

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Досліджено квазістатичний термопружний стан термочутливих кусково-однорідних структур за різних способів нагрівання через обмежуючі поверхні та в зоні контакту. Для побудови розв'язку нестационарної задачі теплопровідності використано аналітично-числовий підхід, що ґрунтується на використанні методів послідовних наближень, лінеаризувальних параметрів та адаптованої формули Пруднікова для обернення перетворення Лапласа. Застосування підходу продемонстровано на прикладі задачі для двох шарів за дві упродовж певного проміжку часу джерела тепла на межі контакту та складного теплообміну з довкіллям через поверхні шарів.

Ключові слова: термопружний стан, нелінійна задача теплопровідності, термочутливі кусково-однорідні тіла, метод лінеаризувальних параметрів, адаптована формула Пруднікова, метод послідовних наближень.

Вступ. Дослідження термопружної поведінки термочутливих елементів конструкцій за складного теплообміну продовжують бути актуальними та важливими в багатьох галузях. Про це свідчать сучасні наукові дослідження за цією тематикою [4, 5, 7, 10, 12–15, 17]. Загальний аналіз сучасних прикладних проблем механіки неоднорідних тіл, що включають і кусково-однорідні структури, наведено в праці [11]. Підвищені вимоги до врахування якомога більшої кількості факторів, таких як термочутливість матеріалів, силові навантаження, складний теплообмін, контакт поверхонь тощо, зумовили використання математичних моделей, які описуються нелінійними задачами термопружності. Через складність таких задач особливої популярності набули числові або аналітично-числові підходи до їхнього розв'язування, які переважно ґрунтуються на адаптації, розвиненні та поєднанні відомих раніше методів. Використання одного з таких підходів до розв'язання квазістатичних задач термопружності запропоновано у цьому дослідженні. Розв'язування задачі термопружності виконується за два етапи: 1) визначення розподілу температурного поля з нелінійної задачі теплопровідності та 2) визначення зумовленого ним напруженого стану.

Коли температура змінюється лише за однією просторовою координатою, термопружний стан термочутливої кусково-однорідної структури визначають за відомими в літературі співвідношеннями, а розв'язування задачі теплопровідності здійснюють на основі аналітично-числового підходу. Цей підхід ґрунтується на лінеаризації вихідної задачі теплопровідності за допомогою методів лінеаризувальних параметрів та послідовних наближень, застосуванні перетворення Лапласа та його оберненні за адаптованою формулою Пруднікова. З використанням цього підходу було розв'язано низку задач теплопровідності для контактуючих термочутливих тіл за складного теплообміну [1–3].

У цій статті розв'язано незв'язану квазістатичну задачу термопружності для ідеально контактуючих термочутливих шарів за складного теплообміну із зовнішнім середовищем та наявності тепловиділень на поверхні контакту. На основі розв'язків задач теплопровідності, які отримано у цій роботі і раніше в працях [1, 2], досліджено термопружний стан термочутливих кусково-однорідних структур за складного теплообміну.

1. Формулювання задачі теплопровідності. Для визначення нестационарних температурних полів t_1 , t_2 ідеально контактуючих різнорідних термочутливих шарів $0 < z < z_1$, $-z_2 < z < 0$ з однаковим початковим роз-

✉ dept19@iapmm.lviv.ua

поділом температури t_p за складного теплообміну із зовнішніми середовищами сталих температур t_{c1} і t_{c2} та рівномірно розподіленими по площині дотику джерелами тепловиділення упродовж певного проміжку часу, маємо нелінійну задачу теплопровідності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right) &= c_v^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial \tau}, & 0 < z < z_1, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} \right) &= c_v^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial \tau}, & -z_2 < z < 0, \end{aligned} \quad (1)$$

за початкових умов

$$t_j|_{\tau=0} = t_p, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

крайових умов

$$\left\{ \lambda_t(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} + \alpha_1(t_1 - t_{c1}) + \sigma \varepsilon_1(t_1^4 - t_{c1}^4) \right\} \Big|_{z=z_1} = 0, \quad (3)$$

$$\left\{ \lambda_t(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \alpha_2(t_2 - t_{c2}) - \sigma \varepsilon_2(t_2^4 - t_{c2}^4) \right\} \Big|_{z=-z_2} = 0 \quad (4)$$

