УДК 515.127+519.7

С.В. ЛАЗАРЕНКО[*], О.С. МАКАРЕНКО*

ПРО ОЦІНКИ РОЗМІРНОСТЕЙ АТРАКТОРІВ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ

[*]Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

Анотація. *У статті розглядаються атрактори динамічних систем, оператори еволюції яких представляють багатозначними операторами. Отримані оцінки розмірностей Хаусдорфа. Оцінки таких розмірностей передбачають нелінійність операторів. Оцінки здійснювалися на основі побудови* d*-мір Хаусдорфа. Для іншого випадку показано єдиність розв'язку оціночного співвідношення. На основі розроблених програмних засобів проведено численні розрахунки карт фрактальних розмірностей динамічних систем на обчислювальних кластерах Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ та КПІ.*
Ключові слова: *системи ітерованих функцій, фрактальна розмірність, розмірність Хаусдорфа.*

Аннотация. *В статье рассматриваются аттракторы динамических систем, операторы эволюции которых представляют многозначными операторами. Получены оценки размерностей Хаусдорфа. Оценки таких размерностей предвидят нелинейность операторов. Оценки осуществлялись на основе построения* d*-мер Хаусдорфа. В ином случае показано единство решения оценочного соотношения. На основе разработанных программных способов проведены многочисленные расчеты карт фрактальных размерностей динамических систем на вычислительных кластерах Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ и КПИ.*
Ключевые слова: *системы итерированных функций, фрактальная размерность, размерность Хаусдорфа.*

Abstract. *The attractors of dynamical system which evolution operators represent the multivalued operators are regarded in the paper. The estimates of the Hausdorff dimension were obtained. Estimates of such dimensions anticipate nonlinear operators. The estimates were carried out on the basis of* d *Hausdorff measures building. Otherwise, the estimate unity of the solutions relations were shown.*
On the basis of the developed software methods a numerous of calculations of cards of fractal dimensions of dynamic systems on computer clusters of Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine named after V.M. Glushkov and KPI.
Keywords: *iterated function systems, fractal dimension, Hausdorff dimension.*

1. Вступ

Теорія самоподібних множин (self-similar sets) на сьогоднішній день представляє значний прикладний інтерес в області математичного моделювання. Апарат систем ітерування функцій (СІФ (Iterated Function System)) використовується при побудові алгоритмів архівації даних. Такі алгоритми застосовуються при стисненні відео, звуку, зображень тощо (фрактальні алгоритми стиснення із втратою даних). Вони базуються, як правило, на фрактальних властивостях об'єктів стиснення. Так будують системи СІФ афінних перетворень, що представляли б об'єкти стиснення максимально точно. Теорія систем ітерованих функцій бере свій початок з класичних робіт Дж. Хатчинсона [1], М. Барнслі [2], М. Хати та ін.

Обчислення Хаусдорфової розмірності $(\dim_H)$ атракторів СІФ, без самоперетинів, є добре вивченим, на відміну від розрахунку Хаусдорфової розмірності СІФ із самоперетинами, що є більш складною, та менш вивченою проблемою в теорії СІФ, яка останнім часом представляє все більший прикладний інтерес. Обчисленню $\dim_H$ із самоперетинами присвячено ряд робіт, як правило, зосереджених на частинних випадках подібних СІФ. Серед таких сучасних робіт варто відзначити здобутки Ванга, Нгаі, Морана, Барані [3–5] та в їхніх посиланнях.

Серед класичних робіт вивчення систем ітерованих функцій із самоперетинами відзначимо роботи К. Симона, Б. Солом'яка, М. Урбанскі [6]. Вони у своїх роботах проводять розрахунок розмірностей Хаусдорфа граничних множин параболічних СІФ, що залежать від параметра та задовольняють, зокрема, трансверсальній умові. Поміж частинних випадків СІФ, що саме перетинаються, зазначимо роботи Барані [7, 8], де вивчаються СІФ, сформовані із набору лінійних операторів, які мають спільні непорушні точки.

