УДК 511.1, 512.542, 530.145

А.К. БЕЛЯЕВ, В.П. КЛИМЕНКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР В СИСТЕМЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АБСТРАКТНОГО РЕГИСТРА

Анотація. *Розглядається диференціальний оператор для побудови та представлення арифметичних функцій у системі перетворень абстрактного регістру. Визначаються можливості проведення структурних побудов та виконання точних обчислень.*
Ключові слова: *диференціальний оператор, абстрактний регістр, композиція перетворень, точні обчислення.*

Аннотация. *Рассматривается дифференциальный оператор для построения и представления арифметических функций в системе преобразований абстрактного регистра. Определяются возможности проведения структурных построений и выполнения точных вычислений.*
Ключевые слова: *дифференциальный оператор, абстрактный регистр, композиция преобразований, точные вычисления.*

Abstract. *We consider a special differential operator for constructing and representation of arithmetic functions in the system of transformations of an abstract register. The possibility of structural buildings and performing of precise calculations are determinated.*
Keywords: *differential operator, abstract register, composition of transformations, precise calculations.*

1. Введение

В настоящее время новые промышленные технологии и оптимизация вычислений определяют развитие современных вычислительных средств. Это также касается вопросов представления и реализации арифметических преобразований и функций, лежащих в основе вычислений. В работе авторов [1] представление арифметических функций связывается с разработкой и построением некоторого класса частично доопределенных обратимых преобразований. Обратимость преобразований является одним из основных условий организации квантовых вычислений.

Преобразования этого класса, с другой стороны, могут рассматриваться в качестве некоторого средства проведения структурных построений в области арифметических преобразований и функций для возможной оптимизации вычислений.

Рассматриваемые в [1] вопросы полноты класса частично доопределенных преобразований, а также условия его функционального замыкания, расширяют возможности проведения таких построений.

Особенностью описанного в [1] подхода является построение класса преобразований на основе анализа конечных множеств, представленных перестановками m-степени.

Таким образом, преобразования класса могут рассматриваться в системе преобразований n-разрядного абстрактного регистра [2], что существенно для проведения структурных построений и преобразований, определяемых на конечном абстрактном регистре.

Это также важно для функциональных построений и проведения структурных преобразований арифметических функций с бесконечной областью определения, т.е. в системе преобразований бесконечного абстрактного регистра [2].

Одним из путей реализации структурных преобразований в области арифметических функций может служить вычисление дифференциального оператора, который определяется в системе преобразований n-разрядного абстрактного регистра.

2. Построение дифференциального оператора

Пусть заданы абстрактный n-разрядный регистр и система преобразований, определенных на нем. Частичное определение арифметических функций может быть связано с определением значений функций на конечных множествах, например, при ограничении значений конечной разрядностью абстрактного регистра, на котором представляются эти значения.

Пусть $F(n)$ функция, частично определенная на n-разрядном регистре, представляющая некоторую арифметическую функцию F, определенную на бесконечном абстрактном регистре; а $F(n-1)$ – такая же, частично определенная функция, представляющая F, но определенная на $(n-1)$ разрядном регистре.

В соответствии с логикой [1], функция $F(n-1)$ может быть представлена в классе частично доопределенных обратимых преобразований, то есть в виде некоторой обратимой функции $f(n)$, определяемой на n-разрядном регистре. Эта функция может представляться элементом класса $G(n)$, описанного в [1].

Тогда для предложенных преобразований можно записать, что

$$F(n)=L(n)\,f(n)$$

или

$$F(n)=f(n)P(n),$$

где $L(n)=F(n)\,f^{-1}(n)$ и $P(n)=f^{-1}(n)F(n)$.

Здесь $L(n)$ и $P(n)$, соответственно, левосторонний или правосторонний дифференциальный оператор разложения $F(n)$, а $f^{-1}(n)$ – обратное преобразование для $f(n)$.