і контактних умов

$$t_1|_{z=0} = t_2|_{z=0}, \quad \left[\lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = q(\tau), \quad (5)$$

де α_j – коефіцієнти теплообміну через поверхні z_j , $j = 1, 2$, $q(\tau) =$

$$= q_0 S_+(\tau_k - \tau) - \text{джерело тепла, що діє упродовж часу } \tau_k, \quad S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leq 0; \end{cases}$$

ε_j – ступінь чорноти поверхні j -го шару, $\lambda_t^{(j)}(t_j)$ та $c_v^{(j)}(t_j)$ – залежні від шуканих температур коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів шарів j відповідно, $j = 1, 2$; σ – стала Стефана–Больцмана.

2. Розв'язування задачі теплопровідності (1)–(5). У праці [1] з використанням аналітично-числового підходу розв'язано нестационарну задачу теплопровідності для двох ідеально контактуючих термочутливих шарів за конвективно-променевого теплообміну із зовнішнім середовищем. У цій роботі додатково враховуємо тепловиділення на межі дотику. Схема розв'язування задачі є аналогічною, тому коротко опишемо алгоритм, наголосивши лише на відмінностях. Після вибору відлікового значення температури t_0 , характерного розміру z_1 (товщини верхнього шару) і подання характеристик матеріалів шарів у вигляді добутку розмірної величини на безрозмірну функцію, що описує зміну відповідної характеристики, задачу запишемо в безрозмірних величинах. Застосування перетворення Кірхгофа до такої задачі лише частково її лінеаризує. Подальша лінеаризація задачі стосовно змінних Кірхгофа здійснюється із застосуванням методів лінеаризувальних параметрів та послідовних наближень. Таким чином, розв'язування задачі зводиться до ітераційного процесу, коли на кожному його кроці розв'язуємо лінійну задачу з уточненими на попередньому кроці величинами. В праці [1] подано m -те наближення розв'язку лінійної задачі спряження. У розглядуваному випадку умови ідеального контакту запишемо з урахуванням тепловиділення на межі дотику:

$$\theta_{1,m} \Big|_{\bar{z}=0} = (1 + \alpha) \theta_{2,m} \Big|_{\bar{z}=0}, \quad \left[K_\lambda \frac{\partial \theta_{2,m}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_{1,m}}{\partial \bar{z}} \right] \Big|_{\bar{z}=0} = q(F_0),$$

$$\text{де } \bar{z} = \frac{z}{z_1}, \quad \theta_{j,m} = \int_{T_p}^{T_{j,m}} \lambda_t^{(j)*}(T) dT, \quad T_i = \frac{t_i}{t_0}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_{t_0}^{(2)}}{\lambda_{t_0}^{(1)}}, \quad q(\text{Fo}) = \text{Ki} S_+ (\text{Fo}_k - \text{Fo}),$$

$$\text{Fo} = \frac{a_0^{(1)} \tau}{\ell_0^2} - \text{час Фур'є, } \text{Ki} = \frac{q_0 \ell_0}{\lambda_{t_0}^{(1)} t_0} - \text{критерій Кірпічова, } \text{Fo}_k = \frac{a_0^{(1)} \tau_k}{\ell_0^2}, \quad \lambda_{t_0}^{(j)}$$

та $a_0^{(1)}$ – розмірні складові з подання відповідних коефіцієнтів теплопровідності та температуропровідності, $j = 1, 2$; α – лінеаризувальний параметр.

