sigma_{j3}^{\text{I}}) \frac{\delta^2}{12}. \quad (10)$$

Підставляючи (10) в рівняння рівноваги (6), виключаючи перерізуючі сили Q_1 і Q_2 та нехтуючи доданками вищого порядку малості (з урахуванням, що $k_1 \delta$, $k_2 \delta \ll 1$), запишемо їх у трансформованому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{j3}^{\text{I}} - \mathbf{F}_j \Theta &= \sigma_{j3}^{\text{II}}, \quad j \in \{1, 2\}, \\ \sigma_{33}^{\text{I}} - \mathbf{F}_3 \Theta &= \sigma_{33}^{\text{II}} + \delta \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\text{II}}, \sigma_{23}^{\text{II}}], \\ \frac{\delta}{2} \sigma_{33}^{\text{I}} - \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\text{I}}, \sigma_{23}^{\text{I}}] - \mathbf{F}_4 \Theta - N_3 &= -\frac{\delta}{2} \sigma_{33}^{\text{II}} - \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\text{II}}, \sigma_{23}^{\text{II}}], \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \Theta &= [N_1, N_2, S, M_1, M_2, \tilde{M}_{12}]^\top, \\ S &= N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}, \quad \tilde{M}_{12} = M_{12} = M_{21}, \\ \mathbf{F}_1 &= A_1^{-1} A_2^{-1} [\partial_1(A_2(\cdot)), -A_{2,1}, \partial_2(A_1(\cdot)) + A_{1,2}, k_1 \partial_1(A_2(\cdot)), \\ &\quad -k_1 A_{2,1}, 2k_1 \partial_2(A_1(\cdot)) + 2k_2 A_{1,2}], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= A_1^{-1} A_2^{-1} [-A_{1,2}, \partial_2(A_1(\cdot)), \partial_1(A_2(\cdot)) + A_{2,1}, -k_2 A_{1,2}, \\ &\quad k_2 \partial_2(A_1(\cdot)), 2k_2 \partial_1(A_2(\cdot)) + 2k_1 A_{2,1}], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 &= A_1^{-1} A_2^{-1} [-A_1 A_2 k_1, -A_1 A_2 k_2, 0, \partial_1(A_1^{-1} \partial_1(A_2(\cdot))) - \partial_2(A_2^{-1} A_{1,2}(\cdot)), \\ &\quad \partial_2(A_2^{-1} \partial_2(A_1(\cdot))) - \partial_1(A_1^{-1} A_{2,1}(\cdot))], \end{aligned}$$

$$2\partial_1\partial_2(\cdot) + 2\partial_1(A_1^{-1}A_{1,2}(\cdot)) + 2\partial_2(A_2^{-1}A_{2,1}(\cdot)), \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_4 = \left[-k_1 \frac{\delta}{2}, -k_2 \frac{\delta}{2}, 0, k_1, k_2, 0\right], \quad (15)$$

$$\mathcal{V}[\varphi_1, \varphi_2] = A_1^{-1}A_2^{-1}(\partial_1(A_2\varphi_1) + \partial_2(A_1\varphi_2)).$$

Співвідношення Дюгамеля – Неймана для трансверсально-ізотропних шарів покриття – оболонки мають вигляд [3, с. 86]

$$\sigma_{jj}^i = \sum_{\ell=1}^3 B_{j\ell}^i \left[e_{\ell\ell}^i - \beta_{\ell}^i \bar{t}^i \right], \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

$$\sigma_{12}^i = B_{66}^i e_{12}^i, \quad (16)$$

де $B_{j\ell} = B_{\ell j}$ – пружні коефіцієнти трансверсально-ізотропного матеріалу; $\beta_1 = \beta_2$ і β_3 – коефіцієнти лінійного температурного розширення у площині ізотропії та вздовж нормалі до неї; $\bar{t}^i = t^i - t_0^i$, t_0^i – початковий температурний розподіл у вільному від напружень i -му шарі покриття.

Вирази для пружних коефіцієнтів $B_{j\ell}^i$ у випадку трансверсально-ізотропного тіла випливають із загальних формул для анізотропного тіла [3, с. 87; 5, с. 54]:

$$B_{11}^i = B_{22}^i = \Omega_i^{-1}(a_{11}^i a_{33}^i - (a_{13}^i)^2), \quad B_{12}^i = \Omega_i^{-1}((a_{13}^i)^2 - a_{12}^i a_{33}^i),$$

$$B_{13}^i = B_{23}^i = \Omega_i^{-1}(a_{12}^i - a_{11}^i) a_{13}^i,$$

$$B_{33}^i = \Omega_i^{-1}((a_{11}^i)^2 - (a_{12}^i)^2), \quad B_{66}^i = (a_{66}^i)^{-1},$$

$$\Omega_i = (a_{11}^i - a_{12}^i)((a_{11}^i + a_{12}^i) a_{33}^i - 2(a_{13}^i)^2),$$

де пружні константи $a_{j\ell}^i$ виражаються через інженерні константи (модулі Юнга, модуль зсуву та коефіцієнти Пуассона):

$$a_{11}^i = \frac{1}{E_1^i}, \quad a_{33}^i = \frac{1}{E_3^i}, \quad a_{12}^i = -\frac{\nu_{21}^i}{E_1^i}, \quad a_{13}^i = -\frac{\nu_{31}^i}{E_1^i} = -\frac{\nu_{13}^i}{E_3^i}, \quad a_{66}^i = \frac{1}{G_{12}^i}.$$

Тут E_1^i та E_3^i – модулі Юнга в площині ізотропії і в напрямку, нормальному до неї; ν_{21}^i – коефіцієнт Пуассона, який характеризує поперечний стиск в площині ізотропії, коли навантаження прикладено в площині ізотропії; ν_{13}^i – коефіцієнт Пуассона, який характеризує поперечний стиск у площині ізотропії, коли навантаження є нормальним до площини ізотропії; G_{12}^i – модуль зсуву для площини ізотропії.

Використовуючи означення (7), (8), співвідношення Дюгамеля – Неймана (16), формули для деформації (4), (5) і нехтуючи доданками вищого порядку малості, отримуємо такі співвідношення термопружності:

$$\Theta = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_3^i \boldsymbol{\varepsilon}_3^i - \Theta_t, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} N_3 = & [G_{13}^{(0)}, G_{13}^{(0)}, 0, G_{13}^{(1)}, G_{13}^{(1)}, 0] \boldsymbol{\varepsilon} + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[G_{33}^{i(0)} + (k_1 + k_2) \tilde{G}_{13}^{i(1)} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_3^i - N_{3t}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Theta_t = [N_{1t}, N_{1t}, 0, M_t, M_t, 0]^T,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} N_{1t}, M_t \\ N_{3t} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \left\{ \begin{array}{c} (B_{11}^i + B_{12}^i)\beta_1^i + B_{13}^i\beta_3^i \\ 2B_{13}^i\beta_1^i + B_{33}^i\beta_3^i \end{array} \right\} \bar{t}^i \left\{ \begin{array}{c} 1, \gamma \\ 1 \end{array} \right\} d\gamma, \quad (19)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{12}]^T, \quad (20)$$

$$\mathbf{K} = \left\| \begin{array}{cccccc} G_{11}^{(0)} & G_{12}^{(0)} & 0 & G_{11}^{(1)} & G_{12}^{(1)} & 0 \\ G_{12}^{(0)} & G_{11}^{(0)} & 0 & G_{12}^{(1)} & G_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66}^{(0)} & 0 & 0 & G_{66}^{(1)} \\ G_{11}^{(1)} & G_{12}^{(1)} & 0 & G_{11}^{(2)} & G_{12}^{(2)} & 0 \\ G_{12}^{(1)} & G_{11}^{(1)} & 0 & G_{12}^{(2)} & G_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66}^{(1)} & 0 & 0 & G_{66}^{(2)} \end{array} \right\|, \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_3^i = \left[\begin{array}{c} G_{13}^{i(0)} + k_1 \tilde{G}_{11}^{i(1)} + k_2 \tilde{G}_{12}^{i(1)} + \delta_i \sum_{j=i+1}^n (k_1 G_{11}^{j(0)} + k_2 G_{12}^{j(0)}) \\ G_{13}^{i(0)} + k_1 \tilde{G}_{12}^{i(1)} + k_2 \tilde{G}_{11}^{i(1)} + \delta_i \sum_{j=i+1}^n (k_1 G_{12}^{j(0)} + k_2 G_{11}^{j(0)}) \\ 0 \\ G_{13}^{i(1)} + k_1 \tilde{G}_{11}^{i(2)} + k_2 \tilde{G}_{11}^{i(2)} + \delta_i \sum_{j=i+1}^n (k_1 G_{11}^{j(1)} + k_2 G_{12}^{j(1)}) \\ G_{13}^{i(1)} + k_1 \tilde{G}_{12}^{i(2)} + k_2 \tilde{G}_{11}^{i(2)} + \delta_i \sum_{j=i+1}^n (k_1 G_{12}^{j(1)} + k_2 G_{11}^{j(1)}) \\ 0 \end{array} \right].$$

