УДК 519.2: 530.1: 600.1

И.И. ГОРБАНЬ

ШЕСТАЯ ПРОБЛЕМА Д. ГИЛЬБЕРТА: РОЛЬ И ЗНАЧЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Анотація. *У теперішній час велика кількість фізичних по суті дисциплін, зокрема, теорія ймовірностей і раціональна механіка, розглядаються як абстрактні математичні теорії. Тому шоста проблема Д. Гільберта, що стосується аксіоматизації розділів фізики, залишається не вирішеною до кінця. Стосовно розділів фізики, для яких побудовані аксіоматичні математичні теорії, вирішення проблеми може бути забезпечено введенням додаткових фізичних гіпотез (аксіом адекватності), що фіксують наявність і особливості основоположних фізичних феноменів. Сформульовані вимоги до фізичних гіпотез.*
Ключові слова: *шоста проблема Д. Гільберта, аксіома, фізична гіпотеза, теорія гіпервипадкових явищ.*

Аннотация. *В настоящее время многие, физические по сути, дисциплины, в частности, теория вероятностей и рациональная механика, рассматриваются как абстрактные математические теории. Поэтому шестая проблема Д. Гильберта, касающаяся аксиоматизации разделов физики, остается не решенной до конца. Применительно к разделам физики, для которых построены аксиоматические математические теории, решение проблемы может быть обеспечено введением дополнительных физических гипотез (аксиом адекватности), фиксирующих наличие и особенности основополагающих физических феноменов. Сформулированы требования к физическим гипотезам.*
Ключевые слова: *шестая проблема Д. Гильберта, аксиома, физическая гипотеза, теория гиперслучайных явлений.*

Abstract. *In present, a lot of disciplines, per se physical ones (the probability theory and the rational mechanics, in particular) are presented as the abstract mathematical theories. Therefore the sixth D. Gilbert's problem connected with axiomatization of physical disciplines has not solved so far. For physical disciplines, for which axiomatic mathematic theories are created the solution of the problem can be provided by the additional physical hypotheses (the adequacy axioms) that fix the presence and the particularities of the base of physical phenomena. Demands for the physical hypotheses are formulated.*
Keywords: *the sixth D. Gilbert's problem, axiom, physical hypothesis, theory of hyper-random phenomena.*

1. Введение

В 1900 г. в Париже состоялся II Международный конгресс математиков, на котором с программным докладом «Математические проблемы» [7] выступил Давид Гильберт. Он сформулировал 23 наиболее интересные, по его мнению, проблемы, «исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки». Шестой проблемой им было названо «Математическое изложение аксиом физики».

Часть доклада, касающуюся шестой проблемы, Д. Гильберт начал со слов: «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика».

Вопросу аксиоматизации науки Д. Гильберт уделял большое внимание на протяжении всей жизни. В докладе, прочитанном в 1917 г. на заседании Швейцарского математического общества, он говорил [10]: «По мере дальнейшего развития любой науки становится все более необходимым целенаправленное выделение ее основополагающих предположений в чистом виде, осознание их в качестве аксиом и «помещение» их в «фундамент» данной области знания». И далее: «Механизм аксиоматического метода приводит к более глубоким основаниям знания, ибо это действительно необходимо для более совершенного его построения»[1].

На призыв Д. Гильберта откликнулись многие ученые. Различные подходы к решению проблемы аксиоматизации теории вероятностей предлагали Г. Больцман (1908), С.Н. Бернштейн (1917), Р. Мизес (1918), А. Ломницкий (1923) (на основе идей Э. Бореля), А.Н. Колмогоров (1929) и др. [7], а аксиоматизации механики – Г. Больцман, Г. Гамель (1908), В. Нолл (1957), К. Трузделл и др. [8].

Некоторые ученые, в частности, Р. Мизес, рассматривали проблему с позиций естествознания, другие же, как, например, А.Н. Колмогоров, В. Нолл и К. Трузделл, – с математических позиций.