Для розв'язування лінійної задачі відносно змінних Кірхгофа застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом Fo . Розв'язок задачі відносно трансформант легко подати через відомий загальний розв'язок рівнянь [1], сталі інтегрування в якому знайдемо з відповідних крайових умов. Так, для задачі (1)–(5) система рівнянь для визначення сталих інтегрування матиме вигляд

$$\begin{aligned} & C_{1,m}^1 \sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} - C_{2,m}^1 \sqrt{sK_{m-1}^{(1)}} e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} + \\ & + \text{Bi}_{1,m} \left(C_{1,m}^1 e^{\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} + C_{2,m}^1 e^{-\sqrt{sK_{m-1}^{(1)}}} - \frac{\theta_{c1}}{s} \right) = 0, \\ & C_{1,m}^1 + C_{2,m}^1 = (1 + \alpha)(C_{1,m}^2 + C_{2,m}^2), \\ & K_\lambda \left(C_{1,m}^2 \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} - C_{2,m}^2 \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} \right) - C_{1,m}^1 \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} - C_{2,m}^1 \sqrt{K_{m-1}^{(1)}} = \frac{\tilde{q}}{\sqrt{s}}, \\ & C_{1,m}^2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} e^{-\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} - C_{2,m}^2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}} e^{\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} - \\ & - \text{Bi}_{2,m} \left(C_{1,m}^2 e^{-\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} + C_{2,m}^2 e^{\bar{z}_2 \sqrt{sK_{m-1}^{(2)}}} - \frac{\theta_{c2}}{s} \right) = 0, \end{aligned}$$

де $C_{1,m}^j, C_{2,m}^j, j = 1, 2$, – невідомі сталі інтегрування, $\tilde{q} = \frac{\text{Ki}(1 - e^{-s\text{Fo}_k})}{s}$ – зображення тепловиділень, що діють упродовж проміжку часу Fo_k , s – параметр перетворення Лапласа,

$$K_{m-1}^{(1)} = a_1^*(T_{1,m-1}(\theta_{1,m-1})), \quad K_{m-1}^{(2)} = K_a a_2^*(T_{2,m-1}(\theta_{2,m-1})),$$

$$a_j^*(T_j(\theta_j)) = \frac{c_v^{(j)*}(T_j(\theta_j))}{\lambda_t^{(j)*}(T_j(\theta_j))}, \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \text{Bi}_{1,m} &= [\theta_{1,m-1}(\text{Fo}, 1) - \theta_{c1}]^{-1} \{ \text{Bi}_1 [T(\theta_{1,m-1}(\text{Fo}, 1)) - T_{c1}] + \\ & + \text{Sk}_1 [(T(\theta_{1,m-1}(\text{Fo}, 1)))^4 - T_{c1}^4] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bi}_{2,m} &= [\theta_{2,m-1}(\text{Fo}, -\bar{z}_2) - \theta_{c2}]^{-1} \{ \text{Bi}_2 [T(\theta_{2,m-1}(\text{Fo}, -\bar{z}_2)) - T_{c2}] + \\ & + \text{Sk}_2 [(T(\theta_{2,m-1}(\text{Fo}, -\bar{z}_2)))^4 - T_{c2}^4] \}, \quad m \geq 2, \end{aligned}$$

$$\theta_{c_j} = \int_{T_p}^{T_{c_j}} \lambda_t^{j*}(T) dT - \text{безрозмірні значення температур середовищ, } j = 1, 2.$$

