УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК*

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ’ЯЗОК УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ ЦИЛІНДРА, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ

*Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», Дніпропетровськ, Україна

Анотація. *У статті отримано узагальнене тривимірне рівняння балансу енергії циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю* ω *з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Знайдено тривимірне температурне поле порожнього циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.*

Ключові слова: *узагальнене рівняння переносу енергії, інтегральні перетворення Ханкеля, Лапласа, Фур'є.*

Аннотация. *Получено обобщенное трехмерное уравнение баланса энергии цилиндра, который вращается с постоянной угловой скоростью* ω *с учетом конечной скорости распространения тепла. Найдено трехмерное температурное поле полого вращающегося цилиндра с учетом конечной скорости распространения тепла.*

Ключевые слова: *обобщенное уравнение переноса энергии, интегральные преобразования Ханкеля, Лапласа, Фурье.*

Abstract. *A generalized three-dimensional equation of energy balance of rotating cylinder with constant angular velocity* ω*, taking into account the finite speed of heat was received in the paper. Three-dimensional temperature field of empty rotating cylinder taking into account finite speed of heat distribution was found.*

Keywords: *generalized equation of energy transfer, integral transforms of Hankel, Laplace, Fourier.*

1. Вступ. Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою [1, 2]. Однак при високих інтенсивних нестаціонарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [2–4]. У [2] показано, що рівняння переносу енергії у випадку узагальненого закону теплопровідності Фур'є справедливе для одновимірного, однорідного і стаціонарного простору.

Питання про можливості узагальнення рівняння переносу на тривимірний випадок розглянуто у [4].

Метою роботи є розробка нових узагальнених тривимірних математичних моделей температурних розподілів у рухомому середовищі у вигляді крайових задач математичної фізики для рівняння теплопровідності та розв’язання отриманих крайових задач для рівняння теплопровідності, розв’язки яких використовуються під час керування температурними полями.

2. Постановка задачі

У [5] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно з [5], узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системи координат (ρ, φ, z) приймає вигляд

$$\gamma c\left\{\frac{\partial T}{\partial t}+\omega\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{1}$$

де γ – щільність середовища, c – питома теплоємність, T – температура середовища, t – час, τ_r – час релаксації.

Розглянемо розрахунок нестаціонарного неосесиметричного температурного поля порожнього циліндра скінченної довжини L, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Теплофізичні властивості його не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна – G_0, а на зовнішній і внутрішній поверхнях циліндра температура відома і не залежить від часу $G(z,\varphi)$ і $G_1(z,\varphi)$ відповідно.

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області

$$D=\{(\rho,\varphi,z,t)\,|\,\rho\in(\rho_0,1),\ \varphi\in(0,2\pi),\ \mathrm{z}\in(0,1),\ \mathrm{t}\in(0,\infty)\},$$

що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\partial t}=\frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial \mathrm{z}^2}\right] \tag{3}$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho,\varphi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta(\rho,\varphi,z,0)}{\partial t}=0 \tag{4}$$

і граничними умовами

$$\theta(\rho,\varphi,0,t)=0,\quad \theta(\rho,\varphi,1,t)=0, \tag{5}$$

$$\theta(\rho_0,\varphi,z,t)=W(z,\varphi),\quad \theta(1,\varphi,z,t)=V(z,\varphi), \tag{6}$$

де $\theta=\dfrac{T(\rho,\varphi,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура циліндра, $T_{\max}=\max\limits_{z,\varphi}\{G(z,\varphi),G_1(z,\varphi)\}$, $\rho=\dfrac{r}{R}$, R – зовнішній радіус циліндра, $\chi=(R/L)^2$, $a=\dfrac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності, $G(z,\varphi),G_1(z,\varphi)\in \mathrm{C}(0,2\pi)$.

Тоді рішення крайової задачі (3)–(6) $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ, z і φ, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [6, 7], тобто $\theta(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ і $V(\varphi,z),W(\varphi,z)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [7]:

$$\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ V(\varphi,z)\\ W(\varphi,z)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ V_n(z)\\ W_n(z)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \tag{7}$$

де $$\left\{\begin{matrix} \theta_n(\rho,z,t) \\ V_n(z) \\ W_n(z) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\begin{matrix} \theta(\rho,\varphi,z,t) \\ V(\varphi,z) \\ W(\varphi,z) \end{matrix}\right\} \cdot \exp(-in\varphi)d\varphi,$$

де
$\theta_n(\rho,z,t) = \theta_n^{(1)}(\rho,z,t) + i\theta_n^{(2)}(\rho,z,t)$, $V_n(z) = V_n^{(1)}(z) + i\,V_n^{(2)}(z)$, $W_n(z) = W_n^{(1)}(z) + i\,W_n^{(2)}(z)$,
i – уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ – функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho,z,t)$ для $n = 0,1,2,...$, тому що $\theta_n(\rho,z,t)$ і $\theta_{-n}(\rho,z,t)$ будуть комплексно спряженими [8]. Підставляючи значення функцій з (7) у (3)–(6), одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)} + \tau_r\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = \frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\theta_n^{(i)} + \chi\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{8}$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0) = 0, \quad \frac{\partial\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho,0,t) = 0, \quad \theta_n^{(i)}(\rho,1,t) = 0, \tag{10}$$

$$\theta_n^{(i)}(\rho_0,t) = W_n^{(i)}(z), \quad \theta_n^{(i)}(1,t) = V_n^{(i)}(z), \tag{11}$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n,\ \vartheta_n^2 = \omega n,\ m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ i = 1,2$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (8) інтегральне перетворення Ханкеля [9, 10]:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \int_{\rho_0}^{1} \rho\, f(\rho)\,\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)\,d\rho, \tag{12}$$

