

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И ЧАСТИЦ С КОНДЕНСИРОВАННЫМ ВЕЩЕСТВОМ

PACS numbers: 42.25.Ja, 42.25.Lc, 42.70.Df, 78.15.+e, 78.20.Ek, 78.20.Fm

Розв'язок спектральної задачі для поздовжньо неоднорідних недеполяризовуючих середовищ

І. С. Коломієць, Є. А. Оберемок, С. М. Савенков, О. С. Клімов

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
просп. Акад. Глушкова, 4^є,
03127 Київ, Україна*

На основі матричного методу Джонса розв'язано спектральну задачу для класу поздовжньо неоднорідних недеполяризовуючих середовищ з лінійним двопроменезаломленням. Прикладом таких середовищ можуть слугувати рідкі кристали в холестеричній фазі, кручені нематіки, ефіри холестерину та ін. Виконано аналіз розв'язків, одержаних для випадку диференційної та інтегральної матричних моделей Джонса середовищ даного класу, в тому числі в порівнянні з випадком поздовжньо однорідних середовищ. Зокрема, показано, що, на відміну від поздовжньо однорідних середовищ, у випадку поздовжньо неоднорідних середовищ власні вектори (власні стани поляризації) диференційної та інтегральної матриць Джонса різні. Крім того, вигляд власних векторів інтегральної матриці залежить від товщини середовища.

На основе матричного метода Джонса решена спектральная задача для класса продольно неоднородных недеполяризовующих сред с линейным двулучепреломлением. Примером таких сред могут служить жидкие кристаллы в холестерической фазе, кручёные нематіки, эфиры холестерина и др. Был выполнен анализ решений, полученных для случая дифференциальной и интегральной матричных моделей Джонса сред данного класса, в том числе в сравнении со случаем продольно однородных сред. В частности, показано, что, в отличие от продольно однородных сред, в случае продольно неоднородных сред собственные векторы (собственные состояния поляризации) дифференциальной и интегральной матриц Джонса разные. Кроме того, вид собственных векторов интегральной матрицы зависит от толщины среды.

The spectral problem is solved for the class of longitudinally inhomogeneous nondepolarizing media with a linear birefringence on the basis of the Jones matrix calculus. The liquid crystals in the cholesteric phase, twisted nematics, cholesterol esters, etc., are examples of such media. An analysis of the

solutions for the case of differential and integral Jones matrix models for medium of such class with comparison with the case of longitudinally homogeneous media is performed. In particular, we show that, in contrast to the longitudinal homogeneous media, in the case of longitudinally inhomogeneous media, eigenvectors (eigenstates of polarization) of the differential and integral Jones matrices are different. In addition, the form of the eigenvectors of integral matrix depends on the thickness of the media.

Ключові слова: двопротенезаломлення, спектральна задача, метод Джонса, холестерик, нематик.

(Отримано 2 липня 2013 р.)

1. ВСТУП

Одним з потужних інструментів для дослідження різних оптично анізотропних середовищ є поляриметрія. У зв'язку з порівняною складністю поляриметричних вимірювань останнім часом активно розробляється напрямок, в межах якого виконується оптимізація вимірювань з огляду на можливі, попередньо встановлені, особливості анізотропії об'єкта досліджень [1]. Врахування цих особливостей, звичайно, дозволяє підвищити швидкодію та точність поляриметричних вимірювань. Отже, зростання ефективності та інформативності поляриметричних методів досліджень залежить, зокрема, від розвиненості системи класифікації анізотропних середовищ, заснованої на особливостях анізотропії того чи іншого класу об'єктів.

Згідно з класифікацією, запропонованою Р. М. А. Аззамом, всі анізотропні середовища за їх будовою та впливом на стан поляризації електромагнітного випромінювання можна поділити на три основні великі групи [2]: однорідні анізотропні недеполяризуючі середовища, неоднорідні анізотропні недеполяризуючі середовища та деполаризуючі середовища. Перша з цих груп на сьогодні є найбільш вивченою [2–6], оскільки фізичні процеси, що зумовлюють основні властивості відповідних середовищ і відповідні математичні методи опису, навіть на час написання роботи [2], вже були більш-менш відомі. До другої, за класифікацією Аззама, менш вивченої групи середовищ можна віднести середовища, однорідні в поперечному перерізі (щодо напрямку розповсюдження випромінювання) та неоднорідні в поздовжньому напрямку (напрямку розповсюдження випромінювання). Частково такі середовища розглянуто в роботах [2, 4, 7–12]. Зокрема, в [2, 7, 9] авторами було досліджено цікавий випадок рідкого кристала, що знаходиться в холестеричній фазі [13–15]. В [16] описано практичне використання кручених нематиків [15], гідроксіпропілцелюлози [17], та ефірів холестерину [18]. Згадані середовища можна представити як послі-