В результаті розв'язання системи отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned}
C_{1,m}^1 &= \text{Bi}_{1,m} \frac{\theta_{c1}}{V_2 s} + \frac{V_1}{V_2} C_{2,m}^1, \\
C_{2,m}^1 &= \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{s}} + \frac{V_5}{V_4} \text{Bi}_{2,m} \frac{\theta_{c2}}{s} - \left(\frac{V_3 V_5}{V_4} - V_6 \right) C_{2,m}^2 \right] \frac{1}{2\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}}, \\
C_{1,m}^2 &= -\text{Bi}_{2,m} \frac{\theta_{c2}}{V_4 s} + \frac{V_3}{V_4} C_{2,m}^2, \\
C_{2,m}^2 &= \left[- (1 + \alpha) \text{Bi}_{2,m} \frac{\theta_{c2}}{s V_4} - \text{Bi}_{1,m} \frac{\theta_{c1}}{s V_2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\tilde{q}}{\sqrt{s}} + \frac{V_5}{V_4} \text{Bi}_{2,m} \frac{\theta_{c2}}{s} \right) \left(\frac{V_1}{V_2} + 1 \right) \frac{1}{2\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} \right] \times \\
&\quad \times \left[\left(\frac{V_3 V_5}{V_4} - V_6 \right) \left(-\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \frac{1}{2\sqrt{K_{m-1}^{(1)}}} - \left(\frac{V_3}{V_4} + 1 \right) (1 + \alpha) \right]^{-1},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
V_1 &= e^{-\sqrt{s K_{m-1}^{(1)}}} \left(\sqrt{s K_{m-1}^{(1)}} - \text{Bi}_{1,m} \right), & V_2 &= e^{\sqrt{s K_{m-1}^{(1)}}} \left(\sqrt{s K_{m-1}^{(1)}} + \text{Bi}_{1,m} \right), \\
V_3 &= e^{\bar{z}_2 \sqrt{s K_{m-1}^{(2)}}} \left(\sqrt{s K_{m-1}^{(2)}} + \text{Bi}_{2,m} \right), & V_4 &= e^{-\bar{z}_2 \sqrt{s K_{m-1}^{(2)}}} \left(\sqrt{s K_{m-1}^{(2)}} - \text{Bi}_{2,m} \right), \\
V_5 &= K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} - (1 + \alpha) \sqrt{K_{m-1}^{(1)}}, & V_6 &= K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} + (1 + \alpha) \sqrt{K_{m-1}^{(1)}}.
\end{aligned}$$

Для визначення оригіналів змінних Кірхгофа за отриманими трансформантами використовуємо формулу Пруднікова [6], адаптовану до розв'язування такого класу задач [16, 18].

Просторово-часові розподіли температур шарів за відомими змінними Кірхгофа і лінійними залежностями коефіцієнтів теплопровідності матеріалів $\lambda_t^{(j)*}(T_j) = 1 + k_j(T_j - T_p)$ обчислюємо за формулами

$$T_j(\text{Fo}, \bar{z}, \alpha) = \frac{1}{k_j} \left(\sqrt{1 + 2k_j \theta_j(\text{Fo}, \bar{z}, \alpha)} - 1 \right) + T_p, \quad (6)$$

де $k_j = \text{const}$. Невідомий лінеаризувальний параметр α визначаємо з умови рівності температур на межі контакту $z = 0$. В результаті отримаємо нелінійне алгебричне рівняння, яке розв'язуємо методом Ньютонна.

3. Визначення квазістатичного термопружного стану. У розглянутій задачі температура змінюється лише за однією координатою. Термопружний стан у цьому випадку описується за відомими виразами [8]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(i)} = \sigma_{yy}^{(i)} = \sigma_i(\bar{z}, \text{Fo}) &= \frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} (C_1(\text{Fo}) + C_2(\text{Fo})z - \Phi_i(t_i)), \\
\sigma_{zz}^{(i)} = \sigma_{xz}^{(i)} = \sigma_{yz}^{(i)} = \sigma_{xy}^{(i)} &= 0,
\end{aligned}$$

де $C_1(\text{Fo})$, $C_2(\text{Fo})$ – невідомі функції; $\Phi_i(t_i) = \int_{t_p}^{t_i} \alpha_{ti}(t_i) dt_i$ – суто теплові

деформації; $E_i(t_i)$, $\nu_i(t_i)$, $\alpha_{ti}(t_i)$ – залежні від температури модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона і коефіцієнти лінійного температурного розширення

матеріалів шарів. За відсутності навантажень на поверхнях кусково-однорідного шару отримаємо, що $C_1(Fo) = 0$, $C_2(Fo) = 0$. Таким чином,

$$\sigma_i(\bar{z}, Fo) = -\frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} \Phi_i(t_i).$$

Якщо подати механічні характеристики аналогічно до теплових у вигляді добутку розмірної величини на безрозмірну функцію і ввести безрозмірні напруження $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / (E_0^{(0)} \alpha_{i0}^{(0)} t_0)$, отримаємо

$$\bar{\sigma}_i(\bar{z}, Fo) = -K_\sigma^{(i)} \frac{E_i^*(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} \bar{\Phi}_i(t_i), \quad (7)$$

де $K_\sigma^{(i)} = E_0^{(i)} \alpha_{i0}^{(i)} / E_0^{(0)} \alpha_{i0}^{(0)}$; $E_0^{(0)}$ і $\alpha_{i0}^{(0)}$ – вибрані відлікові значення модуля Юнга і коефіцієнта лінійного температурного розширення.

