

PACS numbers: 72.10.Bg, 72.15.Cz, 72.15.Eb, 72.15.Lh, 78.20.Bh, 78.20.Ci, 78.40.Kc

Влияние поляризации электронов проводимости никеля на его оптическую проводимость

В. С. Северин

*Национальный авиационный университет,
пр. Космонавта Комарова, 1,
03058 Киев, Украина*

Рассмотрена оптическая проводимость системы свободных электронов металла. Для изучения оптических свойств такой системы традиционно применяются модель Друде и модель классического осциллятора Лорентца, в которых используется внешняя удельная электропроводность металла. Однако вещество характеризуется как его внешней удельной электропроводностью, так и его внутренней удельной электропроводностью. Именно внутренняя электропроводность входит в диэлектрическую проницаемость вещества в соответствии с её определением и обуславливает оптические свойства этого вещества. Традиционное использование в диэлектрической проницаемости внешней электропроводности вместо внутренней является упрощающим приближением, которое не учитывает поляризацию свободных электронов. Рассмотрена внутренняя удельная электропроводность системы свободных электронов одной зоны проводимости металла, учитывающая поляризацию этих электронов. Показано, что зависимость от частоты света вещественной части этой внутренней проводимости имеет вид широкой полосы. В этом рассмотрении учитываются только внутризонные переходы электронов. Показано, что эта полоса может быть сопоставлена с максимумом оптической проводимости, который экспериментально наблюдается в никеле.

Розглянуто оптичну провідність системи вільних електронів металу. Для вивчення оптичних властивостей такої системи традиційно застосовуються модель Друде і модель класичного Лорентцевого осцилятора, в яких використовується зовнішня питома електропровідність металу. Проте, речовина характеризується як її зовнішньою питомаю електропровідністю, так і її внутрішньою питомаю електропровідністю. Саме внутрішня електропровідність входить у діелектричну проникність речовини відповідно до її визначення і обумовлює оптичні властивості цієї речовини. Традиційне використання в діелектричній проникності зовнішньої електропровідності замість внутрішньої є спрощувальним наближенням, яке не враховує поляризації вільних електронів. Розглянуто внутрішню пи-

тому електропровідність системи вільних електронів однієї зони провідності металу, яка враховує поляризацію цих електронів. Показано, що залежність від частоти світла дійсної частини цієї внутрішньої провідності має вигляд широкої смуги. У цьому розгляді враховуються тільки внутрішньозонні переходи електронів. Показано, що ця смуга може бути з'явленою з максимумом оптичної провідності, який спостерігається експериментально в ніклі.

The optical conductivity of a system of free electrons of metal is considered. Drude model and Lorentz classic oscillator model, in which the external specific electroconductivity of a metal is implied, are traditionally used for the study of optical properties of such a system. However, a matter is characterized by both its external specific electroconductivity and its internal specific electroconductivity. Just the internal electroconductivity is entered into the dielectric permeability of a matter in accordance with its definition and stipulates optical properties of such a matter. The traditional utilization of the external electroconductivity in return for the internal one in the dielectric permeability is the simplifying approximation, which does not take into account the polarization of free electrons. The internal specific electroconductivity of a system of free electrons of one conduction band of a metal, which takes into account the polarization of such electrons, is considered. As demonstrated, the dependence of a real part of this internal electroconductivity on the light frequency has the appearance of a broad band. Only interband transitions of electrons are taken into account in this consideration. As shown, this band can be correlated with the maximum of optical conductivity, which is experimentally observed in nickel.

Ключевые слова: металл, поляризация, электроны проводимости, оптическая проводимость.

(Получено 13 июля 2011 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптическая проводимость является предметом интенсивного изучения в оптике переходных металлов [1–6]. Никель представляет собой типичный объект таких исследований [1–6]. Причиной этого есть сложная и недостаточно ясная физическая природа спектра оптической проводимости этих металлов.

Для теоретической трактовки отдельных участков оптических спектров переходных металлов обычно используются модель Друде и модель классического осциллятора Лорентца [1–4]. Считается, что модель Друде может объяснить оптический спектр переходных металлов лишь в области малой энергии кванта света $\hbar\omega < 0,2-0,5$ эВ (ω — частота света), в которой этот квант вызывает переходы электрона только между энергетическими состояниями внутри зоны проводимости металла. Большие значения энергии кванта света дают

экспериментальные оптические спектры переходных металлов, имеющие особенности, которые не удается интерпретировать в рамках модели Друде. Поэтому, для их трактовки привлекается модель классического осциллятора Лорентца, и они рассматриваются как межзонные оптические переходы электронов металла.