Тут \mathbf{K} , \mathbf{K}_3^i – матриці пружних констант; ε – вектор-стовпець компонент деформації базисної поверхні; Θ_t – вектор-стовпець величин, які враховують теплові деформації в покритті;

$$G_{j\ell}^{i(m)} = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{j\ell}^i \gamma^m d\gamma, \quad G_{j\ell}^{(m)} = \int_0^{\delta} B_{j\ell} \gamma^m d\gamma,$$

$$i \in \{1, \dots, n\}, \quad m \in \{0, 1, 2\}, \quad j\ell \in \{11, 12, 13, 33, 66\}, \quad (22)$$

$$\tilde{G}_{1q}^{i(m)} = G_{1q}^{i(m)} - \gamma_{i-1} G_{1q}^{i(m-1)}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad m \in \{1, 2\}, \quad q \in \{1, 2, 3\}. \quad (23)$$

Підставляючи співвідношення термопружності (17), (18) і геометричні співвідношення між компонентами деформації відлікової поверхні підкладка – покриття та переміщеннями цієї поверхні [4, с. 54; 7, с. 71]

$$\varepsilon = \Pi [u_1, v_1, w_1]^T \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_0 = 0, \quad (24)$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial_1(\cdot)}{A_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} & & k_1 \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} & \frac{\partial_2(\cdot)}{A_2} & & k_2 \\ \frac{A_1 \partial_2(\cdot)}{A_2 A_1} & \frac{A_2 \partial_1(\cdot)}{A_1 A_2} & & 0 \\ \frac{\partial_1(k_1(\cdot))}{A_1} & \frac{k_2 A_{1,2}}{A_1 A_2} & -\frac{1}{A_1} \partial_1 \left(\frac{\partial_1(\cdot)}{A_1} \right) - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2^2} \partial_2(\cdot) & \\ k_1 \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} & \frac{\partial_2(k_2(\cdot))}{A_2} & -\frac{1}{A_2} \partial_2 \left(\frac{\partial_2(\cdot)}{A_2} \right) - \frac{A_{2,1}}{A_1^2 A_2} \partial_1(\cdot) & \\ k_1 \frac{A_1 \partial_2(\cdot)}{A_2 A_1} & k_2 \frac{A_2 \partial_1(\cdot)}{A_1 A_2} & -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\partial_1 \partial_2(\cdot) - \frac{A_{1,2}}{A_1} \partial_1(\cdot) - \frac{A_{2,1}}{A_2} \partial_2(\cdot) \right) & \end{pmatrix}$$

у трансформовані рівняння рівноваги (11) і враховуючи неперервність переміщень на поверхні тіло – покриття (2), отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{j3}^{\mathbf{I}} + \mathbf{L}_j [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} + \sum_{i=1}^n p_{j\epsilon}^i \epsilon_3^i &= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} - \mathbf{F}_j \Theta_t, \quad j \in \{1, 2\}, \\ \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \mathbf{L}_3 [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} + \sum_{i=1}^n p_{3\epsilon}^i \epsilon_3^i &= \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \delta \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] - \mathbf{F}_3 \Theta_t, \\ -\frac{\delta}{2} \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \mathbf{L}_4 [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} + \sum_{i=1}^n p_{4\epsilon}^i \epsilon_3^i &= \\ &= \frac{\delta}{2} \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + N_{3t} + \mathbf{F}_4 \Theta_t. \end{aligned} \quad (25)$$

Тут використано позначення

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_m &= -\mathbf{F}_m \mathbf{K} \mathcal{P}, \\ p_{m\epsilon}^i &= -\mathbf{F}_m \mathbf{K}_3^i, \quad m \in \{1, 2, 3\}, \\ \mathbf{L}_4 &= \left[\mathbf{F}_4 \mathbf{K} + [G_{13}^{(0)}, G_{13}^{(0)}, 0, G_{13}^{(1)}, G_{13}^{(1)}, 0] \right] \mathcal{P}, \\ p_{4\epsilon}^i &= \mathbf{F}_4 \mathbf{K}_3^i + G_{33}^{i(0)} + (k_1 + k_2) \tilde{G}_{13}^{i(1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Використовуючи контактні умови (3), співвідношення (16) для σ_{33}^i і формули (5), отримуємо вирази для поперечних деформацій i -го шару через поперечну деформацію першого шару та компоненти деформації базисної оболонки покриття:

$$\epsilon_3^i = \mathcal{D}^i \epsilon_3^1 + \mathcal{F}_1^i \epsilon_1 + \mathcal{F}_2^i \epsilon_2 + \mathcal{G}_1^i x_1 + \mathcal{G}_2^i x_2 + \eta^i, \quad i \in \{2, \dots, n\}, \quad (28)$$

де коефіцієнти $\mathcal{Y}^i \in \{\mathcal{D}^i, \mathcal{F}_1^i, \mathcal{F}_2^i, \mathcal{G}_1^i, \mathcal{G}_2^i, \eta^i\}$ визначаються так:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^i &= \frac{1}{B_{33}^i} \left\{ B_{33}^{i-1} \mathcal{Y}^{i-1} - \bar{B}_{13}^i (k_1 + k_2) \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \mathcal{Y}^j - \right. \\ &\quad \left. - \bar{B}_{13}^i \left[0, 1, 1, \gamma_{i-1}, \gamma_{i-1}, -\frac{\bar{B}\beta_{13}^i}{\bar{B}_{13}^i} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}^1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0],$$

$$\bar{B}_{13}^i = B_{13}^i - B_{13}^{i-1}, \quad (29)$$

$$\overline{B\beta}_{13}^i = (2B_{13}^i\beta_1^i + B_{33}^i\beta_3^i - 2B_{13}^{i-1}\beta_1^{i-1} - B_{33}^{i-1}\beta_3^{i-1})\bar{t}^i \Big|_{\gamma=\gamma_{i-1}}, \quad i \in \{2, \dots, n\}. \quad (30)$$

Підставимо формули (28) у рівняння (25), використовуючи позначення (20), співвідношення (24) та умову неперервності (2):

$$\begin{aligned} \sigma_{j3}^{\mathbf{I}} + \mathbf{L}'_j[u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} + \tilde{p}_{j\epsilon}^{\mathcal{D}}\epsilon_3^1 &= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} - \mathbf{F}_j\Theta_t - \tilde{p}_{j\epsilon}^{\eta}, \quad j \in \{1, 2\}, \\ \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \mathbf{L}'_3[u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} + \tilde{p}_{3\epsilon}^{\mathcal{D}}\epsilon_3^1 &= \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \delta\mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] - \mathbf{F}_3\Theta_t - \tilde{p}_{3\epsilon}^{\eta}, \\ -\frac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \frac{\delta^2}{12}\mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \mathbf{L}'_4[u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} + \tilde{p}_{4\epsilon}^{\mathcal{D}}\epsilon_3^1 &= \\ &= \frac{\delta}{2}\sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \frac{\delta^2}{12}\mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + N_{3t} + \mathbf{F}_4\Theta_t - \tilde{p}_{4\epsilon}^{\eta}, \end{aligned} \quad (31)$$