Зазначимо, що за формулами (7) можна визначити квазістатичний розподіл безрозмірних напружень і для інших випадків теплових навантажень, відмінних від розглянутих у цій праці.

4. Числові дослідження. Зауважимо, що дослідження температурних розподілів в кусково-однорідних шарах виконано на основі отриманих розв'язків (6). Результати наведено на рис. 1 і рис. 3. Для дослідження квазістатичного напруженого стану використано, крім отриманих розподілів температури (6), також температурні розподіли, знайдені раніше в працях [1, 2]. Результати обчислень подано на рис. 2, рис. 4 – рис. 6. За матеріали тіл вибрано оксид цирконію та титановий сплав з теплофізичними характеристиками, температурні залежності яких змінюються за відповідними законами у діапазоні температур 300 ÷ 1100 К [19]. Подання характеристик у вигляді добутку розмірної величини на безрозмірну функцію наведено в праці [9], при цьому $t_0 = 1100$ К, $t_p = 300$ К. Числові дослідження виконано у безрозмірних величинах.

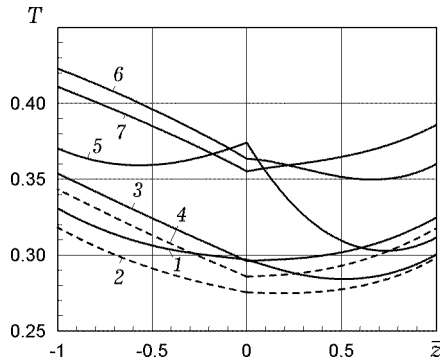


Рис. 1

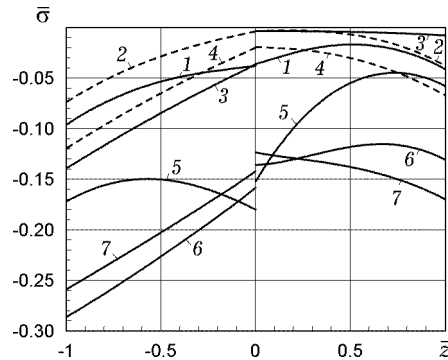


Рис. 2

На рис. 1 наведено графіки розподілу температури T уздовж координати \bar{z} , а на рис. 2 – відповідні їм розподіли напружень за конвективного теплообміну через поверхні шарів та наявності (суцільна лінія) чи відсутності (штрихова лінія) тепловіддільень на межі контакту. Криві 1–7 відповідають таким значенням критеріїв:

$$1 - Bi_1 = Bi_2 = 0.1, \quad Ki = 0.5, \quad Fo_k = 0.1, \quad Fo = 0.1,$$

$$2 - Bi_1 = Bi_2 = 0.1, \quad Ki = 0, \quad Fo = 0.1,$$

$$3 - Bi_1 = Bi_2 = 0.1, \quad Ki = 0.5, \quad Fo_k = 0.1, \quad Fo = 0.3,$$

$$4 - Bi_1 = Bi_2 = 0.1, \quad Ki = 0, \quad Fo = 0.3,$$

5 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Ki = 1.9, Fo_k = 0.2, Fo = 0.1,$

6 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Ki = 1.9, Fo_k = 0.2, Fo = 0.3,$

7 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Ki = 1.9, Fo_k = 0.2, Fo = 0.5.$