довний набір поперечно однорідних паралельних фазових пластинок з двопронезаломленням, в яких швидка вісь кожної наступної пластинки повернута відносно попередньої на деякий кут. Дійсно, середовище з подібною гвинтовою структурою є поздовжньо неоднорідним і, як виявляється, не призводить до зменшення ступеню поляризації випромінювання при його розповсюдженні поперечно до складових площин.

2. ДИФЕРЕНЦІЙНА ТА ІНТЕГРАЛЬНА МАТРИЧНІ МОДЕЛІ ПОЗДОВЖНЬО НЕОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА З ЛІНІЙНИМ ДВОПРОМЕНЕЗАЛОМЛЕННЯМ

Для визначеності розглянемо рідкий кристал, що знаходиться в холестеричній фазі [7]. У цій фазі рідкий кристал являє собою послідовність молекулярних площин, утворених молекулами витягнутої форми з осями анізотропії, орієнтованими в одному напрямку та паралельно одна одній. Для кожної наступної молекулярної площини напрямок осей молекул повернутий відносно попереднього на деякий (зазвичай сталий) кут. Кожна така площина є однорідною для вхідного поляризованого випромінювання і виявляє анізотропію у вигляді лінійного двопронезаломлення. Швидка та повільна вісь цієї анізотропії паралельні відповідним осям анізотропії форми молекул площини. Оскільки при переміщенні від однієї до іншої площини вздовж напрямку їх спільної нормалі відбувається поступовий поворот орієнтації молекул, саму структуру кристала називають гвинтовою. Кристал при цьому являє собою поздовжньо неоднорідне (далі просто неоднорідне) середовище з лінійним двопронезаломленням.

Розглядаючи повністю поляризоване світло, що розповсюджується вздовж осі, перпендикулярної до молекулярних площин, будемо вважати, що напрямок цієї осі збігається з напрямком осі z деякої Декартової прямокутної системи координат. Осі x та y збігаються з головними (швидкою f та повільною s) осями двопронезаломлення вхідної молекулярної площини (рис. 1). Надалі під віссю анізотропії молекулярної площини розумітимемо швидку вісь її лінійного двопронезаломлення.

Виділимо деяку молекулярну площину на відстані l від вхідної. Для неї можна ввести кут α , на який повернута вісь її анізотропії щодо осі вхідної площини. Використовуючи поняття питомого кута обертання осі анізотропії α_0 кристала

$$\alpha_0 = 2\pi/p \quad (1)$$

(де p — крок гвинтової структури кристала, тобто відстань між найближчими молекулярними площинами з однаковою орієнтацією

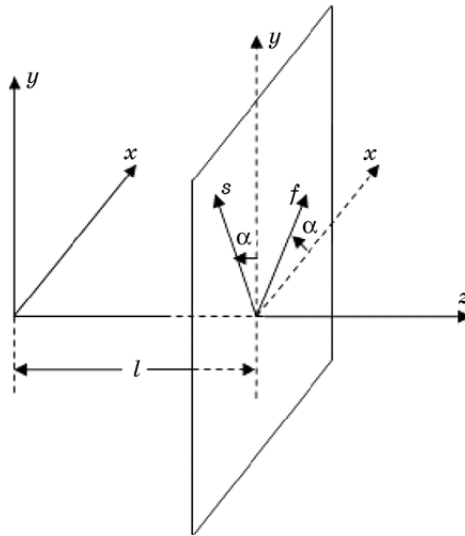


Рис. 1. Схематичне зображення молекулярної площини рідкого кристала, який знаходиться в холестеричній фазі: l — відстань між вхідною площиною та даною (вважається, що положення вхідної площини збігається з початком осі z прямокутної Декартової системи координат, $z = 0$); f і s — напрямки швидкої та повільної осей двоприменезаломлення, які для вхідної площини збігаються з напрямками осей x та y системи координат; α — кут повороту осей даної молекулярної площини навколо осі z щодо відповідних осей вхідної молекулярної площини.