де

$$\mathbf{L}'_m = \mathbf{L}_m + [\tilde{p}_{m\epsilon}^{\mathcal{F}_1}, \tilde{p}_{m\epsilon}^{\mathcal{F}_2}, 0, \tilde{p}_{m\epsilon}^{\mathcal{G}_1}, \tilde{p}_{m\epsilon}^{\mathcal{G}_2}, 0]\Pi,$$

а також введено позначення

$$\tilde{p}_{m\epsilon}^X = \sum_{i=1}^n p_{m\epsilon}^i X^i, \quad m \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad X \in \{\mathcal{D}, \eta, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\}.$$

Виключаючи ϵ_3^1 зі співвідношень (31), остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{j3}^{\mathbf{I}} + \frac{\delta}{2}d_j\sigma_{33}^{\mathbf{I}} - \frac{\delta^2}{12}d_j\mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \tilde{\mathbf{L}}_j[u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} &= \\ &= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} - \frac{\delta}{2}d_j\sigma_{33}^{\mathbf{II}} - \frac{\delta^2}{12}d_j\mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + f_{jt}, \quad j \in \{1, 2\}, \\ \left(1 + \frac{\delta}{2}d_3\right)\sigma_{33}^{\mathbf{I}} - \frac{\delta^2}{12}d_3\mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \tilde{\mathbf{L}}_3[u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} &= \\ &= \left(1 - \frac{\delta}{2}d_3\right)\sigma_{33}^{\mathbf{II}} - \frac{\delta^2}{12}d_3\mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + f_{3t}, \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$d_j = \frac{\tilde{p}_{j\epsilon}^{\mathcal{D}}}{\tilde{p}_{4\epsilon}^{\mathcal{D}}},$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_j = \mathbf{L}'_j - d_j\mathbf{L}'_4, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

$$\begin{aligned} f_{jt} &= \left(\frac{\delta}{2}d_j(k_1 + k_2) - A_j^{-1}\partial_j\right)N_{1t} - d_jN_{3t} - \\ &\quad - \left(d_j(k_1 + k_2) + A_j^{-1}k_j\partial_j\right)M_t - \tilde{p}_{j\epsilon}^{\eta} + d_j\tilde{p}_{4\epsilon}^{\eta}, \quad j \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{3t} &= \left(1 + \frac{\delta}{2}d_3\right)(k_1 + k_2)N_{1t} - d_3N_{3t} - \\ &\quad - (d_3(k_1 + k_2) + \Delta)M_t - \tilde{p}_{3\epsilon}^{\eta} + d_3\tilde{p}_{4\epsilon}^{\eta}, \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{1}{A_1A_2} \left(\partial_1 \left(\frac{A_2}{A_1} \partial_1 \right) + \partial_2 \left(\frac{A_1}{A_2} \partial_2 \right) \right).$$

Оскільки співвідношення (32) пов'язують компоненти тензора напружень і вектора переміщень на межі тіла з компонентами заданого поверхневого навантаження, то їх можна трактувати як узагальнені граничні механічні умови, які враховують вплив теплових деформацій у багатошаровому трансверсально-ізотропному покритті.

3. Випадок відсутності згинних деформацій і кручення поверхні поділу тіло – трансверсально-ізотропне покриття. Коли відсутні деформації згину і кручення поверхні поділу тіло – покриття ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{12} = 0$), можна отримати спрощений варіант УГУ, в якому будуть наявні лише компоненти тензора напружень.

У цьому випадку, з огляду на неперервність тангенціальних деформацій уздовж поверхні поділу тіло – покриття

$$\varepsilon_1 = e_{11}^{\mathbf{I}}, \quad \varepsilon_2 = e_{22}^{\mathbf{I}}, \quad \varepsilon_{12} = 2e_{12}^{\mathbf{I}}, \quad (33)$$

використовуючи співвідношення Дюгамеля – Неймана для ізотропного матеріалу підкладки

$$e_{j\ell}^{\mathbf{I}} = \frac{1 + \nu^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} \sigma_{j\ell}^{\mathbf{I}} - \frac{\nu^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} \sigma_{kk}^{\mathbf{I}} \delta_{j\ell} + \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} \delta_{j\ell}, \quad j, \ell \in \{1, 2, 3\}, \quad (34)$$

(де $\delta_{j\ell}$ – символ Кронекера; $E^{\mathbf{I}}$ – модуль Юнга; $\nu^{\mathbf{I}}$ та $\beta^{\mathbf{I}}$ – коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення тіла; $\bar{t}^{\mathbf{I}} = t^{\mathbf{I}} - t_0^{\mathbf{I}}$, $t_0^{\mathbf{I}}$ – початкова температура в тілі), компоненти деформації базисної поверхні оболонки покриття можемо виразити лише через граничні значення напружень тіла з урахуванням означення (20):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Pi_{\sigma} [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^{\top} + [1, 1, 0, 0, 0, 0]^{\top} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} \quad \text{при} \quad \gamma = 0, \quad (35)$$

де

$$\mathbf{P}_{\sigma} = (E^{\mathbf{I}})^{-1} \begin{vmatrix} 1 & -\nu^{\mathbf{I}} & -\nu^{\mathbf{I}} & 0 \\ -\nu^{\mathbf{I}} & 1 & -\nu^{\mathbf{I}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu^{\mathbf{I}}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Підставляючи співвідношення (17), (18), (35) у трансформовані рівняння рівноваги (11) і нехтуючи членами вищого порядку малості, отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{j3}^{\mathbf{I}} + \mathbf{p}_j [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^{\top} + p_{jt} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} + \sum_{i=1}^n p_{je}^i \varepsilon_3^i &= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} - \mathbf{F}_j \Theta_t, \quad j \in \{1, 2\}, \\ \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \mathbf{p}_3 [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^{\top} + p_{3t} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} + \sum_{i=1}^n p_{3e}^i \varepsilon_3^i &= \\ &= \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \delta \mathcal{V} [\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] - \mathbf{F}_3 \Theta_t, \\ -\frac{\delta}{2} \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V} [\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \mathbf{p}_4 [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^{\top} + p_{4t} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} + \sum_{i=1}^n p_{4e}^i \varepsilon_3^i &= \\ &= \frac{\delta}{2} \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V} [\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + N_{3t} + \mathbf{F}_4 \Theta_t. \end{aligned} \quad (37)$$

Тут використано позначення

$$\mathbf{p}_m = -\mathbf{F}_m \mathbf{K} \Pi_{\sigma}, \quad m \in \{1, 2, 3\},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_4 &= [\mathbf{F}_4 \mathbf{K} + [G_{13}^{(0)}, G_{13}^{(0)}, 0, G_{13}^{(1)}, G_{13}^{(1)}, 0]] \mathbf{\Pi}_\sigma, \\
p_{jt} &= -A_j^{-1} [G_{11}^{(0)} + G_{12}^{(0)} + k_j(G_{11}^{(1)} + G_{12}^{(1)})] \partial_j, \quad j \in \{1, 2\}, \\
p_{3t} &= (k_1 + k_2)(G_{11}^{(0)} + G_{12}^{(0)}) - (G_{11}^{(1)} + G_{12}^{(1)}) \Delta, \\
p_{4t} &= 2G_{13}^{(0)} + (k_1 + k_2)(\tilde{G}_{11}^{(1)} + \tilde{G}_{12}^{(1)}), \\
\tilde{G}_{1q}^{(m)} &= G_{1q}^{(m)} - 0.5\delta G_{1q}^{(m-1)}, \quad m, q \in \{1, 2\},
\end{aligned} \tag{38}$$

а \mathbf{F}_j , \mathbf{K} , $\mathbf{\Pi}_\sigma$, $p_{j\epsilon}^i$, $G_{1\ell}^{(m)}$ визначаються формулами (12)–(15), (21), (36), (26), (27), (22) відповідно.