В настоящее время общепризнанным в области теории вероятностей считается аксиоматический подход А.Н. Колмогорова [6], основанный на концепциях теории множеств и теории меры. Этот подход, ставший классическим, возведен даже в ранг международного стандарта ISO [11].

Б.В. Гнеденко в комментарии к шестой проблеме писал [7]: «… для Гильберта теория вероятностей является главой физики, в которой математические методы играют выдающуюся роль. Сейчас эта точка зрения уже не имеет такого распространения, которым она пользовалась на рубеже двух столетий, поскольку с тех пор достаточно определенно выявилось собственно математическое содержание теории вероятностей. Теперь уже не вызывает сомнения то, что созданные в ней понятия и методы исследования, а также полученные результаты имеют общенаучное значение, далеко выходящее за пределы физики и даже всего естествознания».

В области механики классическими считаются фундаментальные работы В. Нолла и К. Трузделла, сформировавших аксиоматическую рациональную механику, представляющую собой «часть математики, которая поставляет и исследует логические модели для описания изменений положения и формы, претерпеваемых повседневно наблюдаемыми нами вещами» [8].

Таким образом, и теория вероятностей, и рациональная механика интерпретируются в настоящее время как математические дисциплины.

Не следует, однако, забывать, что обе эти дисциплины, а также другие формализованные теории, трактуемые в настоящее время как чисто математические, но в то же время широко используемые при описании физических явлений, неразрывно связаны с физическими особенностями окружающего мира. Поэтому представляется необходимым учитывать эти связи при аксиоматизации и рассматривать дисциплины не как математические, а как физико-математические, в которых физические начала играют не менее значимую роль, чем математические.

Целью настоящей статьи является изложение концепции аксиоматизации таких дисциплин на основе физико-математического подхода.

2. Постановка вопроса

Во многих современных теориях физические объекты и предметы исследования подменяются абстрактными математическими объектами и зависимостями – математическими моделями. Такой прием значительно облегчает решение физических задач и обеспечивает нахождение решений в общем виде, но при этом нарушается связь с реальностью, в ре-

[1] Далеко не все ученые разделяли (да и сейчас разделяют) точку зрения Д. Гильберта по вопросу аксиоматизации. Известна, например, непримиримая позиция видного математика В.И. Арнольда [2], считавшего математику частью физики и остро критиковавшего попытки создания замкнутого изложения дисциплин в строго аксиоматической форме.

зультате чего ограничивается возможность проникновения в физическую сущность исследуемых явлений.

В качестве объекта и предмета изучения выступают уже не реальные физические явления и физические закономерности, а их абстрактные математические модели. Например, в классической теории вероятностей объектом исследования оказывается абстрактное вероятностное пространство, а предметом исследования – математические зависимости между его элементами. Сам же физический феномен статистической устойчивости частоты событий, лежащий в основе этой дисциплины, вроде бы вообще не играет никакой роли, хотя в действительности, конечно, это не так.

Более конструктивным представляется подход, при котором объектом изучения является реальный физический мир, а предметом изучения, – физические феномены. Для того чтобы, оставаясь в рамках такой постановки задачи, использовать преимущества аксиоматического математического подхода, достаточно систему математических аксиом дополнить физическими предположениями (гипотезами), устанавливающими связь между абстрактной теорией и реальным миром.

Основные требования, предъявляемые к таким физическим гипотезам (аксиомам адекватности [5]), наряду с непротиворечивостью и независимостью, – это учет экспериментально подтверждаемых физических эффектов окружающего мира, определяющих предмет исследования, а также адекватность описания этих эффектов математическими моделями рассматриваемой теории. Принятие необходимых физических гипотез превращает абстрактную математическую теорию в физико-математическую теорию, в рамках которой возможно логически корректное описание действительности.

Аксиомами адекватности, к примеру, теории вероятностей могут быть следующие физические гипотезы [5].

Гипотеза 1. Реальные массовые явления обладают свойством идеальной статистической устойчивости частоты (иначе: при увеличении объема выборки частота любого события сходится к постоянной величине).

Гипотеза 2. Массовые явления адекватно описываются стохастическими моделями, которые исчерпывающе характеризуются функциями распределения.