де $\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho) = Y_n(\mu_{n,k}\rho_0)J_n(\mu_{n,k}\rho) - J_n(\mu_{n,k}\rho_0)Y_n(\mu_{n,k}\rho)$, $J_n(x), Y_n(x)$ – функції Бесселя *1^го^* і *2^го^* роду *n^го^* порядку відповідно, $\mu_{n,k}$ – корні трансцендентного рівняння $Y_n(\mu_{n,k}\rho_0)J_n(\mu_{n,k}) - J_n(\mu_{n,k}\rho_0)Y_n(\mu_{n,k}) = 0$, які можна знайти за формулою [5]

$$\mu_{n,k} = \delta + p\delta^{-1} + (q - p^2)\cdot\delta^{-3} + (r - 4pq + 2p^3)\cdot\delta^{-5} + \ldots,$$

де $\delta = k\pi(\rho_0 - 1)$, $p = (m\text{-}1)(8\rho_0)^{-1}$, $q = 4(m\text{-}1)(m\text{-}25)(\rho_0{}^3 - 1)\left[3(\rho_0 - 1)(8\rho_0)^3\right]^{-1}$,

$$r = 32(m-1)(m^2 - 114m + 1073)(\rho_0{}^5 - 1)\left[5(8\rho_0)^3(\rho_0 - 1)\right]^{-1}, \ m = 4n^2.$$

Формула оберненого перетворення має вигляд

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|\Psi_{n,k}\right\|^2}\bar{f}(\mu_{n,k}), \tag{13}$$

де $\left\|\Psi_{n,k}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left\{\left[\Psi'_{n,k}\left(\mu_{n,k}\right)\right]^2 - \rho_0\left[\Psi'_{n,k}\left(\mu_{n,k}\rho_0\right)\right]^2\right\};\ \Psi'_{n,k}\left(\mu_{n,k}\rho_0\right) = \left[\frac{d\Psi_{n,k}\left(\mu_{n,k}\rho\right)}{d\left(\mu_{n,k}\rho\right)}\right]_{\rho=\rho_0}$.

У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\overline{\theta}_n^{(i)}}{\partial\ t} + \vartheta_n^{(i)}\left[\overline{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r\frac{\partial\overline{\theta}_n^{(m_i)}}{\partial\ t}\right] + \tau_r\frac{\partial^2\overline{\theta}_n^{(i)}}{\partial t^2} = \frac{a}{R^2}\left[\mu_{n,k}\Omega_{n,k}^{(i)} - \mu_{n,k}^2\overline{\theta}_n^{(i)} + \chi\frac{\partial^2\overline{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{14}$$

з початковими умовами

$$\overline{\theta}_n^{(i)}(z,0) = 0,\quad \frac{\partial\overline{\theta}_n^{(i)}(z,0)}{\partial t} = 0 \tag{15}$$

і граничними умовами

$$\overline{\theta}_n^{(i)}(0,t) = 0,\ \ \overline{\theta}_n^{(i)}(1,t) = 0,$$

де $\Omega_{n,k}^{(i)} = \rho_0\Psi'_{n,k}\left(\mu_{n,k}\rho_0\right)W_n^{(i)}(z) - \Psi'_{n,k}\left(\mu_{n,k}\right)V_n^{(i)}(z),\ i = 1,2$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (14) інтегральне перетворення Фур'є:

$$\widehat{f}(\lambda_m) = \int_0^1 f(x)\,sin(\pi\ \cdot m\cdot x)dx,$$

де $\lambda_m = \pi\cdot m$, $m = 1,2,...$, а формула оберненого перетворення має вигляд

$$f(x) = 2\sum_{m=1}^{\infty} sin(\pi\ \cdot m\ \cdot x)\ \cdot\widehat{f}(\lambda_m). \tag{16}$$

У результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\widehat{\overline{\theta}}_n^{(i)}}{d\ t} + \vartheta_n^{(i)}\left[\widehat{\overline{\theta}}_n^{(m_i)} + \tau_r\frac{d\widehat{\overline{\theta}}_n^{(m_i)}}{d\ t}\right] + \tau_r\frac{d^2\widehat{\overline{\theta}}_n^{(i)}}{dt^2} = \frac{a}{R^2}\left[\mu_{n,k}\widehat{\Omega}_{n,k}^{(i)} - \left(\mu_{n,k}^2 + \lambda^2{}_m\right)\widehat{\overline{\theta}}_n^{(i)}\right] \tag{17}$$