Низка робіт Ванга та Нгаі присвячені підходу в оцінці розмірності Хаусдорфа граничної множини СІФ, що задовольняє умові скінченної кількості типів околів (neighborhood type) [3]. Цей підхід базується на побудові орієнтованого графа інцидентності для типів околів та його редукції, а вже на основі спектрального радіуса матриці інцидентності такого графа і розраховують фрактальну розмірність граничної множини СІФ. У цих роботах показана рівність фрактальної та Хаусдорфової розмірностей для таких множин.

Також можна виділити окремий напрям в оцінці розмірностей граничних множин СІФ із самоперетинами, що базується на зведенні початкової СІФ скінченного набору операторів, для якої не виконується умова OSC, до СІФ із зліченним набором операторів, для якого виконується OSC, розрахунок же розмірності останнього вже не представляє складності. Серед робіт, в яких вперше були озвучені такі ідеї, відзначимо роботи М. Морана [5], де спрощення такої СІФ базується на побудові індуктивної процедури Віталі. Так, М. Моран показав, що атрактори гіперболічної СІФ із самоперетинами та приведеної СІФ із зліченним набором операторів, для якого виконується OSC, мають однакову фрактальну розмірність.

Таким чином, дану статтю присвячуємо дослідженню фрактальних властивостей частинних випадків атрактора A оператора еволюції H динамічної системи із антисипацією (ДСА), а саме ми розглядаємо питання оцінки розмірностей Хаусдорфа множини A зверху. З системами такого типу можна ознайомитись у роботах [9, 10].

2. Основні поняття

Розглядатимемо скінченну систему функцій $F=\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$, $f_i : I \to I, I \subseteq R^n$, визначених у повному метричному просторі (I, d) із метрикою d, яка розглядається як метрика Хаусдорфа $d_H(X,Y)=\max\left\{\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}\rho(x, y), \sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x\in X}\rho(x, y)\right\}$, $X, Y \in Comp(I)$, ρ – Евклідова метрика на I. Нехай кожне відображення f_i є λ_i- стисненням, тобто Ліпшицева константа кожного з них

$$Lip(f_i(I)) = \sup_{\substack{\forall x,y\in I,\\ x\neq y}} \frac{\rho(f_i(x), f_i(y))}{\rho(x, y)} = \lambda_i(I) < 1, \quad i=\overline{1, N}\,.$$

Таку систему F називають (гіперболічною) системою ітерованих функцій.

Оператор $H: Comp(I) \to Comp(I)$, що діє на множині всіх непустих компактних підмножин із $I: H(K)=\bigcup\limits_{x\in K}\bigcup\limits_{i=1}^{N} f_i(x) \quad K \in Comp(I)$, називають оператором Хатчинсона чи оператором Барнслі. Як добре відомо [1], такий оператор має єдину непорушну точку $\mathrm{A}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H^k(K) \Rightarrow \mathrm{A}=H(\mathrm{A})$ в $Comp(I)$. Інваріантну множину A оператора H називають самоподібною множиною. Для такої множини вводять самоподібну розмірність s як єдиний корінь рівняння $\sum_{s=1}^{N}\lambda_i^s = 1$ (введена Мандельбротом), інколи цю рівність називають формулою Морана.

Для СІФ, що задовольняють умові $f_i(X)\cap f_j(X)=0$ при $i\neq j$ для $\forall i, j\in\{1, 2,\ldots, N\}$ (часто називають умовою відкритих множин (OSC)), Хатчинсон показав [1], що розмірність Хаусдорфа $\dim_H(\mathrm{A})$, її атрактора рівна розмірності Мінковського (бокс-розмірності) $\dim_B(\mathrm{A})$ і рівна самоподібній розмірності s. СІФ, що не задовольняють умові відкритих множин, називають СІФ із самоперетинами. Розрахунок розмірностей таких систем на порядок складніший від розрахунку розмірностей атракторів СІФ із OSC.