Рекурентні співвідношення (28) для поперечних деформацій i -го шару для розглядуваної ситуації $x_1 = x_2 = x_{12} = 0$ набудуть вигляду

$$\varepsilon_3^i = \mathcal{D}^i \varepsilon_3^1 + \mathcal{F}_1^i \varepsilon_1 + \mathcal{F}_2^i \varepsilon_2 + \eta^i, \quad i \in \{2, \dots, n\}, \tag{39}$$

де коефіцієнти $\tilde{\mathcal{Y}}^i \in \{\mathcal{D}^i, \mathcal{F}_1^i, \mathcal{F}_2^i, \eta^i\}$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{Y}}^i &= \frac{1}{B_{33}^i} \left\{ B_{33}^{i-1} \tilde{\mathcal{Y}}^{i-1} - \bar{B}_{13}^i (k_1 + k_2) \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \tilde{\mathcal{Y}}^j - \bar{B}_{13}^i \left[0, 1, 1, -\frac{\overline{B\beta}_{13}^i}{\bar{B}_{13}^i} \right] \right\}, \\
& i \in \{2, \dots, n\}, \\
\tilde{\mathcal{Y}}^1 &= [1, 0, 0, 0],
\end{aligned}$$

а \bar{B}_{13}^i , $\overline{B\beta}_{13}^i$ – за формулами (29) і (30).

Підставимо формули (39) у рівняння (37), використовуючи позначення (20) та формулу (35). Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{j3}^{\mathbf{I}} + \mathbf{p}'_j [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^\top + p'_{jt} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} + \tilde{p}_{j\epsilon}^{\mathcal{D}} \varepsilon_3^1 &= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} - \mathbf{F}_j \Theta_t - \tilde{p}_{j\epsilon}^{\mathbf{n}}, \\
& j \in \{1, 2\}, \\
\sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \mathbf{p}'_3 [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^\top + p'_{3t} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} + \tilde{p}_{3\epsilon}^{\mathcal{D}} \varepsilon_3^1 &= \\
&= \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \delta \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] - \mathbf{F}_3 \Theta_t - \tilde{p}_{3\epsilon}^{\mathbf{n}}, \\
-\frac{\delta}{2} \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \mathbf{p}'_4 [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^\top + p'_{4t} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} + \tilde{p}_{4\epsilon}^{\mathcal{D}} \varepsilon_3^1 &= \\
&= \frac{\delta}{2} \sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + N_{3t} + \mathbf{F}_4 \Theta_t - \tilde{p}_{4\epsilon}^{\mathbf{n}},
\end{aligned} \tag{40}$$

де $\mathbf{p}'_m = \mathbf{p}_m + [\tilde{p}_{m\epsilon}^{\mathcal{F}_1}, \tilde{p}_{m\epsilon}^{\mathcal{F}_2}, 0, 0, 0, 0] \mathbf{\Pi}_\sigma$, $p'_{mt} = p_{mt} + \tilde{p}_{m\epsilon}^{\mathcal{F}_1} + \tilde{p}_{m\epsilon}^{\mathcal{F}_2}$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Виключаючи ε_3^1 зі співвідношень (40), остаточно одержимо

$$\begin{aligned}
\sigma_{j3}^{\mathbf{I}} + \frac{\delta}{2} d_j \sigma_{33}^{\mathbf{I}} - \frac{\delta^2}{12} d_j \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \tilde{\mathbf{p}}_j [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^\top + \bar{p}_{jt} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} &= \\
&= \sigma_{j3}^{\mathbf{II}} - \frac{\delta}{2} d_j \sigma_{33}^{\mathbf{II}} - \frac{\delta^2}{12} d_j \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + f_{jt}, \quad j \in \{1, 2\}, \\
(1 + \frac{\delta}{2} d_3) \sigma_{33}^{\mathbf{I}} - \frac{\delta^2}{12} d_3 \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] + \tilde{\mathbf{p}}_3 [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^\top + \bar{p}_{3t} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} &= \\
&= (1 - \frac{\delta}{2} d_3) \sigma_{33}^{\mathbf{II}} - \delta \left(1 + \frac{\delta d_3}{12} \right) \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}}] + f_{3t},
\end{aligned} \tag{41}$$

де $\tilde{\mathbf{p}}_j = \mathbf{p}'_j - d_j \mathbf{p}'_4$, $\bar{p}_{jt} = p'_{jt} - d_j p'_{4t}$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

4. Визначення термонапруженого стану покриття. Після знаходження напружено-деформованого стану тіла на основі рівнянь тривимірної теорії термопружності і використанні одного з варіантів УГУ (32) або (41) знаходимо напружений стан у покритті за допомогою формул відновлення.

У цьому випадку, підставляючи вирази для деформацій (4) і (5) у співвідношення Дюгамеля – Неймана (16), отримуємо вирази для напружень через компоненти деформації поверхні поділу покриття – тіло та поперечну деформацію шарів покриття:

$$\begin{aligned} \sigma_{mm}^i(\gamma) = & B_{11}^i \varepsilon_m + B_{12}^i \varepsilon_{3-m} + B_{13}^i \varepsilon_3^i + (B_{11}^i \mathbf{x}_m + B_{12}^i \mathbf{x}_{3-m}) \gamma + \\ & + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_{3-m}) \left(\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \varepsilon_3^j(\alpha_1, \alpha_2) + \right. \\ & \left. + (\gamma - \gamma_{i-1}) \varepsilon_3^i(\alpha_1, \alpha_2) \right) - \sum_{\ell=1}^3 B_{m\ell}^i \beta_\ell^i \bar{t}^i(\gamma), \quad m \in \{1, 2\}, \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^i(\gamma) = & B_{13}^i (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + B_{13}^i (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \gamma + B_{33}^i \varepsilon_3^i + \\ & + B_{13}^i (k_1 + k_2) \left(\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \varepsilon_3^j(\alpha_1, \alpha_2) + (\gamma - \gamma_{i-1}) \varepsilon_3^i(\alpha_1, \alpha_2) \right) - \\ & - \sum_{\ell=1}^3 B_{3\ell}^i \beta_\ell^i \bar{t}^i(\gamma), \quad (43) \end{aligned}$$

$$\sigma_{12}^i(\gamma) = B_{66}^i (\varepsilon_{12} + 2\mathbf{x}_{12} \gamma), \quad \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (44)$$

Підставимо вираз (28) для поперечної деформації у (42), (43):

$$\begin{aligned} \sigma_{mm}^i(\gamma) = & B_{11}^i \varepsilon_m + B_{12}^i \varepsilon_{3-m} + (B_{11}^i \mathbf{x}_m + B_{12}^i \mathbf{x}_{3-m}) \gamma + \\ & + \sum_{s=1}^2 \left\{ \left[B_{13}^i \mathcal{F}_s^i + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_{3-m}) \bar{\mathcal{F}}_s(\gamma) \right] \varepsilon_s + \right. \\ & \left. + \left[B_{13}^i \mathcal{G}_s^i + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_{3-m}) \bar{\mathcal{G}}_s(\gamma) \right] \mathbf{x}_s \right\} + \\ & + \left[B_{13}^i \mathcal{D}^i + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_{3-m}) \bar{\mathcal{D}}(\gamma) \right] \varepsilon_3^1 + B_{13}^i \eta^i + \\ & + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_{3-m}) \bar{\eta}(\gamma) - \sum_{\ell=1}^3 B_{1\ell}^i \beta_\ell^i \bar{t}^i(\gamma), \quad m \in \{1, 2\}, \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^i(\gamma) = & \sum_{s=1}^2 \left\{ \left[B_{13}^i + B_{33}^i \mathcal{F}_s^i + B_{13}^i (k_1 + k_2) \bar{\mathcal{F}}_s(\gamma) \right] \varepsilon_s + \right. \\ & \left. + \left[B_{13}^i \gamma + B_{33}^i \mathcal{G}_s^i + B_{13}^i (k_1 + k_2) \bar{\mathcal{G}}_s(\gamma) \right] \mathbf{x}_s \right\} + \\ & + \left[B_{33}^i \mathcal{D}^i + B_{13}^i (k_1 + k_2) \bar{\mathcal{D}}(\gamma) \right] \varepsilon_3^1 + B_{33}^i \eta^i + \\ & + B_{13}^i (k_1 + k_2) \bar{\eta}(\gamma) - \sum_{\ell=1}^3 B_{3\ell}^i \beta_\ell^i \bar{t}^i(\gamma), \\ & \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (46) \end{aligned}$$

