УДК 519.85

Л.Г. РАСКИН[*], О.В. СЕРАЯ[*], Т.И. КАТКОВА[**]

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕСЕПАРАБЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО РЕСУРСА ПРИ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

[*]Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина
[**]Бердянский университет менеджмента и бизнеса, Бердянск, Украина

Анотація. *Задача раціонального розподілу багатовимірного ресурсу при багатономенклатурному виробництві формалізована як нелінійна несепарабельна задача математичного програмування. Для вирішення задачі запропонована ітераційна процедура з кінцевим числом кроків.*
Ключові слова: *математичне програмування, багатовимірний ресурс, нелінійна задача, несепарабельна задача, ітерації.*

Аннотация. *Задача рационального распределения многомерного ресурса при многономенклатурном производстве формализована как нелинейная несепарабельная задача математического программирования. Для решения задачи предложена итерационная процедура с конечным числом шагов.*
Ключевые слова: *математическое программирование, многомерный ресурс, нелинейная задача, несепарабельная задача, итерации.*

Abstract. *The problem of rational distribution of multidimensional resource under multinomenclature production is formalized as a nonlinear inseparable mathematical programming problem. For solving the problem the iterative procedure with a finite number of steps is suggested.*
Keywords: *mathematical programming, multidimensional resource, nonlinear problem, inseparable problem, iterations.*

1. Введение

Многочисленные задачи планирования в экономике, технике, военном деле и т.п. сводятся к математической модели, типичной для так называемых задач рационального распределения многомерного ресурса [1–4]. Характерная особенность формулировки таких задач: линейная или нелинейная сепарабельная целевая функция и линейные ограничения. Вместе с тем, в экономических приложениях для описания функции прибыли, получаемой от распределения ресурса, предлагается более адекватная модель, приводящая к аддитивно-мультипликативной функции типа Кобба-Дугласа [5]. Понятно, что традиционные методы решения задачи в этом случае не эффективны.

2. Постановка задачи

В условиях ненасыщенного рынка задача рационального распределения многомерного ресурса при производстве многономенклатурного продукта распадается на две подзадачи.

Подзадача 1. Отыскание рационального плана производства многономенклатурного продукта, обеспечивающего максимальную прибыль от его реализации.

Подзадача 2. Рациональное распределение многомерного ресурса при выполнении выработанного плана производства.

Рассмотрим последовательно методы решения поставленных задач.

3. Основные результаты

Подзадача 1.

Введем $A=(a_1,a_2,...,a_m)$ – вектор, задающий количество ресурса каждого вида;

C_i – стоимость единицы ресурса i-го вида, $i = 1, 2, \ldots m$;

C_0 – суммарный финансовый ресурс, распределяемый при планировании производства;

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – искомый вектор распределения ресурса;

$\varphi_j(b_j)$ – функция, определяющая прибыль от реализации *j*-го продукта при вложении ресурса b_j в его производство, $j = 1, 2, \ldots n$.

Математическая модель задачи имеет вид: найти набор $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, максимизирующий суммарную прибыль

$$\Phi(B) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(b_j) \tag{1}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = C_0, \quad b_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots n. \tag{2}$$

Пусть, например,

$$\varphi_j(b_j) = a_{0j} b_j^{a_{1j}}.$$

Тогда

$$\Phi(B) = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} b_j^{a_{1j}}.$$

Решим задачу методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$\tilde{\Phi}(B) = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} b_j^{a_{1j}} - \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - C_0 \right).$$

Далее

$$\frac{d\tilde{\Phi}(B)}{db_j} = a_{0j} a_{1j} b_j^{\alpha_{1j}-1} - \lambda = 0, \quad j = 1, 2, \ldots n;$$

$$b_j = \left(\frac{\lambda}{a_{0j} a_{1j}} \right)^{\frac{1}{a_{1j}-1}}, \quad j = 1, 2, \ldots n. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{a_{0j} a_{1j}} \right)^{\frac{1}{a_{1j}-1}} = C_0. \tag{4}$$

Уравнение (4) относительно λ решается численно. Аналитическое решение легко может быть получено, если $a_{1j} = a_1$, $j = 1, 2, \ldots n$. Тогда уравнение (4) упрощается к виду

$$\left(\frac{\lambda}{a_1} \right)^{\frac{1}{a_1-1}} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{a_{0j}} \right)^{\frac{1}{a_1-1}} = C_0,$$