Визначають скінченний алфавіт $\Sigma=\{1, 2, \ldots, N\}$ символьної динаміки із СІФ F. Послідовність застосування операторів із F кодують послідовністю $\mathbf{i}=i_1 i_2\ldots i_p$, $i_j\in\Sigma$ для $j=\overline{1, p}$ і записують $\mathbf{i}\in\Sigma^p$. У символьній динаміці $\mathbf{i}$ називають словом довжини p в алфавіті Σ. Позначають довжину слова через $|\mathbf{i}|=p$. Така послідовність визначає порядок композиції операторів із F:

$$f_{\mathbf{i}}(\cdot)=f_{i_1 i_2\ldots i_p}(\cdot)=f_{i_1}\circ f_{i_2}\circ\ldots\circ f_{i_p}(\cdot).$$

При $|\mathbf{i}|=0$ (тобто пусте слово) розуміють тотожне відображення $f_{\mathbf{i}}(x)=x$. Перші p символів у слові $\mathbf{i}$ записують $\mathbf{i}(p)$. Через Σ^* позначатимемо множину всіх скінченних послідовностей номерів із $\{1, 2, \ldots, N\}$, тобто $\Sigma^*=\bigcup_{p\geq 0}\Sigma^p$. На множині Σ^∞ визначають адресне відображення $\pi:\Sigma^\infty\to\mathrm{A}$. Як добре відомо, границя $\pi(\mathbf{i})=\lim_{|\mathbf{i}|\to\infty} f_{\mathbf{i}}(x)$ існує, але не залежить від вибору $x\in I$. Так, $\mathbf{i}$ задає адресу x. Варто відзначити, що x може мати більше, ніж одну адресу, тобто адресне відображення π в загальному випадку є сюр'єктивним, до того ж неперервним. Сам атрактор F можна переписати як

$$\mathrm{A}=\bigcup_{\mathbf{i}\in\Sigma^p} f_{\mathbf{i}}(x) \tag{1}$$

для $\forall x\in I$ при $p\to\infty$.

На множині $\Sigma^*\cup\Sigma^\infty$ визначають відношення лексикографічного порядку таким чином. Нехай маємо два слова $\mathbf{i}, \mathbf{j}\in\Sigma^*\cup\Sigma^\infty$, в яких співпадають перші $k-1$ символів $\mathbf{i}(k-1)=\mathbf{j}(k-1)$. Якщо $i_k > j_k$, то кажуть, що слово $\mathbf{j}$ передує слову $\mathbf{i}$. На множині $\Sigma^*\cup\Sigma^\infty$ також визначають операцію злиття слів (конкатенацію). Якщо $\mathbf{i}\in\Sigma^p$ скінченне слово, а $\mathbf{j}\in\Sigma^*\cup\Sigma^\infty$, то через $\mathbf{ij}=i_1 i_2\ldots i_{|\mathbf{i}|} j_1 j_2\ldots\in\Sigma^*\cup\Sigma^\infty$ позначають їх конкатенацію.

Через $H^d(\cdot)$ позначатимемо d-міру Хаусдорфа, тобто

$$H^d(X)=\lim_{\delta\to 0}\inf_{\{u_i\}}\left(c_d\cdot\sum_i diam(u_i)^d \mid X\subset\bigcup_i u_i,\, diam(u_i)<\delta, \forall i\right)$$

із нормуючим коефіцієнтом c_d [1].

3. Оцінка розмірності Хаусдорфа для атрактора ДСА без самоперетинів

Тепер проведемо оцінку розмірності Хаусдорфа $\dim_H(\mathrm{A})$ зверху для СІФ F із нелінійними функціями, що задає оператор еволюції антисипаційної системи [9, 10]. Розглядатимемо випадок, коли F задовольняє умові OSC. p-те наближення інваріантної множини A системи F позначимо із (1) як $\mathrm{A}_p = \bigcup_{\mathbf{i}\in\Sigma^p} \mathrm{A}_{\mathbf{i}}$, тобто $\mathrm{A} = \mathrm{A}_\infty$ (тобто об'єднання всіх підмножин із адресами зліченної довжини). Для нього, очевидно, виконується наступна умова, що $diam(\mathrm{A}_{\mathbf{i}}) \le \lambda_{\mathbf{i}} \cdot diam(\mathrm{A})$ ([1]), тут під $\lambda_{\mathbf{i}}$ розуміють Ліпшицевий коефіцієнт композиції $f_{\mathbf{i}}(\cdot)$. Неважко переконатися, що $\lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{i_1 i_2 \ldots i_{|\mathbf{i}|}} \le \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_{|\mathbf{i}|}}$. Нерівності тут перетворюються у рівності у випадку, коли всі стиснення з F будуть самоподібними на R^n [5].