Тут використано позначення

$$\bar{g}(\gamma) = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j g^j + (\gamma - \gamma_{i-1}) g^i, \quad g \in \{\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \eta\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (47)$$

З останньої з формул (31) випливає такий вираз для поперечної деформації:

$$\varepsilon_3^1 = \frac{1}{\tilde{p}_{4\varepsilon}^{\mathcal{D}}} \left\{ \frac{\delta}{2} (\sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \sigma_{33}^{\mathbf{I}}) + \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V} [\sigma_{13}^{\mathbf{II}} - \sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}} - \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] - \right. \\ \left. - \mathbf{L}'_4 [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} + N_{3t} + \mathbf{F}_4 \Theta_t - \tilde{p}_{4\varepsilon}^{\eta} \right\}. \quad (48)$$

Внаслідок неперервності переміщень на поверхні поділу тіло – покриття (2) з (24) випливає, що

$$\varepsilon = \Pi [u_{\mathbf{I}}, v_{\mathbf{I}}, w_{\mathbf{I}}]^{\top} \quad \text{при} \quad \gamma = 0. \quad (49)$$

Отже, напруження в покритті визначаються за формулами (44)–(46), де компоненти деформації відлікової поверхні поділу покриття – тіло пов'язані з граничними значеннями переміщень тіла співвідношенням (49), а поперечна деформація першого шару покриття визначається за формулою (48).

За відсутності згинних деформацій та кручення поверхні поділу тіло – покриття ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{12} = 0$) з (44)–(46), використовуючи неперервність тангенціальних деформацій уздовж поверхні поділу покриття – тіло (33) та співвідношення Дюгамеля – Неймана (34) для тіла, отримаємо такі формули для визначення тангенціальних напружень у покритті:

$$\sigma_{mm}^i(\gamma) = \left[B_{11}^i - v^{\mathbf{I}} B_{12}^i + B_{13}^i (\mathcal{F}_m^i - v^{\mathbf{I}} \mathcal{F}_j^i) + \right. \\ \left. + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_j) (\bar{\mathcal{F}}_m(\gamma) - v^{\mathbf{I}} \bar{\mathcal{F}}_j(\gamma)) \right] \frac{\sigma_{mm}^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} + \\ \left[B_{12}^i - v^{\mathbf{I}} B_{11}^i + (1 - v^{\mathbf{I}}) B_{13}^i (\mathcal{F}_1^i + \mathcal{F}_2^i) + \right. \\ \left. + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_j) (\bar{\mathcal{F}}_j(\gamma) - v^{\mathbf{I}} \bar{\mathcal{F}}_m(\gamma)) \right] \frac{\sigma_{jj}^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} + \\ \left[B_{11}^i + B_{12}^i - B_{13}^i (\mathcal{F}_1^i + \mathcal{F}_2^i) - (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_j) \times \right. \\ \left. \times (\bar{\mathcal{F}}_1(\gamma) + \bar{\mathcal{F}}_2(\gamma)) \right] \left[-\frac{v^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} \right] + \\ \left[B_{13}^i \mathcal{D}^i + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_j) \bar{\mathcal{D}}(\gamma) \right] \varepsilon_3^1 + B_{13}^i \eta^i + \\ \left. + (B_{11}^i k_m + B_{12}^i k_j) \bar{\eta}(\gamma) - \sum_{\ell=1}^3 B_{m\ell}^i \beta_{\ell}^i \bar{t}^i(\gamma), \right. \\ \left. m \in \{1, 2\}, \quad j = 3 - m, \quad (50) \right.$$

$$\sigma_{33}^i(\gamma) = \sum_{s=1}^2 \left\{ B_{33}^i (\mathcal{F}_s^i - v^{\mathbf{I}} \mathcal{F}_{3-s}^i) + B_{13}^i \left[1 - v^{\mathbf{I}} + (k_1 + k_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\bar{\mathcal{F}}_s(\gamma) - v^{\mathbf{I}} \bar{\mathcal{F}}_{3-s}(\gamma)) \right] \right\} \frac{\sigma_{ss}^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} + \left\{ B_{33}^i (\mathcal{F}_1^i + \mathcal{F}_2^i) + \right. \\ \left. + B_{13}^i \left[2 + (k_1 + k_2) (\bar{\mathcal{F}}_1(\gamma) + \bar{\mathcal{F}}_2(\gamma)) \right] \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(-\frac{\mathbf{v}^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} \right) + \left[B_{33}^i \mathcal{D}^i + B_{13}^i (k_1 + k_2) \bar{\mathcal{D}}(\gamma) \right] \varepsilon_3^1 + \\ & + B_{33}^i \eta^i + B_{13}^i (k_1 + k_2) \bar{\eta}(\gamma) - \sum_{\ell=1}^3 B_{3\ell}^i \beta_{\ell}^i \bar{t}^i(\gamma), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\sigma_{12}^i(\gamma) = B_{66}^i \frac{1 + \mathbf{v}^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} \sigma_{12}^{\mathbf{I}}, \quad \gamma_{i-1} \leq \gamma \leq \gamma_i, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

де поперечну деформацію першого шару ε_3^1 знаходимо з останньої з формул (40):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^1 = \frac{1}{\tilde{p}_{4\varepsilon}} & \left\{ \frac{\delta}{2} (\sigma_{33}^{\mathbf{II}} + \sigma_{33}^{\mathbf{I}}) + \frac{\delta^2}{12} \mathcal{V}[\sigma_{13}^{\mathbf{II}} - \sigma_{13}^{\mathbf{I}}, \sigma_{23}^{\mathbf{II}} - \sigma_{23}^{\mathbf{I}}] - \right. \\ & \left. - \mathbf{p}'_4 [\sigma_{11}^{\mathbf{I}}, \sigma_{22}^{\mathbf{I}}, \sigma_{33}^{\mathbf{I}}, \sigma_{12}^{\mathbf{I}}]^{\top} - p'_{4t} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t}^{\mathbf{I}} + N_{3t} + \mathbf{F}_4 \Theta_t - \tilde{p}_{4\varepsilon}^{\eta} \right\}. \end{aligned}$$

Таким чином, визначення термонапруженого стану системи тіло – покриття відбувається за два етапи:

- 1°) розв'язування некласичної крайової задачі термопружності для тіла з використанням УГУ;
- 2°) знаходження температурних напружень у покритті за формулами відновлення.