вісі анізотропії), можемо записати:

$$\alpha = \alpha_0 l. \quad (2)$$

Як показано в [2], властивості молекулярної площини такого середовища в циркулярному базисі можуть бути представлені наступною диференційною матрицею Джонса:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & i \frac{1}{2} \delta_0 e^{2i\alpha_0 z} \\ i \frac{1}{2} \delta_0 e^{-2i\alpha_0 z} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де δ_0 — величина лінійного двоприменезаломлення на одиницю товщини середовища у випадку, якщо воно б було поздовжньо однорідним.

Знайдемо інтегральну матрицю Джонса [4] для середовищ кінцевої товщини з описаними властивостями. Для цього диференційну матрицю Джонса (3) підставимо у векторне рівняння переносу:

$$dE/dz = NE. \quad (4)$$

Далі застосуємо методику, що наведена в [19]. В результаті одержуємо елементи інтегральної матриці Джонса T_{Cir} , записані в циркулярному базисі. Для переходу в лінійний базис скористаємось правилом [3]:

$$T = T_{\text{Lin}} = FT_{\text{Cir}}F^{-1}, \quad (5)$$

де матриця переходу F має вигляд [2]

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}. \quad (6)$$

В результаті одержуємо інтегральну матрицю Джонса T неоднорідного середовища з лінійним двопронезаломленням у лінійному базисі:

$$T = A^{-1} \begin{bmatrix} AC(\alpha_0 z)C(zA/2) + (i\delta_0 C(\alpha_0 z) + 2\alpha_0 S(\alpha_0 z))S(zA/2) \\ AC(zA/2)S(\alpha_0 z) + (i\delta_0 S(\alpha_0 z) - 2\alpha_0 C(\alpha_0 z))S(zA/2) \\ -AC(zA/2)S(\alpha_0 z) + (i\delta_0 S(\alpha_0 z) + 2\alpha_0 C(\alpha_0 z))S(zA/2) \\ AC(\alpha_0 z)C(zA/2) + (-i\delta_0 C(\alpha_0 z) + 2\alpha_0 S(\alpha_0 z))S(zA/2) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де використано позначення $A = (\delta_0^2 + 4\alpha_0^2)^{1/2}$, $C(x) = \cos x$, $S(x) = \sin x$. Якщо пронормувати матрицю (7) на перший елемент і винести одержаний ізотропний множник, то легко побачити, що вона відноситься до класу унітарних матриць [20], як і матрична модель Джонса для відповідного класу однорідних середовищ [3]. Для одержання диференційної матриці Джонса, що відповідає даному класу середовищ в лінійному базисі, можна скористатись співвідношенням, наведеним в [19]; тоді:

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} i\delta_0 \cos(2\alpha_0 z) & \frac{1}{2} i\delta_0 \sin(2\alpha_0 z) \\ \frac{1}{2} i\delta_0 \sin(2\alpha_0 z) & -\frac{1}{2} i\delta_0 \cos(2\alpha_0 z) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Слід відзначити, що одержана диференційна матриця Джонса (8), крім ізотропного множника $-i\delta_0/2$, відрізняється від матриці для випадку однорідного середовища з лінійним двопронезаломленням, що розглянуто в [3], ще й тим, що в ній азимут орієнтації осі двопронезаломлення α стає залежним від z . Тобто, кожна молекулярна площина, характеризується своєю диференційною матрицею Джонса (8).

3. РОЗВ'ЯЗОК СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЙОГО АНАЛІЗ

Розв'яжемо спектральну задачу для даного класу неоднорідних середовищ та розглянемо основні особливості розв'язків. Для знаходження власних чисел $V_{e1,2 N(T)}$ і власних векторів $\chi_{e1,2 N(T)}$ для диференційної N (8) і інтегральної T (7) матриць Джонса використаємо співвідношення, представлені в [2, 18]. Відповідно одержуємо:

$$V_{e1,2 T} = A^{-1} \{ [AC(\alpha_0 z)C(zA/2) + 2\alpha_0 S(2\alpha_0 z)S(zA/2)] \mp [A^2 \left((C(\alpha_0 z))^2 (C(zA/2))^2 - 1 \right) + 4\alpha_0^2 (S(\alpha_0 z))^2 (S(zA/2))^2 + \alpha_0 AS(2\alpha_0 z)S(zA/2)]^{1/2} \}, \quad (9)$$