Можемо записати d-міру A_p таким чином (розглядаємо самоподібну множину), опускаючи нормуючий коефіцієнт:

$$H^d(\mathrm{A}_p) = \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma^p} diam(\mathrm{A}_{\mathbf{i}})^d = \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma^p} \left(\lambda_{i_1}(I_1)\cdot\lambda_{i_2}(I_2)\cdot\ldots\cdot\lambda_{i_p}(I_p)\cdot diam(\mathrm{A})\right)^d .$$

Тут $I_p \equiv I$, $I_{p-j} = f_{i_{p-j+1}}(I_{p-j+1})$ для $j = \overline{1, p-1}$. Звідси неважко побачити, що $I_j \subseteq I_p$ в силу стиснення f_i. Оцінимо Ліпшицеві константи зверху:

$$\lambda_{i_j}(I_j) \le \lambda_{i_j}(I) \text{ для } \forall j . \tag{2}$$

Таким чином, запишемо оцінку $\overline{H}^d(\mathrm{A}_p)$ зверху для міри $H^d(\mathrm{A}_p)$:

$$H^d(\mathrm{A}_p) \le \overline{H}^d(\mathrm{A}_p) = \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma^p} \left(\lambda_{i_1}(I)\cdot\lambda_{i_2}(I)\cdot\ldots\cdot\lambda_{i_p}(I)\cdot diam(\mathrm{A})\right)^d =$$

$$= diam(\mathrm{A})^d \cdot \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma^p} \left(\lambda_{i_1}(I)\cdot\lambda_{i_2}(I)\cdot\ldots\cdot\lambda_{i_p}(I)\right)^d = diam(\mathrm{A})^d \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(I)^d\right)^p .$$

Тут використали той факт, що суму всіх можливих добутків мультиплікаторів відповідних p-слів можна представити як суму цих мультиплікаторів у степені p [1].
Звідси при переході $p \to \infty$ матимемо умову

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(I)^d = 1, \tag{3}$$

при якій $0 < \overline{H}^d(\mathrm{A}) < \infty$, що відповідає формулі Морана із максимальними значеннями мультиплікаторів на всьому I кожного із стискаючих відображень f_i. Враховуючи ту властивість d-міри Хаусдорфа, що із $H^d(E_1) \le H^d(E_2)$, де $E_1 \subseteq E_2$, виконується нерівність розмірностей Хаусдорфа $\dim_H(E_1) \le \dim_H(E_2)$. Таким чином, маємо оцінку для $\dim_H(\mathrm{A})$ зверху $\dim_H(\mathrm{A}) \le d$, де d – єдиний розв'язок (3).

4. Оцінка розмірності Хаусдорфа для атрактора ДСА із самоперетинами

Цей підрозділ присвятимо оцінці розмірності Хаусдорфа $\dim_H(\mathrm{A})$ зверху для СІФ F із нелінійними функціями, що перетинаються. Розглядатимемо систему F, що задовольняє умовам із [4]. В даній роботі була отримана формула розмірності Хаусдорфа для системи із лінійних операторів. Покажемо, що з її допомогою можна отримати оцінку зверху $\dim_H(\mathrm{A})$ для системи із нелінійних операторів. Збережемо наступні позначення.

Σ_1 та Σ_2 (при $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$) – алфавіти двох наборів операторів із F, що не перетинаються, для кожного з наборів виконується умова OSC. Кожний оператор із Σ_1 має не порожній перетин із деяким оператором з Σ_2. У [4] показано, що можна виділити такий набір операторів $\{f_{ij\mathbf{i}} \mid i \in \Sigma_1,\ j \in D_2 \subseteq \Sigma_2, \mathbf{i} \in \Sigma_1^m\}$, котрий разом з операторами із Σ_2 задовольняє умові OSC. Позначимо через Σ_3 всі такі слова $\mathbf{w} = ij\mathbf{i}$. Більш того, показано, що кожна точка на A належить точці атрактора операторів із $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Автори у [4] показали, що СІФ із самоперетинами такого типу задовольняє слабкій умові подільності. Це є важливою умовою при дослідженні оцінок розмірностей таких СІФ, оскільки ще Мораном було доведено, що навіть при виконанні умови OSC система ітерованих функцій із зліченним набором операторів може мати не додатну міру.