откуда

$$\left(\frac{\lambda}{a_1}\right)^{\frac{1}{a_1-1}} = \frac{C_0}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{0j}}\right)^{\frac{1}{a_1-1}}}. \qquad (5)$$

Теперь, подставляя (5) в (3), получим искомое значение b_j:

$$b_j = \left(\frac{\lambda}{a_1}\right)^{\frac{1}{a_1-1}} \left(\frac{1}{a_{0j}}\right)^{\frac{1}{a_1-1}} = \frac{C_0\left(\frac{1}{a_{0j}}\right)^{\frac{1}{a_1-1}}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{0j}}\right)^{\frac{1}{a_1-1}}}, \quad j = 1,2,...n. \qquad (6)$$

Полученный набор входит в число исходных данных для решения подзадачи 2.

Подзадача 2.

Введем матрицу $X = (x_{ij})$, x_{ij} – количество ресурса i-го вида, направляемого на изготовление j-го продукта. Пусть $\varphi_j(b_j) = \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{\beta_{ij}}$ – функция, задающая среднюю прибыль, обеспечиваемую реализацией j-го продукта при вложении $X_j = (x_{1j}, x_{2j},..., x_{mj})$.

Теперь сформулируем подзадачу 2 следующим образом: найти матрицу $X = (x_{ij})$, $i = 1,2,...m$, $j = 1,2,...n$, максимизирующую среднюю суммарную прибыль, соответствующую выбранному распределению многономенклатурного ресурса $(a_1, a_2,..., a_m)$, вычисляемую по формуле

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{\beta_{ij}} \qquad (7)$$

и удовлетворяющую ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,...m, \qquad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_i x_{ij} = b_i, \quad j = 1,2,...n, \qquad (9)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,...m, \quad j = 1,2,...n, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (10)$$

Полученная модель задает достаточно сложную задачу математического программирования с нелинейной несепарабельной целевой функцией и ограничениями, характерными для распределительных задач линейного программирования. Понятно, что непосредственное решение задачи стандартными методами математического программирования затруднительно.

Приближенное решение может быть получено с использованием следующей процедуры.

Вначале несколько упростим задачу, преобразовав ее ограничения к виду, типичному для транспортных задач линейного программирования. С этой целью введем новые переменные $z_{ij} = C_i x_{ij}$. Подставляя эти переменные в ограничения (8) и (9), получим

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = a_i C_i = d_i, \; i = 1, 2, \ldots m, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = b_j, \;\; j = 1, 2, \ldots n, \tag{12}$$

$$z_{ij} \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots m, \;\; j = 1, 2, \ldots n. \tag{13}$$

Одновременно преобразуем и целевую функцию (7):

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{z_{ij}}{C_i} \right)^{\beta_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} G_j \prod_{i=1}^{m} \left(z_{ij} \right)^{\beta_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} G_j \prod_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\left(z_{ij} \right), \tag{14}$$

где $G_j = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{C_i} \right)^{\beta_{ij}}$ – коэффициент, не зависящий от оптимизируемого набора, $j = 1, 2, \ldots n$.

Решение задачи достигается в результате реализации двухэтапной процедуры, основанной на следующей теореме.

Теорема. Для того, чтобы набор $\left\{ z_{ij}^{*} \right\}$ был решением задачи (11)–(14), необходимо и достаточно, чтобы этот набор, удовлетворяя (11)–(13), максимизировал

$$\Phi_j\left(z_{ij} \right) = \prod_{i=1}^{m} \Phi_{ij}\left(z_{ij} \right),$$

то есть имело место

$$\prod_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\left(z_{ij}^{*} \right) = \max_{\left\{ z_{ij} \right\}} \left\{ \prod_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\left(z_{ij} \right) \right\} \tag{15}$$

для всех $j = 1, 2, \ldots n$.

Достаточность. Пусть $\left\{ z_{ij}^{(0)} \right\}$ – произвольный набор, удовлетворяющий (11)–(13) и не совпадающий с $\left\{ z_{ij}^{*} \right\}$. В силу (15) имеем

$$\prod_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\left(z_{ij}^{*} \right) \geq \prod_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\left(z_{ij}^{(0)} \right), \; j = 1, 2, \ldots n.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\left(z_{ij}^{*} \right) \geq \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} \varphi_{ij}\left(z_{ij}^{(0)} \right). \tag{16}$$

Полученное неравенство означает, что при выполнении требований теоремы набор $\left\{ z_{ij}^{*} \right\}$ является решением задачи.