$$V_{e1,2 N} = \mp i\delta_0/2, \quad (10)$$

$$\chi_{e1,2 T} = [-AC(zA/2)S(\alpha_0 z) + (2\alpha_0 C(\alpha_0 z) - i\delta_0 S(\alpha_0 z))S(zA/2)]^{-1} \times \{ -i\delta_0 C(\alpha_0 z)S(zA/2) \pm [A^2 \left((C(\alpha_0 z))^2 (C(zA/2))^2 - 1 \right) + 4\alpha_0^2 (S(\alpha_0 z))^2 (S(zA/2))^2 + \alpha_0 AS(2\alpha_0 z)S(zA/2)]^{1/2} \}, \quad (11)$$

$$\chi_{e1 N} = -\text{tg}(\alpha_0 z), \quad \chi_{e2 N} = \text{ctg}(\alpha_0 z). \quad (12)$$

Аналізуючи рівняння (9) та (10), потрібно відзначити, що як для інтегральної, так і для диференційної матриці Джонса даного класу неоднорідних середовищ власні числа є фазовими множниками для будь-яких значень питомих параметрів анізотропії δ_0 , α_0 і для будь-якого z . Тобто, у хвиль з власною для даної товщини середовища поляризацією (описується власним вектором) змінюється лише абсолютна фаза. Також слід зазначити, що співвідношення між власними числами $V_{e1,2 T} = e^{zV_{e1,2 N}}$ інтегральної та диференційної матриці Джонса, яке має місце в однорідному випадку, в неоднорідному випадку більше не виконується. Крім того, для неоднорідних середовищ власні числа інтегральної матриці Джонса починають залежати від α_0 (рис. 2).

Щодо власних чисел диференційної матриці Джонса (8), то вони збігаються з відповідними власними числами диференційної матриці Джонса для середовища з лінійним двопронезаломленням [3].

Проаналізуємо рівняння (11) та (12). Одразу слід зазначити, що власні вектори інтегральної та диференційної матриць Джонса даного класу середовищ у загальному випадку не збігаються, як це було для однорідних середовищ з лінійним двопронезаломленням. Справа у тому, що в однорідному випадку власні вектори матриць Джонса описують стан поляризації власних для даного середовища хвиль. Поляризація таких хвиль, як відомо, не змінюється

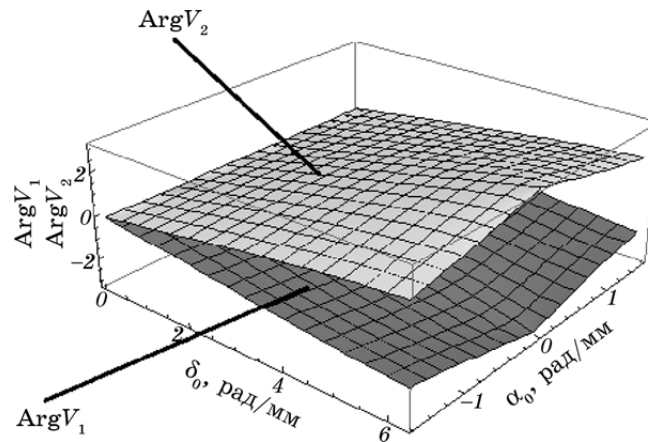


Рис. 2. Залежність аргументів власних чисел інтегральної матриці Джонса неоднорідного середовища з лінійним двопронезаломленням від питомих параметрів анізотропії δ_0, α_0 для $z = 1$ мм ($\text{Arg}V = \text{Im}(\log[V/z])$).

на всьому шляху їх розповсюдження в середовищі. Зміст власних векторів матриць Джонса в поздовжньо неоднорідному випадку дещо інший. Зокрема, вони описують поляризацію хвилі випромінювання на вході середовища, яка відтвориться на його виході за умови конкретної його товщини. При цьому стан поляризації відповідної хвилі в середовищі безперервно змінюватиметься з координатою z . Таку хвилю не можна вважати власною для середовища в загальноприйнятому розумінні. Окремо взята мономолекулярна площина є однорідним середовищем, тому власні вектори їх матриць Джонса, звичайно, описують стан поляризації власних хвиль.