Отже, p-те наближення інваріантної множини A системи F в цьому випадку прийме вид $\mathrm{A}_p = \bigcup\limits_{\mathbf{i} \in \Sigma_2^p} \mathrm{A}_{\mathbf{i}} \cup \bigcup\limits_{\mathbf{i} \in \Sigma_3^p} \mathrm{A}_{\mathbf{i}}$. Запишемо d-міру для A_p (опускаючи нормуючий коефіцієнт):

$$H^d(\mathrm{A}_p) = H^d\left(\bigcup_{\mathbf{i} \in \Sigma_2^p} \mathrm{A}_{\mathbf{i}}\right) + H^d\left(\bigcup_{\mathbf{i} \in \Sigma_3^p} \mathrm{A}_{\mathbf{i}}\right) = \sum_{\mathbf{i} \in \Sigma_2^p} diam(\mathrm{A}_{\mathbf{i}})^d + \sum_{ij\mathbf{i} \in \Sigma_3^p} diam(\mathrm{A}_{ij\mathbf{i}})^d =$$
$$= \sum_{\mathbf{i} \in \Sigma_2^p} \left(\lambda_{i_1}(I_1) \cdot \lambda_{i_2}(I_2) \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_p}(I_p) \cdot diam(\mathrm{A})\right)^d +$$
$$+ \sum_{\mathbf{w}_1 \ldots \mathbf{w}_p \in \Sigma_3^p} \left(l_{\mathbf{w}_1}(J_1) \cdot l_{\mathbf{w}_2}(J_2) \cdot \ldots \cdot l_{\mathbf{w}_p}(J_p) \cdot diam(\mathrm{A})\right)^d, \tag{4}$$

де $J_p \equiv I$, $J_{p-k} = f_{\mathbf{w}_{p-k+1}}(J_{p-k+1})$ для $k = \overline{1, p-1}$. За аналогією із I_i матимемо $J_k \subseteq J_p$ в силу стиснень $f_{\mathbf{w}}$. Мультиплікатори $l_{\mathbf{w}_k}$ тут $l_{\mathbf{w}_k}(J_k) = \lambda_{i_k}(J_{k_2})\lambda_{j_k}(J_{k_1})\lambda_{\mathbf{i}_k}(J_{k_0})$, де $\mathbf{w}_k = i_k j_k \mathbf{i}_k$, $J_{k_0} = J_k$, $J_{k-1} = f_{j_k}(J_{k_2})$. Враховуючи (2), оцінимо значення мультиплікаторів $l_{\mathbf{w}_k}$ зверху $l_{\mathbf{w}_k}(J_k) \le \lambda_{i_k}(I)\lambda_{j_k}(I)\lambda_{\mathbf{i}_k}(I)$. Оцінка зверху для першого доданку в (4) аналогічна тій, що отримана в попередньому розділі. Другий же доданок не перевищуватиме

$$\overline{H}^d\left(\bigcup_{\mathbf{i} \in \Sigma_3^p} \mathrm{A}_{\mathbf{i}}\right) = diam(\mathrm{A})^d \cdot \sum_{i_1 j_1 \mathbf{i}_1 \ldots i_p j_p \mathbf{i}_p \in \Sigma_3^p} \left(\lambda_{i_1}(I)\lambda_{j_1}(I)\lambda_{\mathbf{i}_1}(I) \cdot \lambda_{i_2}(I)\lambda_{j_2}(I)\lambda_{\mathbf{i}_2}(I) \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_p}(I)\lambda_{j_p}(I)\lambda_{\mathbf{i}_p}(I)\right)^d,$$

тобто суму всіх можливих добутків по p мультиплікаторів $\lambda_{i_k}(I)\lambda_{j_k}(I)\lambda_{\mathbf{i}_k}(I)$, а маючи на увазі міркування із попереднього розділу, останнє можемо переписати як

$$diam(\mathrm{A})^d \cdot \left(\sum_{i_k j_k \mathbf{i}_k \in \Sigma_3^p} \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d \lambda_{\mathbf{i}_k}(I)^d\right)^p.$$