В работах [5–9] показано, что традиционные теоретические модели оптических спектров твердых тел не учитывают поляризацию системы электронов, принимающих участие в оптических переходах. Такая поляризация оказывается существенной как для модели Друде [5, 6], так и для модели классического осциллятора Лорентца [9].

Оптические свойства металла обуславливает его диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega)$, выраженная через удельную электропроводность этого металла. Однако вещество характеризуется как его внешней удельной электропроводностью, так и его внутренней удельной электропроводностью. Именно внутренняя электропроводность $\sigma(\omega)$ входит в диэлектрическую проницаемость вещества $\epsilon(\omega)$ в соответствии с её определением [5–9]. Традиционное использование в диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ внешней удельной электропроводности $s(\omega)$ вместо внутренней удельной электропроводности $\sigma(\omega)$ является упрощающим приближением, которое не учитывает поляризацию носителей заряда [5–9].

Во втором разделе статьи рассмотрены внешняя удельная электропроводность системы свободных электронов одной зоны проводимости металла в модели Друде $s(\omega)$ и соответствующая ей внутренняя удельная электропроводность $\sigma(\omega)$, которая учитывает поляризацию этих электронов.

В третьем разделе статьи показано, что зависимость от частоты света ω вещественной части внутренней проводимости $\sigma_1(\omega) = \text{Re}\sigma(\omega)$ (оптической проводимости) имеет вид широкой полосы, которая не обусловлена межзонами переходами рассмотренных электронов и возникла только из-за учета поляризации свободных электронов этой одной зоны проводимости.

В четвертом разделе статьи показано, что эта полоса может быть сопоставлена с максимумом оптической проводимости никеля, который наблюдается экспериментально.

2. ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛА

Для анализа свойств системы электронов, свободных в пределах зоны проводимости металла, традиционно используется модель Друде [1–4, 10–12]. Она рассматривает эти электроны как электронный газ, нейтрализованный положительным фоном кристаллической решетки, имеющей независимую от частоты света диэлектрическую проницаемость ϵ_0 . Обозначим через $\mathbf{D}(t)$ внешнее электриче-

ское поле, действующее на металл, t — время, e — заряд электрона, $\mathbf{v}(t)$ — его скорость, $\tau = 1/\gamma$ — время релаксации скорости электрона, m — эффективную массу электрона. В этой модели уравнение движения электрона под действием внешнего электрического поля, прилагаемого к металлу, имеет вид [10–12]:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{D}(t)}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\tau} \mathbf{v}(t). \quad (1)$$

Под действием поля $\mathbf{D}(t)$ возникает электрический ток таких электронов, имеющий плотность $\mathbf{j}(t) = en\mathbf{v}(t)$, где n — концентрация электронов. Из уравнения (1) следует, что внешнее электрическое поле $\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}_\omega \exp(i\omega t)$, имеющее амплитуду \mathbf{D}_ω , создает переменный ток электронов проводимости с амплитудой плотности электрического тока \mathbf{j}_ω следующего вида [10–12]:

$$\mathbf{j}_\omega = s(\omega) \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}_\omega,$$

где

$$s(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m(1+i\omega\tau)} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{1}{\gamma + i\omega} \quad (2)$$

— удельная электропроводность электронов проводимости в модели Друде. Здесь

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi ne^2}{\varepsilon_0 m}$$

— квадрат плазменной частоты.

Для рассмотрения оптических свойств электронов проводимости традиционно используют диэлектрическую проницаемость в виде [1–4, 10–12]:

$$\varepsilon_s(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{4\pi}{i\omega} s(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\gamma)} \right). \quad (3)$$

Модель Друде не учитывает экранирование внешнего поля электронами проводимости вещества [5, 6]. Из-за этого экранирования, в металле действует на электроны проводимости не внешнее относительно их поле \mathbf{D}/ε_0 , а внутреннее в системе этих электронов поле $\mathbf{E} \neq \mathbf{D}/\varepsilon_0$. Отличие полей \mathbf{E} и \mathbf{D}/ε_0 обусловлено вектором поляризации электронов вещества \mathbf{P} [5–9, 13–18]:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}) / (4\pi). \quad (4)$$

Это отличие не учтено при получении выражения (3) для диэлектрической проницаемости $\varepsilon_s(\omega)$.