Для визначення характеристик поляризації хвиль, що описуються власними векторами матриць Джонса (11) та (12), розглянутих неоднорідних середовищ, а саме, азимута і кута еліптичності, скористаємось відповідними співвідношеннями з [3]. В результаті для азимута одержуємо:

$$\theta_{e1} = -\frac{\alpha_0 z}{2}, \quad \theta_{e2} = -\frac{\alpha_0 z}{2} + \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Рівняння (13) описує яким чином азимуту поляризації вхідного випромінювання, яка буде відтворюватись на виході середовища, залежать від товщини середовища z . Графік відповідної залежності наведено на рис. 3. На тому ж рисунку наведено залежності для кутів еліптичності таких власних поляризацій.

З рисунка 3 маємо, що азимуту лінійно залежать від z за законом (13) крім точок, в яких функція азимута зазнає стрибок. Такі точки реалізуються в двох випадках: при значеннях z , що відповідають

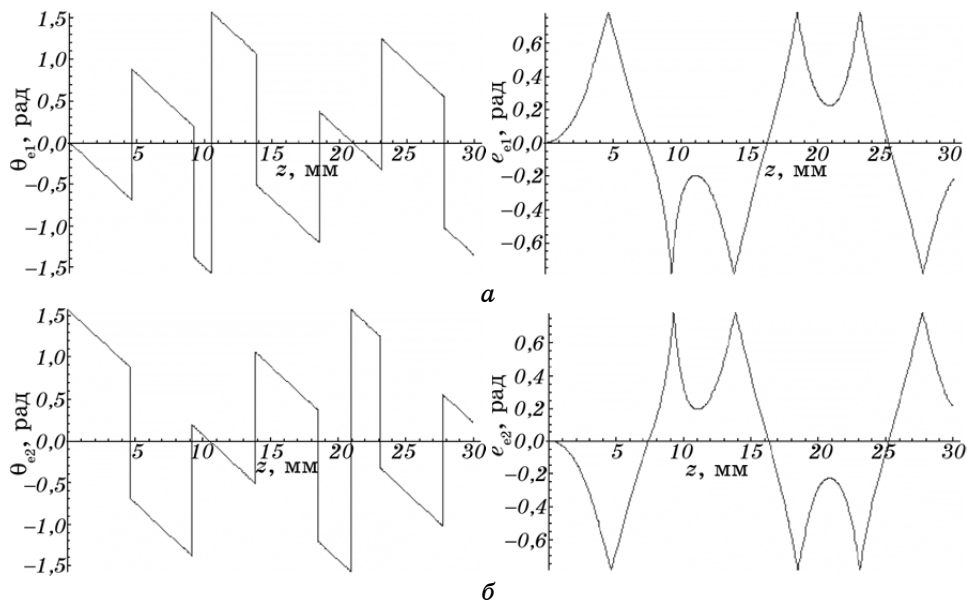


Рис. 3. Залежність азимута і кута еліптичності власних станів поляризації χ_{e1T} (а) і χ_{e2T} (б) вхідного випромінювання від товщини z неоднорідного середовища з лінійним двоприменезаломленням з параметрами анізотропії $\delta_0 = 1,22$ рад/мм, $\alpha_0 = 0,3$ рад/мм.

значенню кута еліптичності $\pm\pi/4$ (циркулярно поляризована хвиля), коли поняття азимута вироджується і тому маємо сингулярність; коли стрибок азимута від мінімального до максимального значення відповідає математичним особливостям функції arctg і не має фізичного змісту. Залежність кута еліптичності обох власних поляризацій від z є нелінійною і періодичною.

Також слід зазначити, що з'являються значення z , при яких кут еліптичності відповідає лінійно поляризованій хвилі. При цьому інтегральна матриця Джонса неоднорідного середовища збігається з матрицею лінійної фазової пластинки зі значенням лінійного двоприменезаломлення [21] $\delta = \arccos(M_{44})$ і орієнтацією осі двоприменезаломлення $\alpha = \text{arctg}(M_{42}/M_{43})$, яка збігається з азимутом однієї з власних поляризацій (M_{ij} — елементи матриці Мюллера даного класу середовищ [2]). Крім того, з'являються значення z , при яких кут еліптичності відповідає циркулярно поляризованій хвилі. Тобто, інтегральна матриця Джонса збігається з матрицею циркулярної фазової пластинки зі значенням циркулярного двоприменезаломлення $\varphi = \alpha_0 z$. І нарешті, існують ділянки, на яких кут еліптичності нелінійно зменшується (збільшується) до певного значення, не досягаючи 0. Далі відбувається перегин відповідної кривої і кут

еліптичності нелінійно збільшується (зменшується) до свого екстремального значення. Точки перегину лежать в околі значень товщини середовища, що відповідають півперіодам кроку структури (в даному випадку період структури $p = 20,94$ мм (2)), тобто відповідають повороту азимута анізотропії кінцевої молекулярної площини на 180° відносно початкового значення. Лише точка, що відповідає періоду структури, точно збігається з точкою перегину. Такі особливості відсутні в однорідних середовищах.