5. Тестова задача. Як тестовий приклад розглянемо задачу про визначення усталеного термопружного стану суцільного циліндра радіуса R з одношаровим трансверсально-ізотропним покриттям за дії рівномірного нагріву $\bar{t} = \bar{t}^{\mathbf{I}} = \bar{t}^i = \text{const}$. Вважаємо, що торці циліндра зафіксовані в осьовому напрямку і всі напруження на межі покриття – середовище відсутні. Тоді перші дві з умов (41) задовольняються тотожно, а третя УГУ (41) при $r = R$ набуде вигляду

$$(1 + \bar{p}_{33}) \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \bar{p}_{31} \sigma_{11}^{\mathbf{I}} + \bar{p}_{32} \sigma_{22}^{\mathbf{I}} + \bar{p}_{3t} \beta^{\mathbf{I}} \bar{t} = f_{3t}, \quad (52)$$

де

$$\bar{p}_{3m} = p'_{3m} - d_3 \left(p'_{4m} - \frac{\delta}{2} \delta_{3m} \right), \quad m \in \{1, 2, 3, t\}, \quad d_3 = \frac{p_{3\varepsilon}^1}{p_{4\varepsilon}^1},$$

$$p'_{3j} = \frac{G_{1\ell}^{(0)} - \mathbf{v}^{\mathbf{I}} G_{1j}^{(0)}}{R E^{\mathbf{I}}}, \quad p'_{4j} = \frac{\tilde{G}_{1\ell}^{(1)} - \mathbf{v}^{\mathbf{I}} \tilde{G}_{1j}^{(1)}}{R E^{\mathbf{I}}} + \frac{(1 - \mathbf{v}^{\mathbf{I}}) G_{13}^{(0)}}{E^{\mathbf{I}}},$$

$$j \in \{1, 2\}, \quad \ell = 3 - j,$$

$$p'_{33} = -\mathbf{v}^{\mathbf{I}} \frac{1}{E^{\mathbf{I}}} p'_{3t}, \quad p'_{3t} = \frac{G_{11}^{(0)} + G_{12}^{(0)}}{R}, \quad p'_{43} = -\mathbf{v}^{\mathbf{I}} \frac{1}{E^{\mathbf{I}}} p'_{4t},$$

$$p'_{4t} = 2G_{13}^{(0)} + R^{-1} (\tilde{G}_{11}^{(1)} + \tilde{G}_{12}^{(1)}), \quad p_{3\varepsilon}^1 = R^{-1} G_{13}^{1(0)} + R^{-2} \tilde{G}_{11}^{1(1)},$$

$$p_{4\varepsilon}^1 = G_{33}^{1(0)} + R^{-1} (\tilde{G}_{13}^{1(1)} + G_{13}^{1(1)} - \frac{\delta}{2} G_{13}^{1(0)}) + R^{-2} (\tilde{G}_{11}^{1(2)} - \frac{\delta}{2} G_{11}^{1(1)}),$$

$$f_{3t} = R^{-1} \left(1 + \frac{\delta}{2} d_3 \right) N_{1t} - d_3 N_{3t} - d_3 R^{-1} M_t.$$

Величини N_{1t} , N_{3t} , M_t визначаємо за формулами (19), а $G_{j\ell}^{1(m)}$, $G_{j\ell}^{(m)}$, $\tilde{G}_{1q}^{1(m)}$, $\tilde{G}_{1q}^{(m)}$ – за співвідношеннями (22), (23) та (38).

Використовуючи розв'язок рівнянь рівноваги для циліндра в напруженнях, який задовольняє УГУ (52) та умову обмеженості $\sigma_{33}^{\mathbf{I}}|_{r=0} \neq \infty$, умову $e_{11}^{\mathbf{I}} \equiv 0$ і співвідношення Дюгамеля – Неймана (34), знаходимо напруження у циліндрі у вигляді [22]:

$$\sigma_{33}^{\mathbf{I}} = \sigma_{22}^{\mathbf{I}} = \frac{f_{3t} - (\bar{p}_{3t} - \bar{p}_{31}E^{\mathbf{I}})\beta^{\mathbf{I}\bar{t}}}{1 + 2\nu^{\mathbf{I}}\bar{p}_{31} + \bar{p}_{32} + \bar{p}_{33}}, \quad (53)$$

$$\sigma_{11}^{\mathbf{I}} = 2\nu^{\mathbf{I}}\sigma_{33}^{\mathbf{I}} - E^{\mathbf{I}}\beta^{\mathbf{I}\bar{t}}. \quad (54)$$

Підставляючи вирази (53), (54) у формули відновлення (50) і (51), визначаємо напруження в покритті:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^1(r) &= \frac{1 - \nu^{\mathbf{I}} - 2(\nu^{\mathbf{I}})^2}{E^{\mathbf{I}}} B_{12}^1 \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + (1 + \nu^{\mathbf{I}}) B_{12}^1 \beta^{\mathbf{I}\bar{t}} + \\ &\quad + \left(B_{13}^1 + B_{12}^1 \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \right) \varepsilon_3^1 - \sum_{\ell=1}^3 B_{1\ell}^1 \beta_{\ell}^1 \bar{t}, \\ \sigma_{22}^1(r) &= \frac{1 - \nu^{\mathbf{I}} - 2(\nu^{\mathbf{I}})^2}{E^{\mathbf{I}}} B_{11}^1 \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + (1 + \nu^{\mathbf{I}}) B_{11}^1 \beta^{\mathbf{I}\bar{t}} + \\ &\quad + \left(B_{13}^1 + B_{12}^1 \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \right) \varepsilon_3^1 - \sum_{\ell=1}^3 B_{1\ell}^1 \beta_{\ell}^1 \bar{t}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^1(r) &= B_{13}^1 (1 + \nu^{\mathbf{I}}) \left(\frac{1 - 2\nu^{\mathbf{I}}}{E^{\mathbf{I}}} \sigma_{33}^{\mathbf{I}} + \beta^{\mathbf{I}\bar{t}} \right) + \left(B_{33}^1 + B_{13}^1 \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \right) \varepsilon_3^1 - \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^3 B_{3\ell}^1 \beta_{\ell}^1 \bar{t}, \quad R \leq r \leq R + \delta, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^1 &= \frac{1}{p_{4\varepsilon}^1} \left\{ \left(\frac{\delta}{2} - 2\nu^{\mathbf{I}} p'_{41} - p'_{42} - p'_{43} \right) \sigma_{33}^{\mathbf{I}} - \right. \\ &\quad \left. - (p'_{4t} - p'_{41} E^{\mathbf{I}}) \beta^{\mathbf{I}\bar{t}} + N_{3t} + \mathbf{F}_4 \Theta_t \right\}. \end{aligned}$$

Відповідно, радіальну пружну деформацію в покритті визначаємо за формулою

$$e_{33}^{1(\text{elast})} = \varepsilon_3^1 - \beta_3^1 \bar{t}, \quad (56)$$

а колову та осьову пружні деформації – за співвідношеннями закону Гука

$$\begin{aligned} e_{22}^{1(\text{elast})} &= \frac{1}{E_1^1} (\sigma_{22}^1 - \nu_{21}^1 \sigma_{11}^1 - \nu_{31}^1 \sigma_{33}^1), \\ \tilde{e}_{11}^{1(\text{elast})} &= \frac{1}{E_1^1} (\sigma_{11}^1 - \nu_{21}^1 \sigma_{22}^1 - \nu_{31}^1 \sigma_{33}^1). \end{aligned} \quad (57)$$

Точний розв'язок цієї задачі наведено в [21] (за врахування перепозначення індексів $1 \leftrightarrow 3$ у записі пружних коефіцієнтів):

$$\sigma_{33}^{\mathbf{I}} = \sigma_{22}^{\mathbf{I}} = \frac{1 - \left(\frac{R}{R_1} \right)^{2d}}{Z_{2d}} g + \chi_1 \left(1 - \left(\frac{R}{R_1} \right)^{d-1} \right), \quad (58)$$

$$\sigma_{11}^{\mathbf{I}} = 2\nu^{\mathbf{I}} \sigma_{33}^{\mathbf{I}} - E^{\mathbf{I}} \beta^{\mathbf{I}\bar{t}},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^1(r) &= \frac{g}{Z_{2d}} \left(\frac{R}{r} \right)^{d+1} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^{2d} \right) + \chi_1 \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^{d-1} \right), \\
\sigma_{22}^1(r) &= -d \frac{g}{Z_{2d}} \left(\frac{R}{r} \right)^{d+1} \left(1 + \left(\frac{r}{R_1} \right)^{2d} \right) + \chi_1 \left(1 - d \left(\frac{r}{R_1} \right)^{d-1} \right), \\
\sigma_{11}^1(r) &= v_{21}^1 \sigma_{22}^1(r) + v_{31}^1 \sigma_{33}^1(r) - E_1^1 \beta_1^1 \bar{t}, \quad R \leq r \leq R + \delta,
\end{aligned} \tag{59}$$