Групуючи доданки по всіх i_k, а їх множники по всіх j_k, отримаємо третій множник у вигляді суми мультиплікаторів, що відповідають словам довжини від 1 до m в алфавіті Σ_1. Таким чином, останній вираз зможемо записати у вигляді

$$diam(\mathrm{A})^d \left(\sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_2} \lambda_j(I)^d \cdot \sum_{\mathbf{i} \in \bigcup_{k=1}^{m} \Sigma_1^k} \lambda_{\mathbf{i}}(I)^d\right)^p.$$

Проведемо оцінку для множника $\sum\limits_{\mathbf{i}\in\bigcup\limits_{k=1}^{m}\Sigma_1^k}\lambda_{\mathbf{i}}(I)^d=\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sum\limits_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\right)^k\le 1\Big/\left(1-\sum\limits_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\right).$

Повертаючись до оцінки (4), $\overline{H}^d(\mathrm{A}_p)$ прийме вид

$$H^d(\mathrm{A}_p)\le\overline{H}^d(\mathrm{A}_p)=diam(\mathrm{A})^d\cdot\left(\left(\sum_{i\in\Sigma_2}\lambda_i(I)^d\right)^p+\left(\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\cdot\sum_{j\in D_2}\lambda_j(I)^d\cdot 1\Big/\left(1-\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\right)\right)^p\right)\le$$

$$\le diam(\mathrm{A})^d\cdot\left(\sum_{i\in\Sigma_2}\lambda_i(I)^d+\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\cdot\sum_{j\in D_2}\lambda_j(I)^d\cdot 1\Big/\left(1-\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\right)\right)^p.$$

При переході $p\to\infty$, для того щоб оціночна d-міра $\overline{H}^d(\mathrm{A}_p)$ була строго додатна та скінченна, необхідно, щоб виконувалась умова

$$\sum_{i\in\Sigma_2}\lambda_i(I)^d+\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\cdot\sum_{j\in D_2}\lambda_j(I)^d\cdot 1\Big/\left(1-\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\right)=1.$$

Після нескладних перетворень матимемо

$$\sum_{i\in\Sigma}\lambda_i(I)^d-\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\cdot\sum_{j\in\Sigma_2\setminus D_2}\lambda_j(I)^d=1. \qquad (5)$$

Лема. Співвідношення (5) має єдиний розв'язок.
Розглядаємо функцію $\gamma(d)=\sum\limits_{i\in\Sigma}\lambda_i(I)^d-\sum\limits_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\cdot\sum\limits_{j\in\Sigma_2\setminus D_2}\lambda_j(I)^d$. Вона неперервна на $[0;\infty)$.

Позначимо $|\Sigma_1|=n_1$, $|\Sigma_2|=n_2$, $|D_2|=m_2$.

$\gamma(0)=n_1+n_2-n_1\cdot(n_2-m_2)\ge n_1+n_2-n_1\cdot n_2=c\ \Rightarrow n_1=\dfrac{c-n_n}{1-n_2}>1\Rightarrow c>1$, тому $\gamma(0)>1$.

$\gamma(d)\to 0$ при $d\to\infty$.

Продиференціюємо (5) по d:

$$\gamma'(d)=\sum_{i\in\Sigma}\lambda_i(I)^d\ln\lambda_i(I)-\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\ln\lambda_i(I)\cdot\sum_{j\in\Sigma_2\setminus D_2}\lambda_j(I)^d-\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\cdot\sum_{j\in\Sigma_2\setminus D_2}\lambda_j(I)^d\ln\lambda_j(I)=$$

$$=\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\ln\lambda_i(I)\left[1-\sum_{j\in\Sigma_2\setminus D_2}\lambda_j(I)^d\right]+\sum_{j\in\Sigma_2\setminus D_2}\lambda_j(I)^d\ln\lambda_j(I)\left[1-\sum_{i\in\Sigma_1}\lambda_i(I)^d\right]+\sum_{j\in D_2}\lambda_j(I)^d\ln\lambda_j(I)<0,$$

бо кожний із доданків – від'ємний. Тобто, $\gamma(d)$ – строго спадна, а тому прийме значення 1 лише в одній точці. Лему доведено.