Необходимость. Покажем, что из оптимального набора $\left\{ z_{ij}^{*} \right\}$ в целом следует его оптимальность по столбцам.

Предположим противное, что существует набор $\left\{ z_{ij}^{**} \right\}$, оптимальный в целом и не совпадающий с оптимальным по столбцам набором $\left\{ z_{ij}^{*} \right\}$. Из оптимальности $\left\{ z_{ij}^{**} \right\}$ в целом следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}^{**}\right)\geq\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}\right)$$

для любого набора $\{z_{ij}\}$, в том числе и для набора $\{z_{ij}^{*}\}$, не совпадающего с $\{z_{ij}^{**}\}$, то есть

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}^{**}\right)\geq\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}^{*}\right). \tag{17}$$

С другой стороны, из оптимальности $\{z_{ij}^{*}\}$ по столбцам следует, что

$$\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}^{*}\right)\geq\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}\right)$$

для любого набора $\{z_{ij}\}$, в том числе и для набора $\{z_{ij}^{**}\}$, не совпадающего с $\{z_{ij}^{*}\}$, то есть

$$\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}^{*}\right)\geq\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}^{**}\right),$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}^{*}\right)\geq\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}^{**}\right). \tag{18}$$

Полученные неравенства (17) и (18) противоречат друг другу. Таким образом, предположение о возможности существования набора, оптимального в целом, но неоптимального по столбцам, привело к противоречию. Теорема доказана.

С использованием этой теоремы решение исходной задачи на первом этапе сводится к последовательному решению n задач (для $j=1,2,...n$) типа: найти набор $\{z_{ij}\}$, максимизирующий

$$\Phi_{j}\left(z_{ij}\right)=\prod_{i=1}^{m}\varphi_{ij}\left(z_{ij}\right)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i=1}^{m}z_{ij}=b_{j},\ z_{ij}\geq 0,\ j=1,2,...n.$$

Если в результате решения всех n задач первого этапа получена матрица $\{z_{ij}\}$, компоненты которой удовлетворяют ограничениям (11), то эта матрица после возвращения к исходным переменным x_{ij} определяет искомое решение задачи. В противном случае на втором этапе выполняется коррекция матрицы, полученной на первом этапе. Рассмотрим эту процедуру подробнее.

Первый этап. Формулировка задачи: для выбранного j найти вектор $Z_{j}=(z_{1j},z_{2j},...,z_{mj})$ распределения ресурсов, максимизирующий

$$\varphi_{j}\left(Z_{j}\right)=\prod_{i=1}^{m}z_{ij}^{\beta_{ij}} \tag{19}$$

и удовлетворяющий (12).

Мультипликативный критерий (19) логарифмированием преобразуем в аддитивный:

$$L_{j}\left(x_{j}\right)=ln\,\varphi_{j}\left(z_{j}\right)=\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}\,ln\,z_{ij}.$$

Сформируем функцию Лагранжа:

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \ln z_{ij} - \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} z_{ij} - b_j \right).$$

Далее

$$\frac{d\Phi_j(z_j)}{dz_{ij}} = \beta_{ij} \frac{1}{z_{ij}} - \lambda_j = 0,$$

откуда

$$z_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\lambda_j}, \ i = 1, 2, ... m. \tag{20}$$

Подставив (20) в (12), найдем λ_j:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_{ij}}{\lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} = b_j,$$

откуда $\frac{1}{\lambda_j} = \frac{b_j}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}}$.

Тогда

$$z_{ij}^{(0)} = \frac{\beta_{ij} b_j}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}}, \ i = 1, 2, ... m. \tag{21}$$

Компоненты $z_{ij}^{(0)}$, вычисленные в соответствии с (21), определяют начальное решение задачи. Проверим, удовлетворяет ли матрица $Z^{(0)} = \left(z_{ij}^{(0)}\right)$ ограничениям (11). С этой целью вычислим

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{m} z_{ij}^{(0)} - d_i, \ i = 1, 2, ... m. \tag{22}$$

Если для всех $i = 1, 2, ... m$, $\varepsilon_i \le 0$, то полученная матрица $Z^{(0)}$ удовлетворяет всем ограничениям (11)–(12) и определяет решение задачи. Если же это не так, переходим ко второму этапу.

