

ПРО ПЛАНУВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ БАГАТОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ НА БАЗІ РАЦІОНАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ ДОСЛІДІВ

*Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, Київ, Україна

Анотація. Дається опис загального алгоритму побудови матриці планування багатофакторного експерименту та опис загального алгоритму побудови функції відгуку, яка враховує усі можливі ефекти взаємодії факторів. Алгоритм побудови матриць планування, що пропонується, забезпечує експериментатору можливість вибрати раціональну кількість дослідів, а алгоритм побудови функції відгуку забезпечує пошук мінімального та максимального значень функції відгуку в області її визначення. Алгоритми зорієнтовані на створення автономного програмного модуля для рішення різноманітних практичних оптимізаційних задач, насамперед, для складних технологічних процесів, і є доцільними для використання, коли реалізація реальних дослідів, що проводяться, є затратною.

Ключові слова: фактори, матриця планування експерименту, функція відгуку, повний факторний експеримент, ефекти взаємодії факторів, кодування факторів.

Аннотация. Приводится описание общего алгоритма создания матрицы планирования многофакторного эксперимента и общего алгоритма создания функции отклика, учитывающей все возможные эффекты взаимодействия факторов. Предлагаемый алгоритм создания матрицы планирования обеспечивает экспериментатору возможность выбора рационального количества опытов, а алгоритм создания функции отклика обеспечивает поиск минимального и максимального значений функции отклика в области ее определения. Алгоритмы ориентированы на создание автономного программного модуля для решения разнообразных практических задач, прежде всего, для сложных технологических процессов, и являются целесообразными для использования, когда реализация реальных экспериментов, которые осуществляются, весьма затратная.

Ключевые слова: факторы, матрица планирования эксперимента, функция отклика, полный факторный эксперимент, эффекты взаимодействия факторов, кодирование факторов.

Abstract. A description of general algorithm of construction of planning multifactor experiment matrix is given in the paper. Besides, a description of general algorithm of response function construction that takes into consideration all possible effects of the factors interaction is given as well. The proposed algorithm of matrix construction provides the experimenter to choose a rational number of experiments and algorithm of response function construction allows searching the minimum and maximum values of the response function in definition of its area. Algorithms are focused on the creation of autonomous software module for solving various practical problems, primarily for complicated technological processes and are expedient for using when the realization of the carried out experiments is very costly.

Keywords: factors, planning experiment matrix, response function, full factor experiment, effects of factors interaction, factors coding.

1. Вступ

Планування виконання багатофакторних експериментів та оцінки їх результатів на основі реалізації усіх можливих комбінацій рівнів факторів називається повним факторним експериментом (ПФЕ) [1]. Коли число рівнів кожного фактора рівне двом, то число необхідних дослідів для реалізації ПФЕ є $N = 2^n$, де n – число факторів, 2 – число рівнів. ПФЕ є доцільним тільки тоді, коли реалізація кожного із дослідів для процесу, що розглядається, не є затратною.

ПФЕ дозволяє кількісно оцінити ефекти взаємодії факторів, загальне число яких є

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{n-1} C_n^{i+1} = 2^n - n - 1. \quad (1)$$

Вважається, що експериментатор має можливість апіорі вибирати доцільну кількість дослідів

$$M = 2^{n-p} \quad (2)$$

шляхом вибору певного числа p ефектів взаємодії $n - p$ факторів, причому

$$0 \leq p \leq \max_{k \geq 0} \{k : 2^{n-k} \geq n + 1\}. \quad (3)$$

При цьому i -й ($0 \leq i \leq p$) ефект розглядається як результуючий ефект взаємодії факторів, номери яких належать заданій множині θ_i ($\theta_0 = \emptyset$, $\theta_i \neq \theta_j \neq \emptyset$, $i, j = \overline{1, p}$), а оцінка результатів експерименту здійснюється на основі функції відгуку виду

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{L+q} b_i z_i, \quad (4)$$

де $b_0, b_i - \text{const}, \quad (5)$

$$L = n - p, \quad (6)$$

$$0 \leq q \leq p, \quad (7)$$

q – кількість результуючих ефектів взаємодії, які необхідно враховувати,

$$z_i \in [-1, 1]. \quad (8)$$

Якщо розглядається ПФЕ, то

$$0 \leq p \leq \bar{n}, \quad (9)$$

а оцінка результатів експерименту здійснюється на основі функції відгуку виду

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n+\bar{q}} b_i z_i, \quad (10)$$

де $0 \leq \bar{q} \leq \bar{n}, \quad (11)$

\bar{q} – кількість результуючих ефектів взаємодії, які необхідно враховувати.

Розглядаються загальні алгоритми побудови матриці планування багатфакторного експерименту та визначення його оптимальних (мінімального та максимального) значень для скінченного числа факторів n ($n < \infty$) на основі апіорі визначеної матриці планування та функцій відгуку виду (4) або (10). Алгоритми, що плануються, зорієнтовані на створення автономного програмного модуля для рішення різноманітних задач планування та оцінки результатів оптимізаційних практичних задач, насамперед, для складних технологічних процесів і є доцільними для використання, коли реалізація реальних дослідів, що здійснюються, є затратною.

2. Планування експерименту

Початковим етапом планування експерименту є побудова матриці планування виду

$$Z = [z_{ij}] = \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{L1} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{1M} & \dots & z_{LM} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де i – номер фактора, j – номер досліду.