Плотность тока электронов проводимости \mathbf{j} можно выразить как через внутреннее электрическое поле в металле \mathbf{E} , так и через поле \mathbf{D}/ε_0 [13, 14, 16–18]

$$\mathbf{j}_\omega = \sigma(\omega)\mathbf{E}_\omega = s(\omega)\mathbf{D}_\omega/\varepsilon_0. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{E}_ω — амплитуда внутреннего электрического поля.

Электропроводность $s(\omega)$ определяет отклик тока на внешнее поле \mathbf{D}/ε_0 (по отношению к электронам металла, которые являются оптически активным для рассматриваемой частоты света ω), а электропроводность $\sigma(\omega)$ дает отклик тока на внутреннее поле \mathbf{E} . Поэтому $s(\omega)$ называют внешней, а $\sigma(\omega)$ — внутренней электропроводностями вещества [16–18]. Отличие электропроводностей $\sigma(\omega)$ и $s(\omega)$ в выражении (5) обусловлено отличием от нуля поляризации \mathbf{P} (4). Для простоты полагаем величины σ и s скалярами, а не тензорами.

Определение диэлектрической проницаемости вещества требует наличия в нем внутренней электропроводности вещества $\sigma(\omega)$, а не внешней $s(\omega)$ [13–18]. Поэтому диэлектрическая проницаемость вещества $\varepsilon(\omega)$ имеет вид:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{4\pi}{i\omega}\sigma(\omega). \quad (6)$$

Имеет место следующее соотношение [5–9, 16–18]

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{4\pi}{i\omega\varepsilon_0}s(\omega)}s(\omega), \quad (7)$$

Выражение (6) следует из соотношения:

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega, \quad (8)$$

которое есть определением диэлектрической проницаемости вещества $\varepsilon(\omega)$, и из соотношений (4), (5). При этом используется соотношение [13–19]:

$$\mathbf{j}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{P}(t). \quad (9)$$

А формула (7) есть следствие соотношений (5), (6), (8). Указанные соотношения (4)–(9) являются общими формулами электродинамики и не используют конкретный вид проводимости $s(\omega)$, связанный с конкретным механизмом электропроводности.

Подстановка в формулу (7) конкретной удельной электропровод-

ности электронов проводимости модели Друде (2) дает соответствующую внешнюю удельную электропроводность:

$$\sigma(\omega) = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\omega}{\gamma\omega + i(\omega^2 + \omega_p^2)}. \quad (10)$$

Аналогичный результат может быть получен и из уравнения движения электрона (1) при помощи следующих простых, приближенных соображений. По определению, вектор поляризации вещества \mathbf{P} есть плотность дипольных моментов зарядов этого вещества [15, 19]:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{x}_i(t). \quad (11)$$

Здесь V — объем вещества, N — полное число зарядов этого вещества, q_i — заряд i -го носителя заряда, $\mathbf{x}_i(t)$ — его координата. В данной статье и свет, и система электронов проводимости рассматриваются в длинноволновом приближении. Поэтому, вектор поляризации \mathbf{P} (11) системы N одинаковых электронов проводимости, однородно распределенных в пространстве, можно приближенно рассматривать в следующем виде:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N e \mathbf{x}_i(t) \approx \frac{e}{V} N \mathbf{x}(t) = en \mathbf{x}(t). \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — координата одного электрона.

В силу соотношений (4), (12), поле \mathbf{D} имеет вид:

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(t) + 4\pi \mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(t) + \varepsilon_0 \frac{m}{e} \omega_p^2 \mathbf{x}(t). \quad (13)$$

Учитывая соотношение (13) в уравнении движения одного электрона (1), имеем:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(t) - \gamma \mathbf{v}(t) + \omega_p^2 \mathbf{x}(t). \quad (14)$$