У результаті маємо оцінку розмірності $\dim_H(\mathrm{A})$ зверху для атрактора СІФ із самоперетинами зазначеного вище типу $\dim_H(\mathrm{A})\le d$, де d – єдиний розв'язок (5).
Співвідношення (5) співпадає із формулою, отриманою у [4], при урахуванні інтервалу, по якому проводиться розрахунок мультиплікаторів.

5. Комп'ютерні обчислення фрактальних розмірностей

У цьому розділі ми представимо результати комп'ютерних обчислень фрактальних розмірностей атракторів динамічної системи із антисипацією на множині параметрів такої ДС.

Результати були отримані на обчислювальному кластері СКІТ-4 Інституту ім. В.М. Глушкова НАН України. Для розрахунків був спроектований пакет програмних засобів на мові програмування Java.

Розрахунок фрактальних розмірностей проводився по двопараметричній карті у просторі параметрів (λ, α) квадратичної динамічної системи $x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n) - \alpha \cdot x_{n+1}^2$ з антисипацією першого порядку. Розмірності атракторів, що приймають значення у $[0;1]$, представлені відтінками чорного кольору. Розмірності 1 відповідає чорний колір, а розмірності 0 – білий.

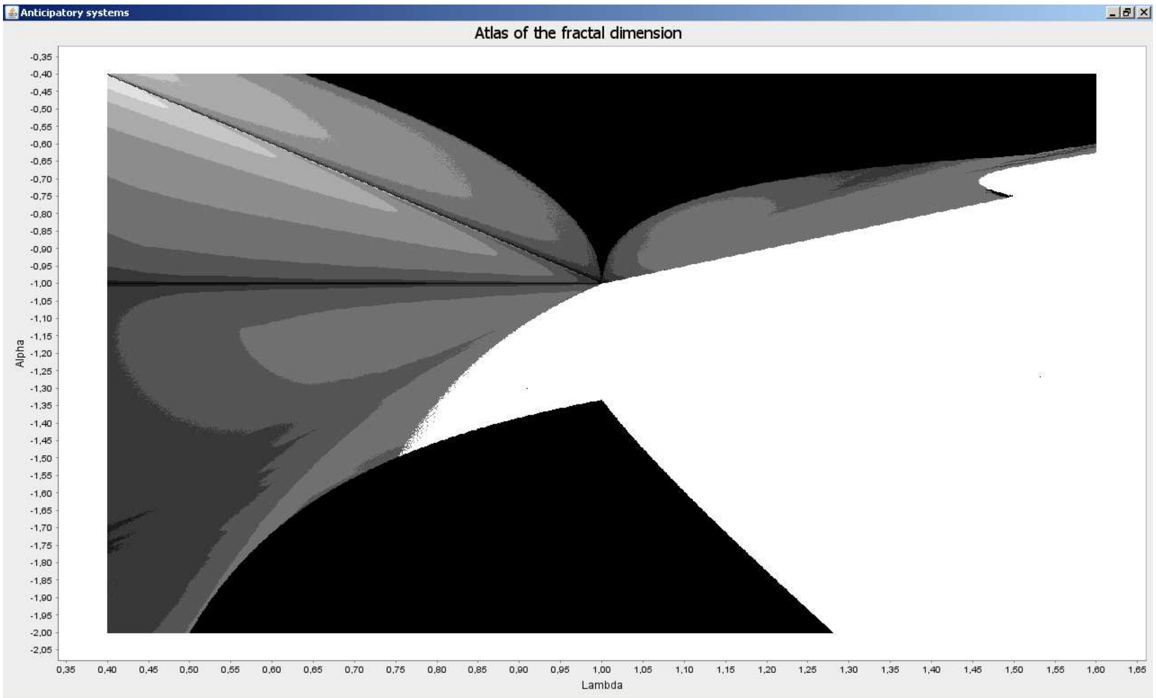

Рис. 1. Карта фрактальних розмірностей ДСА на множині її параметрів (λ, α)

Розрахунок проводився, базуючись на описаній у [10] схемі побудови карт абстрактних показників. Так, суцільні білі області свідчать про те, що на відповідній множині пар (λ, α) чи існують регулярні атрактори, чи траєкторії цієї дискретної ДС «перериваються» або йдуть на нескінченність.