з початковими умовами

$$\widehat{\overline{\theta}}_n^{(i)}(z,0) = 0,\quad \frac{\partial\widehat{\overline{\theta}}_n^{(i)}(z,0)}{\partial t} = 0.$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (17) інтегральне перетворення Лапласа:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)\ e^{-s\tau}\ d\tau.$$

У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{\widehat{\overline{\theta}}}_n^{(i)}$:

$$s\tilde{\widehat{\overline{\theta}}}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)}\left(\tilde{\widehat{\overline{\theta}}}_n^{(m_i)} + \tau_r s\tilde{\widehat{\overline{\theta}}}_n^{(m_i)}\right) + \tau_r s^2\tilde{\widehat{\overline{\theta}}}_n^{(i)} = \ q_{n,k}\left(\frac{\mu_{n,k}\tilde{\widehat{\Omega}}_{n,k}^{(i)}}{\mu_{n,k}^2 + \lambda^2{}_m} - \tilde{\widehat{\overline{\theta}}}_n^{(i)}\right), \tag{18}$$

де $q_{n,k} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{R}^2} \cdot \left(\mu_{n,k}^2 + \lambda^2{}_m\right),\ i = 1,2$.

Розв'язавши систему рівнянь (18), одержуємо

$$\tilde{\bar{\theta}}_n^{(i)} = \alpha_{n,k} \frac{\tilde{\bar{\Omega}}_{n,k}^{(i)}\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q_{n,k}}\right) + (-1)^{i+1} \omega n\, \tilde{\bar{\Omega}}_{n,k}^{(m_i)}(1 + s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q_{n,k}}\right)^2 + \omega^2 n^2 (1 + s\tau_r)^2}, \tag{19}$$

де $\alpha_{n,k} = \frac{a}{R^2}\mu_{n,k},\ i = 1,2$.

Застосовуючи до зображення функцій (19) формули оберненого перетворення Лапласа, одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\theta}}_n^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{2} \zeta_{n,k}(s_j) \times \left\{ \hat{\Omega}_{n,k}^{(1)} \times \left[(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i \right] + \hat{\Omega}_{n,k}^{(2)} \times \left[\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) i \right] \right\} \times e^{s_j t} + \\ + \sum_{j=3}^{4} \zeta_{n,k}(s_j) \times \left\{ \hat{\Omega}_{n,k}^{(1)} \times \left[(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i \right] + \hat{\Omega}_{n,k}^{(2)} \times \left[\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) i \right] \right\} \times e^{s_j t},\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\hat{\bar{\theta}}_n^{(2)}(t) = \sum_{j=1}^{2} \zeta_{n,k}(s_j) \times \left\{ \hat{\Omega}_{n,k}^{(2)} \times \left[(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i \right] - \hat{\Omega}_{n,k}^{(1)} \times \left[\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1) i \right] \right\} \times e^{s_j t} + \\ + \sum_{j=3}^{4} \zeta_{n,k}(s_j) \times \left\{ \hat{\Omega}_{n,k}^{(2)} \times \left[(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i \right] - \hat{\Omega}_{n,k}^{(1)} \times \left[\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1) i \right] \right\} \cdot \mathrm{e}^{s_j t},\end{aligned} \tag{21}$$

де $\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5 s_j^{-1}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}$, а значення s_j для $j = 1,2,3,4$ визначаються за формулами

$$s_1, s_2 = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},$$

$$s_3, s_4 = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (13) і (16) одержуємо температурне поле порожнього циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ нескінченної довжини з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \left\langle 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\hat{\bar{\theta}}_n^{(1)}(t) + i \cdot \hat{\bar{\theta}}_n^{(2)}(t) \right] \sin(\pi\, \mathrm{m}\, \mathrm{z}) \right\rangle \cdot \frac{\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|\Psi_{n,k}\right\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi), \tag{22}$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}(t)$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}(t)$ визначаються за формулами (20), (21).

3. Висновки

Отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища (1). Знайдено температурне поле порожнього циліндра (22), який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ скінченної довжини L з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді збіжних ортогональних рядів за функціями Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах та ін.).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берд Р. Явления переноса / Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. – М., 1974. – 686 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности / Лыков А.В. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
3. Лакуста Л.В. Некоторые оценки границ применимости гиперболического уравнения теплопроводности / Л.В. Лакуста, Ю.А.Тимофеев // ИФЖ. – 1979. – Т. 37, № 2. – С. 366 – 370.
4. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – Киев: Наукова думка, 1976. – 310 с.
5. Бердник М.Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну суцільного циліндра, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла / М.Г. Бердник // Вісник Дніпропетровського університету. – (Сер. «Механіка»). – 2005. – № 10. – С. 197 – 202.
6. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / Михлин С.Г. – М.: Высшая школа, 1977. – 427 с.
7. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Толстов Г.П. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
8. Грэй Э. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике / Э. Грэй, Г.Б. Мэтьюз. – М.: ИЛ., 1949. – 386 с.
9. Галицын А.С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А.С. Галицын, А.И. Жуковский. – Киев: Наукова думка, 1979. – 561 с.
10. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Гринберг Г.А. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. – 732 с.

Стаття надійшла до редакції 15.06.2015