Анализ показывает, что описанную таким образом процедуру вычисления дифференциального оператора можно представить в некотором итерационном процессе разложения преобразований. Это возможно путем рассмотрения цепи построений частично определенных функций, представляющих значения функции F. Такими функциями являются $F(n-2)$, $F(n-3)$, $F(n-4)$ и т.д. Эти функции могут рассматриваться путем сокращения длины абстрактного регистра, соответственно, определенных на $(n-2)$, $(n-3)$, $(n-4)$ и т.д. разрядностях регистра, а также построения цепи соответствующих им обратимых, частично доопределенных функций $f(n-1)$, $f(n-2)$, $f(n-3)$ и т.д., которые рассматриваются представителями соответствующих классов обратимых, частично доопределенных преобразований $G(n-1)$, $G(n-2)$ и т.д., представленных построениями [1].

Так как в выражении $F(n)=L(n)\,f(n)$ функция $f(n)$ получена путем доопределения частично определенной функции $F(n-1)$, то все функции, входящие в выражение для $F(n)$, определяются на n-разрядном регистре.

Соответственно, такое представление возможно и для $F(n-1)$. Разложение $F(n-1)$ имеет вид $F(n-1)=L(n-1)\,f(n-1)$. В этом разложении все элементы определены на $(n-1)$-разрядном регистре. Преобразование $f(n-1)$ является результатом частичного доопределения функции $F(n-2)$.

Другими словами, дальнейшие вычисления оператора могут проводиться для частично определенного преобразования $F(n-1)$, которое рассматривается в текущей итерации процесса разложения исходной функции дифференциальным оператором и т.д.

Нужно отметить, что описанные рассуждения могут проводиться также для процесса последовательного увеличения разрядности (длины) абстрактного регистра. Аналогичные рассуждения проводятся также и для правостороннего дифференциального оператора.

Таким образом, итерационный процесс вычисления дифференциального оператора приводит к построению разрядных функциональных разложений арифметических преобразований, которые определяются на n-разрядном абстрактном регистре, соответственно, для случаев левостороннего либо правостороннего разложения. Эти разложения могут представляться в виде $F(n)=L(n)L(n-1)...L(2)L(1)$ либо $F(n)=P(1)P(2)...P(n-1)P(n)$, т.е. в виде некоторых произведений либо цепей представления дифференциальных операторов.

Нужно отметить, что описанные построения могут касаться также представлений произвольных композиций преобразований и функций, которые могут рассматриваться элементами классов частично доопределенных преобразований, что важно для проведения вычислений.Дальнейшие структурные преобразования связаны с реализацией логического описания дифференциальных операторов.

3. Примеры вычисления дифференциального оператора

В качестве примера вычисления дифференциального оператора и представления структурного описания арифметических функций рассмотрим элементарную функцию умножения на число 3, т.е. $F=3x$ [3]. Пусть эта функция определяется на двоичном n-разрядном абстрактном регистре, т.е. для $m=2^n$.

Построения будем проводить путем вычисления значений частично определенной функции последовательным расширением разрядности абстрактного регистра, начиная с младших разрядов.

Тогда для предложенной функции в случае 2-разрядного регистра $F(2)=(0321)$.

Для 3-разрядного регистра $F(3)=(03614725)$, а 4-разрядного регистра $F(4)=(0369CF258BE147AD)$ и т.д.

В скобках представлены значения исходной функции, определенной на натуральном ряде и нуле. Значения функции представлены в 16-ричной системе счисления.

Тогда $f(3)=(03214765)$ – 3-разрядное частично доопределенное преобразование, образованное на основе $F(2)$, а $f(4)=(036147258BE9CFAD)$ – 4-разрядное, частично доопределенное преобразование, образованное на основе $F(3)$.

В соответствии с определением левостороннего дифференциального оператора $L(3)=F(3)f^{-1}(3)=(02634527)$, а $L(4)=F(4)f^{-1}(4)=(0369CF258BE147AD)$.

Проведение итераций по вычислению значений дифференциального оператора проводится для уточнения структурного описания логических функций переключения разрядов, связанного с ограничением абстрактного регистра справа и для формирования регулярного описания.

Вычисленные дифференциальные операторы рассматриваемой арифметической функции: $L(2)=F(2)$, $L(3)$, $L(4)$ и т.д. представляются преобразованиями локального действия [5] и выполняют функцию инвертирования разрядов абстрактного регистра при определенных логических условиях.