Підставивши одержані вирази для власних поляризацій (11), (12) в співвідношення $\chi\chi^* = -1$, одержуємо, що при будь-яких значеннях величин δ_0 , α_0 , z стани поляризації вхідних хвиль, які описуються власними векторами інтегральних і диференціальних матриць Джонса, завжди є ортогональними, що також можна побачити на рис. 3 ($\theta_{e_2} = \theta_{e_1} + \pi/2$, $e_{e_2} = -e_{e_1}$) [2].

Перевіримо можливість реалізації в таких середовищах виродження відтворюваних поляризацій вхідного випромінювання (збіг власних чисел та власних векторів). Для цього підставимо елементи матриці Джонса (11) в рівняння $[(T_{22} - T_{11})^2 + 4T_{12}T_{21}]^{1/2} = 0$. Звідки маємо, що не існує такого співвідношення між величинами δ_0 , α_0 , z , яке забезпечувало б виродженість власних поляризацій для даного класу неоднорідних середовищ.

4. АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ ВЛАСНИХ ПОЛЯРИЗАЦІЙ

При аналізі властивостей розглянутих середовищ, що являють собою поздовжньо неоднорідне середовище з лінійним двоприменезаломленням, у попередньому пункті було виявлено декілька особливостей, які принципово відрізняють цей клас від подібних класів однорідних середовищ. Головною і найбільш цікавою відмінністю є залежність власних поляризацій (11) від товщини середовища z . В загальному випадку такі середовища дозволяють відтворювати на виході еліптичні поляризації вхідної хвилі, що описуються власними векторами відповідної матриці Джонса. Для конкретної товщини середовища таких поляризацій може бути тільки дві, і до того ж, вони завжди ортогональні. На особливу увагу заслуговують випадки, коли товщина середовища і питомі параметри δ_0 , α_0 , z , такі, що відповідна матриця Джонса неоднорідного середовища буде збігатися з матрицею Джонса однорідного лінійного двоприменезаломлення (лінійної фазової пластинки) або однорідної оптичної активності (циркулярної фазової пластинки).

Знайдемо умови реалізації циркулярних власних поляризацій в даному класі неоднорідних середовищ. З визначення еліптичної фазової анізотропії в [21] та [3] випливає наступна умова, при якій

власні поляризації стають циркулярними:

$$\arccos(M_{44}) = 0; \quad (14)$$

тоді відповідне середовище буде мати тільки циркулярну фазову анізотропію. Підставляючи в (14) елемент M_{44} матриці Мюллера даного класу середовищ, що наведено в [2], одержимо:

$$\arccos\left(\frac{4\alpha_0^2 + \delta_0^2 \cos(z\sqrt{4\alpha_0^2 + \delta_0^2})}{4\alpha_0^2 + \delta_0^2}\right) = 0. \quad (15)$$

Використовуючи властивості функції \arccos та розв'язуючи рівняння (15) відносно z , одержуємо наступні умови, що забезпечують циркулярні власні поляризації:

$$z = \frac{2\pi k}{\sqrt{4\alpha_0^2 + \delta_0^2}}, \quad k \in Z \quad (k \neq 0). \quad (16)$$

Аналогічним співвідношенням для реалізації лінійних власних поляризацій є умова на відсутність циркулярного двопронезаломлення [20]:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{M_{23} - M_{32}}{M_{22} + M_{33}}\right) = 0. \quad (17)$$

Підставляючи в (17) елементи відповідної матриці Мюллера, одержуємо умову, що забезпечує лінійні власні поляризації даного класу середовищ:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{4\alpha_0^2 + \delta_0^2} [\delta_0^2 + (8\alpha_0^2 + \delta_0^2) \cos(z\sqrt{4\alpha_0^2 + \delta_0^2})] \sin(2\alpha_0 z) + \\ & + 4\alpha_0 (4\alpha_0^2 + \delta_0^2) \cos(2\alpha_0 z) \sin(z\sqrt{4\alpha_0^2 + \delta_0^2}) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

5. ВИСНОВКИ

1. Співвідношення між власними числами інтегральної та диференційної матриць Джонса у випадку однорідних та розглянутих неоднорідних двопронезаломлюючих середовищ є різними. У неоднорідних середовищах власні числа інтегральної матриці Джонса залежать від питомого кута повороту складових молекулярних площин.