Второй этап. Коррекция матрицы $Z = (z_{ij})$ выполняется следующим образом. Используя (22), выделим из множества $E = \{1, 2, ..., m\}$ строк матрицы $Z^{(0)}$ два подмножества.

$$E^{(+)} = \left\{ i \in E, \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{m} z_{ij}^{(0)} - d_i > 0 \right\},$$

$$E^{(-)} = \left\{ i \in E, \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{m} z_{ij}^{(0)} - d_i \le 0 \right\}.$$

Строки, принадлежащие подмножеству $E^{(+)}$, будем называть избыточными, а строки, принадлежащие подмножеству $E^{(-)}$, будем называть недостаточными.

Для каждого из столбцов $Z_j^{(0)}$ найдем множество номеров $E_j = \{ i \in E, z_{ij} > 0 \}$.

Далее из E_j выделим подмножества $E_j^{(+)} = \left\{ i \in E_j \cap E^{(+)} \right\}$ и $E_j^{(-)} = \left\{ i \in E^{(-)} \right\}$.

Выберем конкретный столбец j_0. Понятно, что если из какого-либо элемента этого столбца с номером $(i_0\ j_0)$, $i \in E^{(+)}$ вычесть некоторое специальным образом выбранное число Δ и добавить его к какому-либо элементу этого столбца с номером $(k_0\ j_0)$, $k \in E^{(-)}$, то строка i_0 станет менее избыточной, а строка k_0 при правильном выборе Δ станет менее недостаточной. Ясно также, что любое перераспределение значений $z_{ij}^{(0)}$ в пределах одного столбца не нарушает ограничений (12). Координаты корректируемых элементов и допустимое значение Δ выбираются по правилам:

1. $$(i_0, k_0, j_0) = \arg\min\left[G_{j_0}\left[\left(z_{i_0 j_0}^{(0)}\right)^{\beta_{i_0 j_0}}\left(z_{k_0 j_0}^{(0)}\right)^{\beta_{k_0 j_0}} - \left(z_{i_0 j_0}^{(0)} - \Delta\right)^{\beta_{i_0 j_0}}\left(z_{k_0 j_0}^{(0)} + \Delta\right)^{\beta_{k_0 j_0}}\right]\right]. \quad (23)$$

2. $$\Delta \le \min_{\substack{i_0 \in E^+ \\ k_0 \in E^-}}\left\{z_{i_0 j_0}^{(0)}; -\varepsilon_{k_0}\right\}. \quad (24)$$

Выбор координат корректируемых элементов по правилу (23) обеспечивает минимально возможное снижение целевой функции (14) в результате корректировки. Выбор Δ в соответствии с (24), с одной стороны, навязан ограничением (13), а с другой, – нецелесообразностью перевода недостаточной строки k_0 в группу избыточных. В результате проведения коррекции, с учетом (23), (24), получим новый план:

$$z_{ij}^{(1)} = \begin{cases} z_{ij}^{(0)} - \Delta, i = i_0, j = j_0, \\ z_{ij}^{(0)} + \Delta, i = k_0, j = j_0, \\ z_{ij}^{(0)}, (j \ne j_0,) \cup \left[(j = j_0) \cap (i \ne i_0) \cap (i \ne k_0)\right]. \end{cases}$$

Описанная процедура коррекции продолжается до выполнения всех ограничений (11).

4. Выводы

Рассмотрена задача рационального распределения n многомерного ресурса при производстве многономенклатурного продукта. Для решения возникающей при этом нелинейной несепарабельной задачи математического программирования предложена двухэтапная процедура. На первом этапе отыскивается начальный план задачи, который на втором этапе итерационно корректируется. Сходимость процедуры обеспечивается конструктивно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурин Л.С. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов / Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д. – М.: Сов. радио, 1968. – 463с.
2. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Раскин Л.Г. – М.: Сов. радио, 1976. – 344с.
3. Серая О.В. Методика решения нелинейной задачи распределения многомерного ресурса / О.В. Серая, Л.Г. Раскин // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. науч. тр. Нац. техн. ун-та «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПІ», 2005. – № 56. – С. 137 – 144.
4. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности / Серая О.В. – Х.: ФЛ-П Стеценко, 2010. – 512 с.
5. Замков О.О. Математические методы в экономике / Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, изд. «ДИС», 1998. – 368 с.

Стаття надійшла до редакції 25.06.2013