де

$$\begin{aligned}
R_1 &= R + \delta_1, \quad g = (\beta_1^1 - (1 + v^I) \beta^I) \bar{t} - \chi_1 Z_{d-1} - \frac{v_{21}^1}{E_1^1} \chi_2, \\
\chi_1 &= \frac{g_1 \left(d^2 + \frac{B_{13}^1}{B_{33}^1} \right) - g_2 \left(1 + \frac{B_{13}^1}{B_{33}^1} \right)}{1 - d^2}, \quad \chi_2 = (g_1 - g_2) \frac{B_{13}^1 + B_{12}^1}{B_{33}^1 (1 - d^2)} - g_2, \\
d &= \sqrt{\frac{B_{11}^1}{B_{33}^1}}, \quad g_1 = (2B_{13}^1 \beta_1^1 + B_{33}^1 \beta_3^1) \bar{t}, \quad g_2 = ((B_{11}^1 + B_{12}^1) \beta_1^1 + B_{13}^1 \beta_3^1) \bar{t}, \\
Z_\zeta &= \left(1 - \left(\frac{R}{R_1} \right)^\zeta \right) \frac{1 - v^I - 2(v^I)^2}{E^I} + \left(\frac{R}{R_1} \right)^\zeta \times \\
&\quad \times \left(\frac{(1 - v_{21}^1) B_{23}^1 d + B_{22}^1 - v_{21}^1 B_{12}^1}{B_{33}^1 d + B_{23}^1} \frac{1}{E_2^1} - \frac{v_{31}^1}{E_3^1} \right) + \frac{v_{31}^1}{E_3^1} - \\
&\quad - \left(\frac{(1 - v_{21}^1) B_{23}^1 d - B_{22}^1 + v_{21}^1 B_{12}^1}{B_{33}^1 d - B_{23}^1} \right)^{\frac{1-d+\zeta}{1+d}} \frac{1}{E_2^1}, \quad \zeta = d - 1, 2d.
\end{aligned}$$

При знаходженні пружно-деформованого стану покриття використовуємо закон Гука – співвідношення (57) для колової та осьової деформацій, а також формулу

$$e_{33}^{1(\text{elast})} = \frac{1}{E_3^1} \sigma_{33}^1 - \frac{v_{31}^1}{E_1^1} (\sigma_{11}^1 + \sigma_{22}^1) \tag{60}$$

для радіальної деформації.

Для кількісного порівняння наближеного і точного розв'язків у табл. 1–табл. 3 наведено результати обчислень безрозмірних колових контактних

міжшарових напружень $\tilde{\sigma}_{22}^I = \lim_{r \rightarrow R-0} \frac{\sigma_{22}^1(r)}{E^I \beta^I \bar{t}}$ у тілі, $\tilde{\sigma}_{22}^1 = \lim_{r \rightarrow R+0} \frac{\sigma_{22}^1(r)}{E^I \beta^I \bar{t}}$ у по-

критті та пружної радіальної деформації $\tilde{e}_{33}^1 = \lim_{r \rightarrow R+0} e_{33}^{1(\text{elast})}(r)$ у покритті на

поверхні поділу покриття – тіло за нагріву $\bar{t} = 100$ К. Обчислення виконано за точними (58)–(60) і наближеними (53), (55), (56) формулами для відносної

товщини покриття δ/R (табл. 1), відносної жорсткості покриття E_1^1/E^I

(табл. 2), ступеня анізотропії E_3^1/E_1^1 (табл. 3) при таких значеннях

геометричних і термомеханічних параметрів: $R = 0.05$ м, $E^I = 400$ ГПа, $v^I = 0.3$, $v_{21}^1 = v_{31}^1 = 0.2$, $\beta^I = 4.4 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\beta_3^1 = \beta_1^1 = 5.5 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹.

Слід зауважити, що результати обчислення пружних додатних деформацій слугують вихідними параметрами для визначення рівня пошкоджуваності керамічних покриттів при теплових навантаженнях [21, 22].

Таблиця 1 ($E_1^1/E^I = 0.1$, $E_3^1/E_1^1 = 0.5$).

$\frac{\delta}{R}$	$\tilde{\sigma}_{22}^I$		$\tilde{\sigma}_{22}^1$		$\tilde{\epsilon}_{33}^1 \cdot 10^4$	
	Точна формула (58)	Наближена формула (53)	Точна формула (59)	Наближена формула (55)	Точна формула (60)	Наближена формула (56)
0.001	$0.2080 \cdot 10^{-4}$	$0.2073 \cdot 10^{-4}$	$-0.2082 \cdot 10^{-1}$	$-0.2084 \cdot 10^{-1}$	2.641	2.639
0.01	$0.2049 \cdot 10^{-3}$	$0.1981 \cdot 10^{-3}$	$-0.2072 \cdot 10^{-1}$	$-0.2092 \cdot 10^{-1}$	2.654	2.626
0.02	$0.4029 \cdot 10^{-3}$	$0.3760 \cdot 10^{-3}$	$-0.2061 \cdot 10^{-1}$	$-0.2101 \cdot 10^{-1}$	2.668	2.612
0.03	$0.5943 \cdot 10^{-3}$	$0.5341 \cdot 10^{-3}$	$-0.2050 \cdot 10^{-1}$	$-0.2111 \cdot 10^{-1}$	2.681	2.596
0.05	$0.9576 \cdot 10^{-3}$	$0.7922 \cdot 10^{-3}$	$-0.2030 \cdot 10^{-1}$	$-0.2133 \cdot 10^{-1}$	2.706	2.563

Таблиця 2 ($\delta/R = 0.1$, $E_3^1/E_1^1 = 0.5$).

$\frac{E_1^1}{E^I}$	$\tilde{\sigma}_{22}^I$		$\tilde{\sigma}_{22}^1$		$\tilde{\epsilon}_{33}^1 \cdot 10^4$	
	Точна формула (58)	Наближена формула (53)	Точна формула (59)	Наближена формула (55)	Точна формула (60)	Наближена формула (56)
0.01	$0.2050 \cdot 10^{-4}$	$0.1982 \cdot 10^{-4}$	$-0.2073 \cdot 10^{-2}$	$-0.2093 \cdot 10^{-2}$	2.654	2.627
0.1	$0.2049 \cdot 10^{-3}$	$0.1981 \cdot 10^{-3}$	$-0.2072 \cdot 10^{-1}$	$-0.2092 \cdot 10^{-1}$	2.654	2.626
1.0	$2.039 \cdot 10^{-3}$	$1.972 \cdot 10^{-3}$	-0.2062	-0.2082	2.652	2.624
10.0	$1.945 \cdot 10^{-2}$	$1.881 \cdot 10^{-2}$	-1.968	-1.991	2.631	2.605
100	$1.334 \cdot 10^{-1}$	$1.288 \cdot 10^{-1}$	$-1.354 \cdot 10^1$	$-1.397 \cdot 10^1$	2.497	2.477

Таблиця 3 ($\delta/R = 0.01$, $E_1^1/E^I = 0.5$).