При решении практических задач вероятностного характера эти гипотезы обычно принимаются неосознанно, как сами собой разумеющиеся.

Однако следует обратить внимание, что игнорирование или неполный учет особенностей физических феноменов может приводить к неверным выводам и искаженным оценкам. Рассмотрим этот вопрос на примере теории вероятностей.

3. Теория вероятностей – физико-математическая теория

3.1. Экспериментальные исследования статистической устойчивости

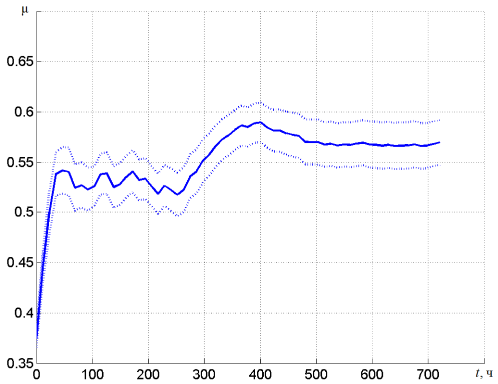
Систематическое изучение физического феномена статистической устойчивости частоты событий ведется, по крайней мере, уже три с половиной столетия. Сохранились, например, сведения об экспериментах с подбрасыванием монеты, проводимые Лапласом, Бюффоном, К. Пирсоном и другими известными учеными [4, 5]. Результаты их опытов свидетельствуют о наличии феномена статистической устойчивости и указывают на тенденцию стабилизации частоты выпадения определенной стороны монеты при увеличении количества экспериментов.

Более точные исследования статистической устойчивости реальных процессов различной физической природы на больших интервалах наблюдения, однако, показывают [5, 9], что феномен статистической устойчивости носит неидеальный характер. Выяснилось, что дисперсия выборочного среднего процессов вначале уменьшается с увеличением объема данных, а затем, достигнув определенного значения, остается практически на одном и том же уровне или возрастает.

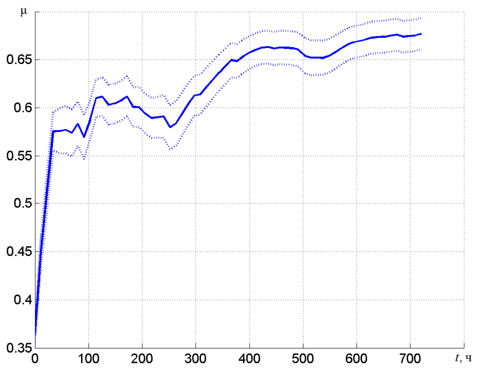
На конечном интервале наблюдения последовательности значений процесса $X(n)$ $(n=\overline{1,N})$ нарушения статистической устойчивости можно охарактеризовать с помощью различных параметров, одним из которых является параметр $\mu_N = \sqrt{\gamma_N^* / (1+\gamma_N^*)}$ [5], где $\gamma_N^* = \dfrac{\bar{D}_{Y_N}}{\bar{D}_{X_N}}$ – отношение выборочной дисперсии $\bar{D}_{Y_N}$ выборочного среднего $Y(n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(i)$ $(n=\overline{1,N})$ к средней величине $\bar{D}_{X_N} = \dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_X^*(n)$ выборочных дисперсий $D_X^*(n)$, сформированных по фрагментам реализации последовательности $X(n)$.

Если при увеличении N параметр μ_N проявляет тенденцию стремления к нулю, то процесс считается статистически устойчивым, в противном же случае – неустойчивым.

Для иллюстрации типичных зависимостей этого параметра от объема выборки для реальных физических процессов на рис. 1 приведены результаты обработки статистических данных о параметрах волнения моря, полученных Институтом океанологии им. П.П. Ширшова РАН за 15 месяцев наблюдения в районе Новороссийска (с сентября 2001 г. по декабрь 2003 г.) [3]. Данные получены с помощью волновой станции, показания которой регистрировались с интервалом от одного до нескольких часов. Волнение моря за время наблюдения менялось в широких пределах.