Внешнее электрическое поле $\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}_\omega \exp(i\omega t)$, имеющее амплитуду \mathbf{D}_ω , создает в системе электронов проводимости: внутреннее электрическое поле $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_\omega \exp(i\omega t)$, имеющее амплитуду \mathbf{E}_ω ; колебание координаты одного электрона $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\omega \exp(i\omega t)$, имеющее амплитуду \mathbf{x}_ω ; колебание его скорости $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_\omega \exp(i\omega t)$, имеющее амплитуду \mathbf{v}_ω . Поэтому, учитывая соотношение $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, уравнение (14) можно представить в следующем виде:

$$\left(\gamma + i \left(\omega + \frac{\omega_p^2}{\omega} \right) \right) \mathbf{v}_\omega = \frac{e}{m} \mathbf{E}_\omega. \quad (15)$$

Уравнение (15) дает:

$$\mathbf{v}_\omega = \frac{e}{m} \frac{\omega}{\gamma\omega + i(\omega^2 + \omega_p^2)} \mathbf{E}_\omega. \quad (16)$$

В соответствии с уравнением (16), амплитуда плотности электрического тока $\mathbf{j}_\omega = en\mathbf{v}_\omega$ может быть представлена формулой $\mathbf{j}_\omega = \sigma(\omega)\mathbf{E}_\omega$, в которой $\sigma(\omega)$ дается соотношением (10).

3. ОПТИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Вещественная часть внутренней проводимости $s_1(\omega) = \text{Res}(\omega)$ (оптическая проводимость модели Друде) имеет вид:

$$s_1(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}. \quad (17)$$

Из формулы (17) вытекает следующее. Для малых частот, когда имеет место условие $\omega^2 \ll \gamma^2$, оптическая проводимость модели Друде не зависит от частоты и имеет вид: $s_1(0)$. А для больших частот, когда имеет место условие $\omega^2 \gg \gamma^2$, она убывает с ростом частоты как ω^{-2} . Следовательно, частотная зависимость оптической проводимости модели Друде не имеет вида спектральной полосы.

Вещественная часть внутренней проводимости $\sigma_1(\omega) = \text{Re}\sigma(\omega)$ (оптическая проводимость) имеет вид:

$$\sigma_1(\omega) = \frac{\epsilon_0\gamma}{4\pi} F(\omega), \quad (18)$$

где

$$F(\omega) = \frac{\omega^2\omega_p^2}{(\omega^2 + \omega_p^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (19)$$

Формулы (18), (19) дают, что частотная зависимость оптической проводимости $\sigma_1(\omega)$ имеет вид широкого пика. Для малых частот, когда выполняется условия $\omega^2 \ll \omega_p^2$, $\omega^2 \ll \tau^2\omega_p^4$ оптическая проводимость $\sigma_1(\omega)$ растет с частотой как ω^2 . А для больших частот, когда выполняются условия $\omega^2 \gg \omega_p^2$, $\omega^2 \gg \gamma^2$ она убывает с ростом частоты как ω^{-2} . И в промежутке между этими частотами оптическая проводимость $\sigma_1(\omega)$ имеет максимум. Условием этого максимума есть следующее уравнение:

$$0 = \frac{dF(\omega)}{d\omega} = 2\omega\omega_p^2 (\omega_p^4 - \omega^4) \left[(\omega^2 + \omega_p^2)^2 + \gamma^2\omega^2 \right]^{-2}.$$

Оно дает, что $\sigma_1(\omega)$ достигает максимума при значении частоты ω , равной плазменной частоте $\omega = \omega_p$, и имеет значение:

$$\sigma_1(\omega_p) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\tau^2 \omega_p^2}{1 + 4\tau^2 \omega_p^2}. \quad (20)$$

Если же выполняется условие $\omega^2 \gg \omega_p^2$, то в этом приближении будет:

$$\sigma_1(\omega) = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} = s_1(\omega).$$

Таким образом, спектры оптической проводимости модели Друде и оптической проводимости соответствующей ей внешней проводимости, в которой учтена поляризация электронов проводимости, принципиально различаются.

4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Атом никеля имеет на внешних s - и d -оболочках 10 электронов: два электрона на s -оболочке и восемь электронов на d -оболочке [20]. Эти электроны рассматриваются как валентные и образующие соответственно две зоны проводимости металлического никеля: s -зону и d -зону [1].