$\frac{E_3^1}{E_1^1}$	$\tilde{\sigma}_{22}^I$		$\tilde{\sigma}_{22}^1$		$\tilde{\epsilon}_{33}^1 \cdot 10^4$	
	Точна формула (58)	Наближена формула (53)	Точна формула (59)	Наближена формула (55)	Точна формула (60)	Наближена формула (56)
0.5	$1.022 \cdot 10^{-3}$	$9.885 \cdot 10^{-4}$	$-1.034 \cdot 10^{-1}$	$-1.044 \cdot 10^{-1}$	2.653	2.625
1.0	$1.031 \cdot 10^{-3}$	$9.974 \cdot 10^{-4}$	$-1.036 \cdot 10^{-1}$	$-1.040 \cdot 10^{-1}$	1.328	1.315
4.0	$1.038 \cdot 10^{-3}$	$1.004 \cdot 10^{-3}$	$-1.038 \cdot 10^{-1}$	$-1.039 \cdot 10^{-1}$	0.332	0.329
10.0	$1.039 \cdot 10^{-3}$	$1.005 \cdot 10^{-3}$	$-1.039 \cdot 10^{-1}$	$-1.039 \cdot 10^{-1}$	0.133	0.132

На основі проведеного порівняння наближеного і точного розв'язків цієї задачі встановлено, що похибка розрахунку напружено-деформованого стану в тілі та покритті передусім визначається відносною товщиною покриття δ/R (табл. 1). При цьому відносна похибка обчислення контактних напружень в тілі є значно більшою, ніж у покритті, хоча абсолютна похибка є меншою завдяки суттєво меншим значенням цих напружень за абсолютною величиною. З аналізу результатів у табл. 2 випливає, що жорсткість покриття практично не впливає на похибку обчислень напружень в тілі та радіальної деформації в покритті, хоча дещо збільшує похибку обчислень в покритті. З іншого боку, анізотропія майже не впливає на точність обчислення напружень в тілі, хоча збільшує похибку для напружень у покритті при зменшенні модуля Юнга в поперечному напрямі (табл. 3).

Висновки. На основі отриманих з використанням теорії анізотропних оболонок узагальнених граничних умов термомеханічного спряження тіла із середовищем через тонке багаточарове трансверсально-ізотропне покриття розроблено методику розрахунку термопружного стану системи тіло – покриття, яка складається з двох етапів:

- розв'язування некласичної крайової задачі термопружності для тіла з використанням УГУ;
- знаходження температурних напружень у покритті за формулами відновлення через граничні значення переміщень і напружень в тілі (у випадку відсутності згинних деформацій та кручення поверхні поділу тіло – покриття – тільки напружень) з подальшим визначенням пружних деформацій за співвідношеннями закону Гука.

Особливістю виведення УГУ є врахування поперечної деформації кожного шару оболонки покриття як додаткового ступеня свободи.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – Киев: Наук. думка, 1978. – 230 с.
3. Василенко А. Т. Основные соотношения некоторых вариантов уточненных моделей оболочек // Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Емельянов И. Г., Пелех Б. Л., Максимук А. В. Статика элементов конструкций / Под ред. Я. М. Григоренко. – Киев: А. С. К., 1999. – 384 с. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 8. – С. 78–91.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 4.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
6. Захаров Д. Д. Эффективные аппроксимации высокого порядка для слоистых покрытий и прослоек из анизотропных упругих, вязкоупругих и нематических материалов // Прикл. математика и механика. – 2010. – **74**, № 3. – С. 403–418.
Te same: Zakharov D. D. Effective high-order approximations of layered coatings and linings of anisotropic elastic, viscoelastic and nematic materials // J. Appl. Math. Mech. – 2010. – **74**, No. 3. – P. 286–296.
– <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.07.004>.
7. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
8. Сухорольський М. А. Тонке покриття під локальним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 6. – С. 33–38.
Te same: Sukhorol's'kyi M. A. Thin coating under local loading // Mater. Sci. – 2000. – **36**, No. 6. – P. 831–839. – <https://doi.org/10.1023/A:1011378503408>.
9. Швець Р. М., Флячок В. М. Основні рівняння термопружних ортотропних оболонок з урахуванням поперечних зсувних і нормальних деформацій // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 6. – С. 539–543.
10. Шевчук В. А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
11. Шевчук В. А. Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1995. – Вып. 38. – С. 116–120.
Te same: Shevchuk V. A. Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin coating // J. Math. Sci. – 1996. – **81**, No. 6. – P. 3099–3102.
– <https://doi.org/10.1007/BF02362603>.
12. Шевчук В. А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями // Проблемы прочности. – 2000. – № 1. – С. 136–150.
Te same: Shevchuk V. A. Analysis of the stressed state of bodies with multilayer thin coatings // Strength Mater. – 2000. – **32**, No. 1. – P. 92–102.
– <https://doi.org/10.1007/BF02511512>.
13. Шевчук В. А. Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – **19**, Вип. 15(1). – С. 129–139.
14. Шевчук В. А. Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багатшарові неплоскі покриття // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 2. – С. 82–97.

- Te came: *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions of radiant-convection heat exchange of bodies with ambient medium through multilayer nonplanar coatings // *J. Math. Sci.* – 2022. – **261**, No. 1. – P. 95–114.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05741-y>.
15. *Argatov I., Mishuris G.* An asymptotic model for a thin bonded elastic layer coated with an elastic membrane // *Appl. Math. Modelling.* – 2016. – **40**, No. 4. – P. 2541–2548. – <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.109>.
 16. *Li Q., Hou P., Shang S.* Accurate 3D thermal stress analysis of thermal barrier coatings // *Int. J. Mech. Sci.* – 2022. – **217**. – Article 107024.
– <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.107024>.
 17. *Nart E., Alinia Y., Güler M. A.* The effect of material anisotropy on the mechanics of a thin-film/substrate system under mechanical and thermal loads // *Math. Mech. Solids.* – 2022. – **27**, No. 4. – P. 644–661.
– <https://doi.org/10.1177/10812865211031277>.
 18. *Shang S.-M., Hou P.-F., Zhang W.-H.* Three-dimensional overall stress analysis for double-coated structure with equal coating thickness // *Mech. Mater.* – 2021. – **158**. – Article 103861. – <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2021.103861>.
 19. *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1942–1953.
– https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_601.
 20. *Shevchuk V. A.* Modeling and computation of heat transfer in a system “body – multilayer coating” // *Heat Transfer Research.* – 2006. – **37**, No. 5. – P. 421–433.
– <https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.v37.i5.50>.
 21. *Shevchuk V. A., Silberschmidt V. V.* Analysis of damage evolution in thick ceramic coatings // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2006. – **426**, No. 1-2. – P. 121–127.
– <https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.03.080>.
 22. *Shevchuk V. A., Silberschmidt V. V.* Semi-analytical analysis of thermally induced damage in thin ceramic coatings // *Int. J. Solids Struct.* – 2005. – **42**, No. 16-17. – P. 4738–4757. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.002>.
 23. *Shi Z., Ramalingam S.* Thermal and mechanical stresses in transversely isotropic coatings // *Surf. Coat. Techn.* – 2001. – **138**, No. 2-3. – P. 173–184.
– [https://doi.org/10.1016/S0257-8972\(00\)01167-1](https://doi.org/10.1016/S0257-8972(00)01167-1).
 24. *Shvets R. M., Flyachok V. M.* Thermoelasticity of multilayer highly anisotropic shells // *J. Therm. Stresses.* – 1996. – **19**, No. 1. – P. 1–15.
– <https://doi.org/10.1080/01495739608946157>.
 25. *Ting T. C. T.* Mechanics of a thin anisotropic elastic layer and a layer that is bonded to an anisotropic elastic body or bodies // *Proc. Roy. Soc. A.* – 2007. – **463**, No. 2085. – P. 2223–2239. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1875>.
 26. *Zujkas J. A.* Effects of transverse normal and shear strains in orthotropic shells // *AIAA J.* – 1974. – **12**, No. 12. – P. 1753–1755. – <https://doi.org/10.2514/3.49598>.

A TECHNIQUE FOR THE CALCULATION OF THERMOELASTIC STATE OF SOLIDS WITH THIN MULTILAYER TRANSVERSELY ISOTROPIC COATINGS

A technique for the calculation of thermoelastic state of structural elements with thin multilayer transversely isotropic coatings is elaborated on the basis of the modeling of such coatings by shells with corresponding thermomechanical properties of the coating. Within the framework of this approach, the effect of coatings on the mechanical state of the entire body – coating system is described by special generalized boundary conditions. For the case of transversely isotropic coatings, the transverse strains are encountered as the additional degrees of freedom. The efficiency of the proposed approach is illustrated by the comparison of the results, obtained using this approach, with an exact solution to the test problem on the thermoelastic state of the solid cylinder with a ceramic coating.

Key words: *thermal elasticity, thin coatings, multilayer transversely isotropic coatings, ceramic coatings, generalized boundary conditions.*