2. Власні вектори інтегральної та диференційної матриць Джонса розглянутого класу неоднорідних середовищ в загальному випадку не збігаються на відміну від випадку однорідних середовищ з ліній-

ним двопронезаломленням.

3. Фізична інтерпретація власних векторів матриць Джонса в неоднорідному випадку вочевидь відрізняється від однорідного випадку. Зокрема, в неоднорідному випадку власні вектори описують поляризацію хвилі випромінювання на вході середовища, яка відтворюється без змін на його виході за умови визначеної товщини та питомих параметрів анізотропії. Таку хвилю не можна вважати власною для середовища в загальноприйнятому розумінні, оскільки стан її поляризації змінюватиметься при зміні товщини шару середовища.

4. Задаючи конкретні значення товщини та питомих параметрів анізотропії поздовжньо неоднорідних середовищ з лінійним двопронезаломленням, можна синтезувати об'єкт, що інтегрально впливатиме на стан поляризації вхідного випромінювання, як середовище з еліптичним, лінійним або циркулярним двопронезаломленням. При цьому еволюція стану поляризації хвилі, що розповсюджується в неоднорідному середовищі, докорінно відрізнятиметься від відповідної еволюції у випадку однорідних середовищ означених типів.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. S. Savenkov, R. Muttiah, E. Oberemok, and A. Klimov, *JQSRT*, **112**, Iss. 11: 1796 (2011).
2. R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, *J. Opt. Soc. Am.*, **68**: 1756 (1979).
3. R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light* (New-York: Elsevier North-Holland: 1977).
4. H. Hurwitz and R. C. Jones, *J. Opt. Soc. Am.*, **38**: 671 (1948).
5. H. Hurwitz and R. C. Jones, *J. Opt. Soc. Am.*, **31**: 493 (1941).
6. С. А. Оберемок, С. М. Савенков, *Укр. фіз. журн.*, **47**: № 8, 803 (2002).
7. R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, *J. Opt. Soc. Am.*, **62**: 1252 (1972).
8. A. S. Marathay, *J. Opt. Soc. Am.*, **61**: 1363 (1971).
9. R. M. A. Azzam, N. M. Bashara, and B. E. Merrill, *J. Appl. Opt.*, **12**: 764 (1973).
10. O. Arteaga, Z. El-Hachemi, A. Canillas, and J. M. Ribó, *Thin Solid Films*, **519**: 2617 (2011).
11. B. E. Merrill, R. M. A. Azzam, and N. M. Bashara, *J. Appl. Opt.*, **64**, No. 5: 764 (1974).
12. J. N. Hilfiker, C. M. Herzinger, T. Wagner et al., *Thin Solid Films*, **455–456**: 591 (2004).
13. С. А. Пикин, Л. М. Блинов, *Жидкие кристаллы* (Москва: Наука: 1982).
14. T. Z. Kosc, K. L. Marshall, A. Trajkovska-Petkoska et al., *Displays*, **25**, Iss. 5: 171 (2004).
15. S.-Y. Huang, Y.-S. Chen, H.-C. Jau et al., *Opt. Commun.*, **283**, Iss. 9: 1726 (2010).
16. B. Das, S. Vyas, J. Joseph et al., *Opt. Laser Eng.*, **47**, Iss. 11: 1150 (2009).
17. S. Shukla, E. Brinley, H. J. Cho, and S. Seal, *Polymer*, **46**, Iss. 26: 12130 (2005).

18. N. Morinaga, *Enzyme and Microbial Technology*, **48**, Iss. 6–7: 498 (2011).
19. І. С. Коломиец, Е. А. Оберемок, С. Н. Савенков, *Металлофиз. новейшие технол.*, **33**, 9: 493 (2011).
20. А. Анго, *Математика для электро- и радиоинженеров* (Ред. К. С. Шифрин) (Москва: Наука: 1965).
21. S. N. Savenkov, V. V. Marienko, E. A. Oberemok, and O. Sydoruk, *Phys. Rev. E*, **74**: 056607 (2006).