Экспериментальные исследования спектра оптической проводимости поликристаллического никеля дают ряд широких максимумов: два больших при энергиях кванта света $\hbar \omega_1 \approx 1,5$ эВ и $\hbar \omega_2 \approx 4,75$ эВ и несколько значительно меньших [1]. Высота этих пиков существенно зависит от отжига исследуемого образца и полировки его поверхности. При этом высота более высокочастотного пика зависит от полировки более сильно [1].

С точки зрения результатов, полученных в третьем разделе статьи, эти экспериментальные результаты допускают следующую трактовку.

Частоты максимумов пиков ω_1 и ω_2 , являются плазменными частотами s - и d -зон проводимости. Частота ω_1 соответствует плазменной частоте s -зоны проводимости, а частота ω_2 — плазменной частоте d -зоны. Неравенство $\omega_1 < \omega_2$ обусловлено большей концентрацией электронов d -зоны по сравнению с концентрацией электронов s -зоны.

При энергиях кванта света $\hbar \omega_1 \approx 1,5$ эВ и $\hbar \omega_2 \approx 4,75$ эВ никель имеет значительное поглощение света в приповерхностном слое образца, которое является большим при энергии кванта света $\hbar \omega_2$ по сравнению с поглощением при энергии $\hbar \omega_1$ [4]. Согласно формулам (18)–(20), максимальное значение оптической проводимости зависит от численных значений величин τ и ε_0 , которые изменяются при

обработке образца. Влияние этих величин на максимальное значение оптической проводимости более существенно на частоте света ω_2 , для которой свет сильнее поглощается более тонким приповерхностным слоем никеля. В частности, полировка поверхности образца увеличивает время релаксации τ в приповерхностном слое. Это приводит к увеличению значения оптической проводимости соответственно формулам (18)–(20).

Необходимые для расчета значения величин ϵ_0 , τ и n выбирались из следующих соображений.

Пик оптической проводимости, имеющий место при энергии кванта света $\hbar\omega_1 \approx 1,45$ эВ, рассмотрен в данной статье как обусловленный плазменными колебаниями s -электронов зоны проводимости никеля. Концентрация этих s -электронов $n = 18,28 \cdot 10^{22}$ см $^{-3}$ определялась как удвоенная концентрация атомов твердого никеля, которая взята из табл. 1.5 [21].

Для вычисления плазменной частоты таких s -электронов ω_p в качестве эффективной массы этих s -электронов использовалось значение массы электрона. Для того чтобы получить значение энергии этого плазмона $\hbar\omega_p = 1,449$ эВ, необходимо значение $\epsilon_0 = 120$.

Затем, выбором значения времени релаксации $\tau = 4,0 \cdot 10^{-16}$ с, достигалось нужное значение $\sigma_1(\omega_p) = 4,5 \cdot 10^{15}$ с $^{-1}$, близкое полученному из эксперимента.

Общий вид частотной зависимости оптической проводимости $\sigma_1(\omega)$, вычисленной по формуле (18) для указанных значений величин ϵ_0 , τ и n , приведен на рис. 1. На рисунке 2 дано сравнение верхней части пика этой рассчитанной величины $\sigma_1(\omega)$ с экспериментальными результатами [1]. Этот рисунок показывает, что имеется

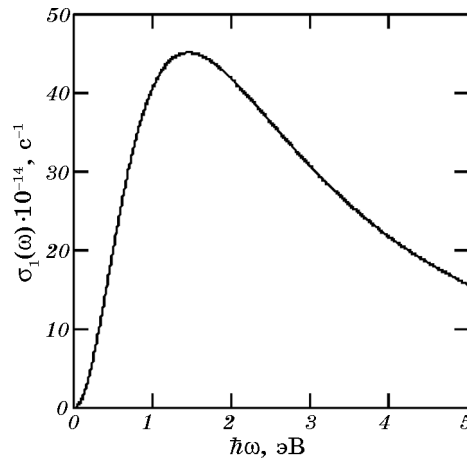


Рис. 1. Общий вид частотной зависимости оптической проводимости $\sigma_1(\omega)$, вычисленной по формуле (18), для Ni.