Графіки на рис. 3 ілюструють розподіли температури, а на рис. 4 - відповідні їм напруження за конвективно-променевого теплообміну з навколишнім середовищем та наявності (суцільна лінія) чи відсутності (штрихова лінія) тепловиділень на межі контакту. Кривим 1-7 відповідають такі значення критеріїв:

1 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk_1 = 0.2, Sk_2 = 0.1, Ki = 0.9, Fo_k = 0.2, Fo = 0.2,$

2 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk_1 = 0.2, Sk_2 = 0.1, Ki = 0, Fo = 0.1,$

3 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk_1 = 0.2, Sk_2 = 0.1, Ki = 0.9, Fo_k = 0.2, Fo = 0.3,$

4 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk_1 = 0.2, Sk_2 = 0.1, Ki = 0, Fo = 0.3,$

5 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk_1 = 0.2, Sk_2 = 0.2, Ki = 1.9, Fo_k = 0.2, Fo = 0.1,$

6 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk_1 = 0.2, Sk_2 = 0.2, Ki = 1.9, Fo_k = 0.2, Fo = 0.5,$

7 - $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk_1 = 0.2, Sk_2 = 0.2, Ki = 2.9, Fo_k = 0.2, Fo = 0.5.$

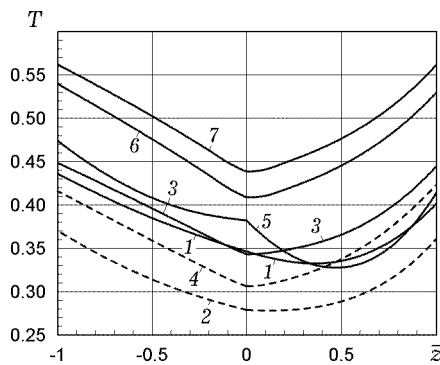


Рис. 3

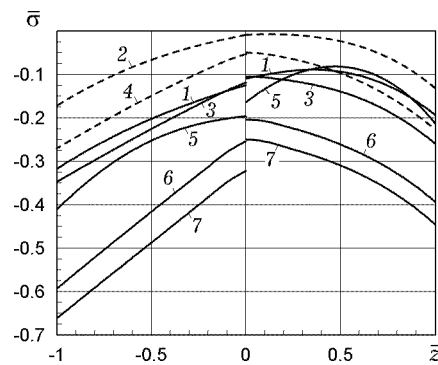


Рис. 4

Графіки на рис. 5 демонструють розподіли напружень $\bar{\sigma}$ у півпросторах за фрикційного нагрівання, а на рис. 6 - у півпросторі та шарі за фрикційного нагрівання і конвективного теплообміну. Розподіли температури, що спричиняють такий напружений стан, наведено в праці [2]. Значення відповідних критеріїв для кривих 1-4 на рис. 5 є такими:

1 - $Fo = 0.1, Bi = 0.2,$

2 - $Fo = 0.1, Bi = 0.9,$

3 - $Fo = 0.5, Bi = 0.2,$

4 - $Fo = 0.5, Bi = 0.9.$

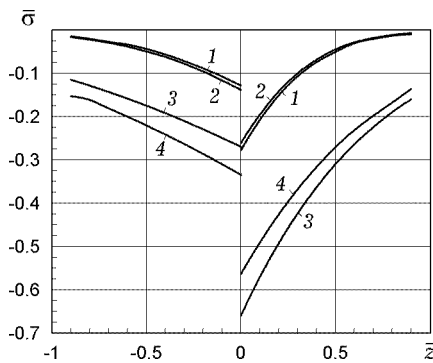


Рис. 5

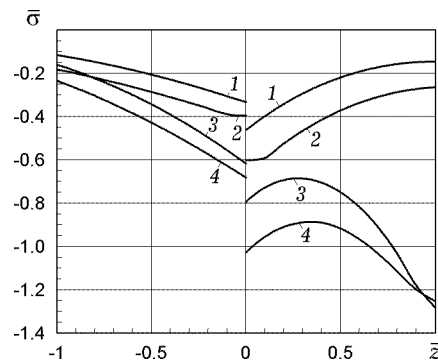


Рис. 6

Значення відповідних критеріїв і температури для кривих на рис. 6 є такими:

- 1 – $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk = 0, Fo = 0.4,$
- 2 – $Bi_1 = Bi_2 = 0.1, Sk = 0, Fo = 0.6,$
- 3 – $T(Fo = 0.4)|_{z=z_0} = 1,$
- 4 – $T(Fo = 0.3)|_{z=z_0} = 1.$

Як бачимо на поданих на рис. 1, рис. 3 графіках розподілів температур шарів за різних умов нагрівання, характер їхньої зміни за координатою є неперервним і залежить від значень критеріїв Біо та Старка, а у випадку наявності джерела ще й від його потужності та тривалості дії. Зауважимо, що метою дослідження було проілюструвати застосування запропонованого підходу до розв'язування нелінійних задач термопружності кусково-однорідних тіл за різних умов нагрівання на прикладі відомих в літературі задач, розв'язаних іншими методами. Таким чином, отримані розподіли за координатою температурних полів у шарах відповідають фізично очікуваним, як і зумовлені ними стискальні стрибкоподібні напруження, а характер їхньої зміни корелюється з результатами, отриманими іншими авторами.

Висновки. Розв'язано квазістатичну задачу термопружності для термочутливих шарів за умов складного теплообміну з середовищами сталих температур та тепловиділень, що діють упродовж певного проміжку часу. Для побудови розв'язку нелінійної задачі теплопровідності використано раніше апробований на низці задач для кусково-однорідних термочутливих тіл аналітично-числовий підхід, що ґрунтується на застосуванні методів послідовних наближень, лінеаризувальних параметрів та адаптованої формули Пруднікова для числового обернення перетворення Лапласа.

Із використанням розв'язків розглянутої задачі теплопровідності та раніше отриманих розв'язків для інших кусково-однорідних термочутливих тіл, досліджено розподіли температур і викликаних ними напружень за різних умов нагрівання.

Запропоновані аналітично-числові розв'язки можуть бути використані для порівняння з отриманими розв'язками аналогічних задач суто числовими методами або з використанням інших підходів. Вирішення такого завдання планується у подальших дослідженнях.

1. *Вовк О. М.* Тепловий стан двох контактуючих термочутливих шарів за складного теплообміну // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2022. – **65**, № 3-4. – С. 188–197.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.188-197>.
2. *Вовк О. М.* Тепловий стан термочутливої трибосистеми за складного теплообміну // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – **64**, № 3. – С. 55–64.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.3.55-64>.
Te same: *Vovk O. M.* Thermal state of a thermosensitive tribosystem under complex heat exchange // *J. Math. Sci.* – 2024. – **278**, No. 5. – P. 795–806.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06962-z>.
3. *Вовк О. М., Соляр Т. Я.* Термопружний стан контактуючих термочутливих півпростору та шару // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 4. – С. 78–87.
Te same: *Vovk O. M., Solyar T. Y.* Thermoelastic state of contacting thermally sensitive half space and thermally sensitive layer // *J. Math. Sci.* – 2021. – **256**, No. 4. – P. 455–466.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05438-8>.
4. *Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М.* Вплив термочутливості матеріалів на термонапружний стан тришарового порожнистого циліндра за конвективного теплообміну // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2022. – **58**, № 3. – С. 97–104.
Te same: *Harmatiy G. Y., Kalynyak B. M.* Influence of thermal sensitivity of materials on the thermal stressed state of a three-layer hollow cylinder under the conditions of convective heat exchange // *Mater. Sci.* – 2022. – **58**, No. 3. – P. 385–394.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00675-5>.