а)



б)

Рис. 1. Зависимость параметра μ от времени: для максимальной высоты волн (а) и максимального периода следования волн (б)

На рис. 1а сплошной линией изображена зависимость от времени t параметра μ, представляющего собой усредненные по 15 месяцам изменения параметра μ_N для максимальной высоты волн, а на рис. 1б – для максимального периода следования волн. Точечными линиями изображены отклонения от параметра μ, равные десятой части среднеквадратического отклонения.

Из рисунков видно, что параметр μ с первых отсчетов принимает большие значения. Это означает, что на всем интервале наблюдения зависимости высоты и периода волн от времени носят явно статистически неустойчивый характер и поэтому статистический прогноз практически невозможен.

Результаты этих и множества других подобных экспериментов [5] указывают на то, что нарушение статистической устойчивости – особенность, присущая, по всей видимости, всем физическим величинам, процессам и полям. Исключения, возможно, составляют лишь некоторые мировые константы, такие, как скорость света, постоянная Планка и др.

При обработке небольших массивов данных неполное соответствие реалий Гипотезе 1 обычно не приводит к существенным потерям, но при решении высокоточных задач, сопряженных с обработкой больших объемов данных, могут возникать значительные погрешности, которые необходимо принимать во внимание.

3.2. Учет нарушений статистической устойчивости

Для корректного применения классической теории вероятностей, в принципе, достаточно заменить Гипотезу 1 на следующую.

Гипотеза 1'. Реальные массовые явления обладают свойством ограниченной статистической устойчивости частоты (иначе: при увеличении объема выборки частота событий не сходится к постоянной величине).

Замена Гипотезы 1 на 1' приводит к значительным математическим трудностям, связанным с нарушением сходимости. Возможно несколько вариантов их преодоления. Разработка одного из них привела к созданию новой физико-математической теории гиперслучайных явлений [5].

Базовыми математическими моделями классической теории вероятностей служат случайные события, величины и функции, исчерпывающе характеризуемые функциями распределения. В роли же аналогичных моделей теории гиперслучайных явлений выступают гиперслучайные события, величины и функции, представляющие собой множество не связанных между собой соответственно случайных событий, величин и функций.

Математическая часть теории гиперслучайных явлений базируется на классических аксиомах теории вероятностей, а физическая часть – на Гипотезе 1' и следующей.

Гипотеза 2'. Массовые явления адекватно описываются гиперслучайными моделями, которые исчерпывающе характеризуются совокупностями функций распределения.

Поскольку теория гиперслучайных явлений использует систему математических аксиом теории вероятностей, с математической точки зрения она представляет собой ветвь классической теории вероятностей. С физической же точки зрения теория гиперслучайных явлений – новая физическая теория, базирующаяся на новых физических гипотезах. В целом же теорию гиперслучайных явлений можно рассматривать как новую физико-математическую теорию, обеспечивающую полное решение шестой проблемы Д. Гильберта в части теории вероятностей.

Нарушением статистической устойчивости можно объяснить многие остававшиеся непонятными до недавнего времени эффекты, например, почему точность реальных измерений всегда ограничена, почему накопление данных не всегда приводит к повышению точности и др. Корректный учет особенностей феномена статистической устойчивости повышает точность описания физических явлений и открывает новые возможности для решения практических задач [5].

3.3. Является ли вероятность «нормальной» физической величиной?

В 1992 г. в журнале «Успехи физических наук» вышла статья [1] с интригующим названием, вынесенным в подзаголовок. Авторы этой статьи обратили внимание на то, что «существенным элементом, незримо присутствующим при физической интерпретации вероятности, является система трудно формализуемых гипотез, соглашений, домысливаний, как бы естественно, традиционно привязанных к формальному аппарату теории вероятностей, а в действительности являющихся самостоятельными гипотезами, требующими верификации». Это обстоятельство делает невозможным без каких-либо дополнительных оговорок дать однозначный ответ на поставленный вопрос.

Следуя описанной в настоящей статье логике рассуждений, ответить на него можно следующим образом.