Логические условия инвертирования разрядов имеют вид

$$y(i+1)=y^{'}(i)\{a(i)+a(i-1)\},$$

где $y(i+1)$ – условия инвертирования $(i+1)$-го разряда, $y^{'}(i)$ – инверсное значение условия инвертирования (i)-го разряда, $a(i)$ и $a(i-1)$ – значения логических переменных (i)-го и $(i-1)$-го разрядов абстрактного регистра, связанные логической операцией сложения $\bmod 2$.

Как следует из проведенных построений, рассматриваемая арифметическая функция является элементом класса периодически определенных [2] преобразований абстрактного n-разрядного регистра и может, таким образом, описываться на бесконечном абстрактном регистре. Техническая реализация устройства вычисления функции предложена в [3].

В качестве другого примера вычисления дифференциальных операторов в области арифметических функций и построения их структурного описания будем рассматривать функцию вычисления суммы натурального ряда чисел $F(j)=1+2+...+j$ [4].

Эта функция рассматривалась в качестве одного из элементов образующих класса частично доопределенных арифметических функций [1].

Построения проведем путем левостороннего разложения представленной функции. Разложения проводятся на конечном n-разрядном двоичном регистре.

Как и в предыдущем примере, при построении функции умножения строятся цепи частично определенных и цепи частично доопределенных преобразований. Построения проводятся путем последовательного увеличения длины абстрактного регистра.

В соответствии с выражениями для представления разложений арифметических функций вычисляются значения дифференциального оператора для определенной длины абстрактного регистра. Для предложенной функции дифференциальные операторы представляются в виде цепей локализованных в разрядах преобразований [5]. Это преобразования инверсии переменных, абстрактного регистра при определенных логических условиях.

В результате анализа данных цепей преобразований, определяемых на абстрактном регистре, логическое представление функции $F(j)$ может описываться парой логических переменных $a(i)$ и $b(i)$. Здесь регистровая переменная $a(i)$ служит для представления аргумента функции $F(j)$, т.е. определяет числа j натурального ряда, а регистровая переменная $b(i)$ представляет результат вычисления функции $F(j)$.

Структурные уравнения логических функций имеют вид

$$P(i-1)=P(i-2)a(i-1)Vb(i-1)\{P(i-2)+a(i-1)\},$$

где $P(i-1)$ – вспомогательная переменная для $b(i)$;

$$f(i-1)=\{P(i-2)+a(i-1)\}a(i),$$

где $f(i-1)$ – условия инвертирования для элементов $b(i)$;

$$q(i-1) = a(i),$$

где $q(i-1)$ – условия инвертирования для элементов $a(i)$; а логические символы V и + представляют, соответственно, дизьюнкцию и сложение $\mathrm{mod}\,2$.

Анализ логических уравнений показывает, что предложенная арифметическая функция описывается взаимодействием двух периодически определенных преобразований и поэтому также может рассматриваться на бесконечном абстрактном регистре.

В работе [4] представлена возможная техническая реализация проведенных построений.

4. Выводы

1. Дифференциальный оператор является эффективным средством разложения арифметических функций и преобразований, а также структурных построений для проведения вычислений на абстрактном регистре.
2. Предложенный в работе подход представляется некоторой системой для проведения точных вычислений на абстрактном регистре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев А.К. О представлении арифметических функций в системе обратимых преобразований абстрактного регистра / А.К. Беляев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2011. – № 1. – С. 3 – 8.
2. Глушков В.М. Кибернетика, вычислительная техника, информатика: избр. труды в 3-х т. / Глушков В.М. – Киев: Наукова думка, 1990. – Т. 1. – С. 179 – 191.
3. А.с. 744570 СССР, МКИ G06F7/52. Устройство умножения на три / А.К. Беляев, Г.И. Корниенко, В.В. Ткаченко. – Опубл. 30.06.80, Бюл. № 4.
4. А.с. 947855 СССР, МКИ G06F7/552. Устройство для вычисления функции / А.К. Беляев, Г.И. Корниенко, В.В. Ткаченко. – Опубл. 30.07.82, Бюл. № 28.
5. Беляев А.К. Базовая система микроопераций и ее применение / А.К. Беляев // Кибернетика. – 1972. – № 2. – С. 71 – 76.
6. Холл М. Теория групп / Холл М. – М.: Иностр. лит., 1962. – 468 с.

Стаття надійшла до редакції 22.01.2013