Елементи матриці Z визначаються за формулами:

$$z_{kj} = \begin{cases} z_{noc.}, & \text{при } j = \overline{1, 2^{k-1}} \\ -z_{noc.}, & \text{при } j = \overline{2^{k-1} + 1, 2^k} \end{cases}, \quad k = \overline{1, L}, \quad (13)$$

$$z_{ij+2^{k-1}} = z_{ij}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad j = \overline{1, 2^{k-1}}, \quad k = \overline{2, L}, \quad (14)$$

де
$$z_{noc.} = -1 \vee 1. \quad (15)$$

Зазначимо, що z_{ij} – кодове значення i -го фактора в j -му експерименті. При цьому натуральне значення i -го фактора в j -му експерименті визначається за формулою

$$x_{ij} = x_i^0 + z_{ij} \cdot \delta_i, \quad i = \overline{1, L}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (16)$$

де
$$x_i^0 = (x_{i \min} + x_{i \max}) / 2; \quad (17)$$

$\delta_i = (x_{i \max} - x_{i \min}) / 2$ – інтервал варіювання i -го фактора;

$x_{i \min}, x_{i \max}$ – натуральні граничні значення зміни i -го фактора.

Вважається, що фактори $x_i, i = \overline{1, L}$ незалежні змінні, а кожен із результатів досліду – випадкова величина з нормальним законом розподілу.

3. Побудова функцій відгуку

Відповідно до теорії планування експерименту [1] коефіцієнти $b_i (i = \overline{0, L+q})$ функції відгуку виду (4) визначаються за формулами:

$$b_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{L+q} y_j, \quad (18)$$

$$b_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{L+q} y_j z_{ij}, \quad (19)$$

де $y_j = y(x_{1j}, \dots, x_{Lj})$ – значення параметра оптимізації y в j -му досліді:

$$z_{i+Lj} = \prod_{k \in \theta_i} z_{kj}, \quad i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (20)$$

а коефіцієнти $b_i (i = \overline{0, n+q})$ функції відгуку виду (10) визначаються за формулами:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j, \quad (21)$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j z_{ij}, \quad (22)$$

де

$$z_{i+n j} = \prod_{k \in \theta_i} z_{kj}, \quad i = \overline{1, \bar{q}}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (23)$$

Отже, елементи матриці планування експерименту (12) визначаються за формулами (13) – (17), а побудова функцій відгуку (4) та (10) здійснюється відповідно на основі формул (18) – (20) та (21) – (23).

4. Оцінка результатів експерименту

Так як функції (4) та (10) є лінійними функціями своїх аргументів, то

$$y^* = \{y(z_1^*, \dots, z_{L+q}^*)\} = \max_{1 \leq j \leq M} \{b_0 + \sum_{i=1}^{L+q} b_i z_{ij}\}, \quad (24)$$

$$y^{**} = \{y(z_1^{**}, \dots, z_{L+q}^{**})\} = \min_{1 \leq j \leq M} \{b_0 + \sum_{i=1}^{L+q} b_i z_{ij}\}, \quad (25)$$

та, відповідно,

$$y^* = \{y(\bar{z}_1^*, \dots, \bar{z}_{n+\bar{q}}^*)\} = \max_{1 \leq j \leq N} \{b_0 + \sum_{i=1}^{n+\bar{q}} b_i z_{ij}\}, \quad (26)$$

$$y^{**} = \{y(\bar{z}_1^{**}, \dots, \bar{z}_{n+\bar{q}}^{**})\} = \min_{1 \leq j \leq N} \{b_0 + \sum_{i=1}^{n+\bar{q}} b_i z_{ij}\}, \quad (27)$$

Результуючий ефект взаємодії факторів для функції відгуку виду (4) обчислюється за формулою

$$\Delta_1 = \sum_{i=L+1}^{L+q} b_i z_i, \quad (28)$$

а для функції відгуку виду (10) за формулою

$$\Delta_2 = \sum_{i=n+1}^{n+\bar{q}} b_i z_i. \quad (29)$$

Зазначимо, що при програмній реалізації алгоритмів, що пропонуються, є необхідним виключення з числа експериментальних даних грубих помилок, перевірка адекватності моделей (4) і (10) та перевірка значущості коефіцієнтів b_i . Для цього можуть бути використані відомі критерії Стюдента, Кохнера та Фішера [2].

5. Висновки

Точки в матриці планування вибираються так, щоб похибка прогнозного значення будь-якого значення y , яке визначається функцією відгуку (4) та (10), була однаковою на рівних відстанях від центра експерименту x^0 і не залежала від напрямку.

Алгоритм, що пропонується, забезпечує експериментатору можливість априорі вибирати доцільну кількість експериментів для побудови нелінійної моделі функції відгуку з урахуванням усіх бажаних ефектів взаємодії факторів. При цьому здійснюється визначення максимального і мінімального значень функції відгуку на заданій множині варіювання факторів.

Алгоритм зорієнтований на створення автономного програмного модуля для рішення різноманітних задач планування та оцінки результатів оптимізаційних практичних задач, насамперед, для складних технологічних процесів, і є доцільним для використання, коли реалізація реальних дослідів, що здійснюються, є затратною.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова. – М.: Наука, 1976. – 279 с.
2. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества / Налимов В.В. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 430 с.

Стаття надійшла до редакції 18.09.2015