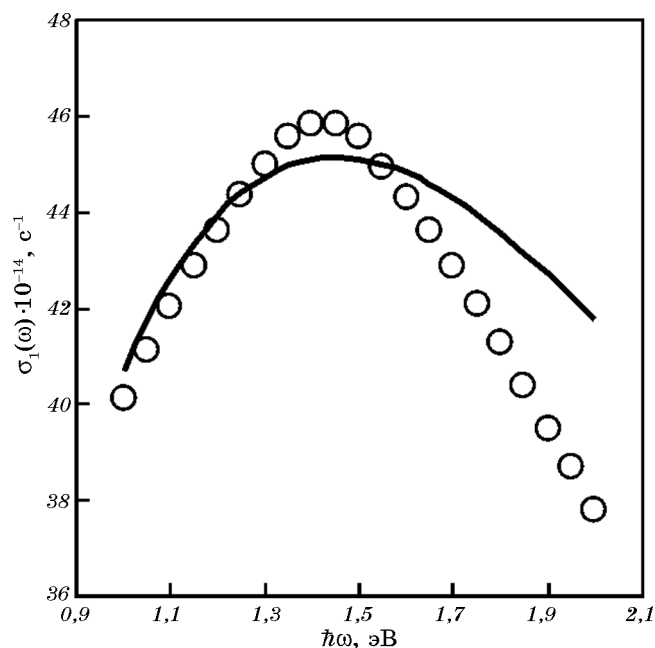


Рис. 2. Сравнение верхней части пика вычисленной величины $\sigma_1(\omega)$ (сплошная линия) с экспериментальными результатами [1] (кружки) для Ni.

соответствие между указанными расчетными и экспериментальными результатами.

Таким образом, экспериментально наблюдаемые максимумы оптической проводимости никеля могут быть объяснены не как результат межзонных переходов электронов, а как результат переходов свободных электронов внутри одной зоны проводимости. Однако при этом следует учитывать поляризацию внутризонных свободных электронов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Поперенко, В. С. Стащук, І. А. Шайкевич, В. А. Одарич, *Діагностика поверхні поляризованим світлом* (Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет»: 2007).
2. *Handbook of Ellipsometry* (Eds. H. G. Tompkins and E. A. Irene) (Norwich, NY: William Andrew Publishing–Heidelberg: Springer-Verlag GmbH & Co. KG: 2005).
3. E. G. Maksimov, I. I. Mazin, S. N. Rashkeev, and Yu. A. Uspenski, *J. Phys. F: Met. Phys.*, **18**, No. 4: 833 (1988).
4. D. W. Lynch, R. Rosei, and J. H. Weaver, *Solid State Commun.*, **9**, No. 24: 2195 (1971).
5. О. В. Вакуленко, В. С. Северин, *Металлофиз. новейшие технол.*, **29**, № 1:

- 41 (2007).
6. O. V. Vakulenko and V. S. Severin, *Semicond. Phys., Quantum Electronics and Optoelectronics*, **10**, No. 1: 55 (2007).
 7. В. С. Северин, *Оптика и спектроскопия*, **69**, вып. 2: 351 (1990).
 8. В. С. Северин, *УФЖ*, **39**, № 7–8: 799 (1994).
 9. V. S. Severin, *Semicond. Phys., Quantum Electronics and Optoelectronics*, **12**, No. 4: 366 (2009).
 10. Ю. Маделунг, *Теория твердого тела* (Москва: Наука: 1980).
 11. Дж. Слэтер, *Диэлектрики, полупроводники, металлы* (Москва: Мир: 1969).
 12. П. Гроссе, *Свободные электроны в твердых телах* (Москва: Мир: 1982).
 13. Ф. Платцман, П. Вольф, *Волны и взаимодействия в плазме твердого тела* (Москва: Мир: 1975).
 14. Ю. А. Ильинский, Л. В. Келдыш, *Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом* (Москва: Издательство МГУ: 1989).
 15. С. И. Пекар, *Кристаллооптика и добавочные световые волны* (Киев: Наукова думка: 1982).
 16. R. Kubo, *Rep. Progr. Phys.*, **29**, Part 1: 255 (1966).
 17. T. Izuuma, *Prog. Theor. Phys.*, **25**, No. 6: 964 (1961).
 18. R. Eukholt, *Phys. Rev. B*, **34**, No. 10: 6669 (1986).
 19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (Москва: Наука: 1982).
 20. И. М. Дубровский, Б. В. Егоров, К. П. Рябошапка, *Справочник по физике* (Киев: Наукова думка: 1986).
 21. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела* (Москва: Наука: 1978).