6. Висновки

Проведена робота була орієнтована на один із найперспективніших напрямів математичного моделювання – дослідження фрактальних властивостей атракторів систем різних типів, які можна представляти багатозначними операторами. Зокрема, розглядалися атрактори систем ітерованих функцій, до яких часто зводяться оператори еволюції нелінійних дискретних динамічних систем із антисипацією. В полі зору знаходилися випадки СІФ з нелінійними операторами без самоперетинів та із самоперетинами визначеного типу, що не підпадає під так званий «скінченний тип сусідства».

Так, було отримано оцінки розмірності Хаусдорфа зверху для атракторів обох випадків СІФ на основі оціночної d-міри. Для випадку СІФ без самоперетинів було показано, що оцінка розмірності Хаусдорфа зверху визначається за формулою Морана. Для випадку ж СІФ із самоперетинами типу, що розглядаються, доведено, що така оцінка зверху визначається за співвідношенням, отриманим Денг КіРонгом (Deng QiRong) та Джоном Хардінгом. Однак обидві оцінки враховують інтервали, за якими визначаються мультиплікатори відповідних операторів у СІФ. Показано єдиність розв'язку оціночного співвідношення для випадку СІФ із самоперетинами. Проведені чисельні розрахунки фрактальних розмірностей атракторів ДСА у просторі параметрів цієї динамічної систем, на основі яких побудовано карти фрактальних розмірностей.

У подальшому варто проводити оцінки розмірностей знизу для вказаних випадків СІФ чи розглядати інші особливі випадки самоперетинів між операторами СІФ. Розробка апарата побудови та аналізу систем ітерованих функцій дозволить розв'язувати різноманітні проблеми фрактальної геометрії, що може мати потужний прикладний результат, зокрема, в кібернетиці: теорії класифікації, розпізнавання образів тощо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hutchinson J.E. Fractals and Self-Similarity / J.E. Hutchinson // Indiana Univ., Math. Journal. – 1981. – Vol. 30, N 5. – P. 713 – 747.
2. Barnsley M.F. Fractals everywhere / Barnsley M.F. – Boston: Academic Press, 1988. – 394 p.
3. Ngai S. Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps / S. Ngai, Y. Wang // J. London Math. Soc. – 2001. – Vol. 63, N 3. – P. 655 – 672.
4. Deng Q. Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps / Q. Deng, J. Harding, Y.H. Tian // J. Science in China Series A: Mathematics. – 2009. – Is. 1, Vol. 52. – P. 119 – 128.
5. Moran M. Hausdorff measure of infinitely generated self-similar sets / M. Moran // Monatsh Math. – 1996. – Vol. 122. – P. 387 – 399.
6. Simon K. Hausdorff dimension of limit sets for parabolic IFS with overlaps / K. Simon, B. Solomyak, M. Urbanski // Pacific J. Math. – 2001. – Vol. 201, N 2. – P. 441 – 478.
7. Barany B. On the Hausdorff Dimension of a Family of Self-Similar Sets with Complicated Overlaps / B. Barany // Fund. Math. – 2009. – Vol. 206. – P. 49 – 59.
8. Barany B. Dimension of the generalized 4-corner set and its projections / B. Barany // Erg. Th. & Dyn. Sys.– 2012. – Vol. 32, N 4. – P. 1190 – 1215.
9. Лазаренко С.В. Класифікація операторів однієї дискретної антисипаційної системи першого порядку / С.В. Лазаренко, О.С. Макаренко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 97 – 106.
10. Лазаренко С.В. Багатопоточні комп'ютерні обчислення у дослідженні нелінійних динамічних систем / С.В. Лазаренко, О.С. Макаренко // Прикладні проблеми програмування. – 2013. – № 3. – С. 109 – 116.

Стаття надійшла до редакції 25.04.2013