Вероятность, рассматриваемая в рамках математической аксиоматической теории вероятностей, вообще не является физической величиной. Это математическая абстракция, не имеющая никакого отношения к реальным физическим явлениям.

С принятием дополнительно Гипотез 1 и 2 понятия предела частоты события и вероятность события оказываются тождественными. Проводя измерение частоты события, можно с некоторой погрешностью оценить его вероятность. При устремлении объема выборки к бесконечности погрешность стремится к нулю, а частота события – к вероятности.

Если под понятием «нормальная» физическая величина понимать физическую величину, которую теоретически можно измерить с нулевой погрешностью при бесконечном объеме выборки, то при принятии Гипотез 1 и 2 вероятность оказывается «нормальной» физической величиной.

С принятием Гипотезы 1' фиксируется отсутствие предела частоты события. При этом абстрактное математическое понятие вероятности события нельзя отождествить с какой-либо измеряемой физической величиной.

Конечно, по данным измерения частоты события можно грубо оценить величину вероятности, однако, поскольку при безграничном увеличении объема выборки погрешность измерения не стремится к нулю, вероятность нельзя интерпретировать как «нормальную» физическую величину.

4. Заключение

Таким образом, множество современных дисциплин, физических по сути, но позиционируемых как абстрактные математические теории, не имеют связи с реалиями окружающего мира. Поэтому инженерам и физикам трудно согласиться с распространенным мнением, что шестая проблема Д. Гильберта, состоящая в аксиоматизации разделов физики («в первую очередь теория вероятностей и механики»), решена полностью.

Применительно к разделам физики, для которых сформированы аксиоматические математические теории, решение проблемы может быть обеспечено введением дополнительных физических гипотез (аксиом адекватности), устанавливающих связь с реальным миром. Такое дополнение превращает математическую теорию в физико-математическую и решает задачу аксиоматизации соответствующего раздела физики в постановке Д. Гильберта.

Часть принимаемых физических гипотез должна определять предмет исследования, фиксируя наличие и особенности основополагающих физических феноменов, лежащих в основе теории, а остальные гипотезы – утверждать возможность описания реальных физических явлений соответствующими математическими моделями.

Обязательным требованием, предъявляемым к физическим гипотезам, наряду с непротиворечивостью и независимостью, является их согласованность с экспериментальными данными.

В результате принятия дополнительных физических гипотез объектом и предметом изучения физико-математических теорий становятся реальные физические явления и физические закономерности, а не их абстрактные математические модели, как в соответствующих математических теориях.

Вопросам тщательного изучения физических феноменов и проверки адекватности математических моделей физическим реалиям необходимо уделять пристальное внимание. Учет существенных особенностей физических феноменов и адекватное их описание математическими средствами обеспечивает корректное решение практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ю. И. Является ли вероятность «нормальной» физической величиной? / Ю.И. Алимов, Ю.А. Кравцов // Успехи физических наук. – 1992. – № 7. – С. 149 – 182.
2. Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? / В.И. Арнольд // Успехи физических наук. – 1999. – № 12. – С. 1311 – 1323.
3. Единая государственная система информации об обстановке в мировом океане ЕСИМ. Данные Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ias.ocean.ru/esimo.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Гнеденко Б.В. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1988. – 447 с.
5. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 317 с.
6. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А.Н. – М.: ОНТИ, 1974. – 120 с.
7. Проблемы Гильберта / Под общ. ред. П.С. Александрова. – М.: Наука, 1969. – 238 с.
8. Трузделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / Трузделл К. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
9. Эльясберг П.С. Измерительная информация. Сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? / Эльясберг П.С. – М.: Наука, 1983. – 207 с.
10. Hilbert D. Axiomatic Thinking / D. Hilbert. – Chicago: Philosophia Mathematica. – 1970. – N 7. – P. 15 – 22.
11. International standard ISO 3534-1:2006(E/F). Statistics. Vocabulary and symbols. Part I: General statistical terms and terms used in probability. – 2006. – 105 p.

Стаття надійшла до редакції 15.10.2012