5. *Гачкевич О. Р., Кушнір Р. М., Терлецький Р. Ф.* Математичні проблеми термомеханіки деформівних тіл при тепловому опроміненні // Укр. мат. журн. – 2021. – **73**, № 10. – С. 1317–1329.
– <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i10.6787>.
Te same: *Hachkevych O. R., Kushnir R. M., Terletsii R. F.* Mathematical problems of thermomechanics for deformable bodies subjected to thermal irradiation // Ukr. Math. J. – 2022. – **73**, No. 10. – P. 1522–1536.
– <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02011-7>.
6. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 468 с.
7. *Кушнір Р. М., Жидик У. В., Флячок В. М.* Температурні напруження в ортотропній циліндричній оболонці нерегулярної шаруватої структури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 3-4. – С. 101–110.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.101-110>.
8. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
9. *Попович В., Вовк О.* Дослідження термопружного стану контактуючих термо-чутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2014. – **74**, № 2. – С. 38–47.
10. *Процюк Б. В.* Квазістатичний термопружний стан шаруватого функціонально-градієнтного циліндра за врахування теплового випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 1-2. – С. 146–157.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.1-2.146-157>.
Te same: *Protsiuk B. V.* Quasistatic thermoelastic state of a layered functionally graded cylinder with regard for thermal radiation // J. Math. Sci. – 2024. – **282**, No. 5. – P. 780–797.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07216-8>.
11. *Токовий Ю. В.* Прикладні проблеми механіки неоднорідних тіл: сучасний стан та перспективи розвитку // Вісн. Нац. Акад. наук України. – 2023. – № 9. – С. 70–79.
– <https://doi.org/10.15407/vsn2023.09.070>.
12. *Шевчук В. А.* Дослідження термонапруженого стану півпростору з багатошаровим покриттям за циклічного конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 3-4. – С. 136–145.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.136-145>.
13. *Adhe A., Ghadle K.* Thermal stress analysis of inhomogeneous infinite solid to 2D elasticity of thermoelastic problems // Mathematics and Computing / Kumar B. R., Ponnusamy S., Giri D., Thuraisingham B., Clifton C. W., Carminati B. (Eds). – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – ICMC 2022, Vellore, India, Jan. 6-8. – Vol. 415. – Singapore: Springer, 2022. – P. 509–521.
– https://doi.org/10.1007/978-981-19-9307-7_41.
14. *Havrysh V., Koliasa L., Vozna S.* Temperature field in a layered plate with local heating // Math. Model. (STUME J.). – 2021. – **5**, No. 3. – P. 90–94.
– <https://stumejournals.com/journals/mm/2021/3/90>.
15. *Kryvyi O. F., Morozov Yu. O.* Inhomogeneous transversely isotropic space under influence of concentrated power and temperature sources // J. Phys.: Conf. Ser. – 2022. – **2231**, No. 1. – Article 012016. – 9 p.
– <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012016>.
16. *Kushnir R., Solyar T.* A numerical-analytical approach to the analysis of non-stationary temperature fields in multiply-connected solids // Mech., Mater. Sci. & Eng. J. – 2016. – **3**. – P. 90–106.
17. *Lamba N. K.* Thermosensitive response of a functionally graded cylinder with fractional order derivative // Int. J. Appl. Mech. Eng. – 2022. – **27**, No. 1. – P. 107–124.
– <https://doi.org/10.2478/ijame-2022-0008>.
18. *Solyar T.* Ways to improve Fourier series convergence and its application for Laplace numerical inversion // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2016. – **81**, No. 1. – P. 136–144.
19. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.
– <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.

THERMOELASTIC STATE OF THE CONTACTING THERMO-SENSITIVE PIECEWISE-HOMOGENEOUS BODIES UNDER COMPLEX HEAT EXCHANGE

The quasi-static thermoelastic state of thermosensitive piecewise-homogeneous structures under different types of heating through the limiting surfaces and in the contact zone is investigated. An analytical-numerical approach based on the use of successive approximation methods, linearizing parameters, and the adapted Prudnikov formula for the inversion of the Laplace transform is used to construct the solution of the non-stationary heat conduction problem. The application of the approach is demonstrated on the example of a problem for two layers under the action of a heat source during a certain time interval at the contact boundary and complex heat exchange with the environment through the surfaces of the layers.

Key words: thermoelastic state, non-linear heat conduction problem, thermosensitive piecewise-homogeneous bodies, method of linearizing parameters, adapted Prudnikov formula, method of successive approximations.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
11.06.23