

ЭЛЕКТРОННЫЕ СТРУКТУРА И СВОЙСТВА

PACS numbers: 02.50.Ey, 05.40.-a, 05.70.Jk, 72.70.+m, 73.40.Gk

Влияние внешних шумов на корреляционную функцию интенсивности в процессе резонансного туннелирования

Е. А. Понежа

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины,
ул. Метрологическая, 14^б,
03680, ГСП, Киев, Украина*

Рассмотрен процесс резонансного туннелирования электронов через двухбарьерную наноструктуру под влиянием внешних шумов, обусловленных флуктуациями амплитуды и фазы в потоке электронов, падающих на туннельную систему. С учётом электростатического отталкивания в квантовой яме режим туннелирования при определённых значениях параметров становится бистабильным и приобретает повышенную чувствительность к шумам в точке неустойчивости. Шум моделировался гауссовым процессом с нулевым временем корреляции. Исследовано влияние шумов на стационарную корреляционную функцию интенсивности прошедшего через систему потока электронов на двух ветвях гистерезисного цикла и в окрестности точки неустойчивости. При вычислении корреляционной функции использовался метод линеаризации уравнений движения в окрестности невозмущённого динамического режима. Результаты сравнились с полученными при численной симуляции стохастических уравнений движения. Показано, что амплитудные и фазовые флуктуации по-разному влияют на спад корреляционной функции со временем. С увеличением интенсивности шума амплитуды площадь под кривой функции корреляции увеличивается, что свидетельствует об увеличении времени релаксации. Наоборот, с увеличением шума фазы время релаксации уменьшается. Получено удовлетворительное согласие численных результатов с аналитическими расчётами на спаде корреляционной функции.

Розглянуто процес резонансного тунелювання електронів через двобар'єрну наноструктуру під впливом зовнішніх шумів, обумовлених флуктуаціями амплітуди і фази в потоці електронів, які падають на тунельну систему. З урахуванням електростатичного відштовхування в квантовій ямі режим тунелювання за певних значень параметрів стає бістабільним і набуває підвищеної чутливості до шумів у точці нестійкості. Шум моделювався Гауссовим процесом з нульовим часом кореляції. Досліджено вплив шумів на стаціонарну кореляційну функцію інтенсивності потоку

електронів, який пройшов через систему, на двох гілках гістерезисного циклу і в околі точки нестабільності. При обчисленні кореляційної функції використовувався метод лінеаризації рівнянь руху в околі незбуреного динамічного режиму. Результати порівнювалися з одержаними при чисельній симуляції стохастичних рівнянь руху. Показано, що амплітудні і фазові флуктуації по-різному впливають на спад кореляційної функції з часом. При збільшенні інтенсивності шуму амплітуди площа під кривою функції кореляції збільшується, що свідчить про збільшення часу релаксації. Навпаки, при збільшенні інтенсивності шуму фази час релаксації зменшується. Одержано задовільне узгодження чисельних результатів з аналітичними розрахунками на спаді кореляційної функції.

The process of resonant tunnelling of electrons through the double-barrier nanostructure under the influence of external noises caused by the amplitude and phase fluctuations in an incoming current is considered. With the account of electrostatic repulsion in a quantum well, the regime of tunnelling at specified parameter values becomes bistable and possesses heightened sensibility to noises at instability points. Noise is taken as a Gaussian process with zero correlation time. The influence of noises on a stationary correlation function of the intensity of an outgoing electron flow is investigated at two branches of a hysteresis cycle and in the vicinity of an unstable point. For the calculation of the correlation function, a method of linearization in the neighbourhood of an unperturbed dynamical regime is used. The results are compared with those obtained by numerical simulation of stochastic evolution equations. As shown, the amplitude and phase fluctuations have effects on the correlation-function form in a different way. With the growth of the intensity of the amplitude noise, the square under the correlation-function curve is increased that is the evidence of the relaxation time growth. On the contrary, with increasing of the phase noise, it is decreased. A satisfactory agreement of numerical results with analytical calculations at the decay of the correlation function is achieved.

Ключевые слова: резонансное туннелирование, амплитудные и фазовые флуктуации, внешний шум, стационарная корреляционная функция.

(Получено 18 ноября 2013 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

Быстрый прогресс нанотехнологий обусловил большой интерес к проблеме электронного транспорта через барьерные низкоразмерные структуры. Наиболее часто исследуется структура, состоящая из 2-х потенциальных барьеров, окружающих потенциальную яму. Хорошо известно, что прохождение электронов через такую структуру эффективно только при условии резонанса [1]. Учет динамической аккумуляции заряда внутри потенциальной ямы приводит к электростатическому механизму обратной связи, что вызывает сдвиг резонансного уровня, зависящий от величины тока, прохо-

дящего через систему. Это способствует возникновению бистабильности с петлей гистерезиса в зависимости интенсивности потока, проходящего через систему, от интенсивности потока, падающего на систему [2]. В области поворотных точек гистерезиса система оказывается нестабильной и, в силу этого, чрезвычайно чувствительной к шумам разной природы, которые могут способствовать переходу с одной ветви гистерезисного цикла на другую [3, 4].

В последнее время большое внимание уделяется вычислению стационарных функций корреляции $C(t)$ для процесса, находящегося под действием шума [5–10]. Проблема взаимного влияния шумов амплитуды и фазы на корреляционные функции рассматривалась в контексте лазерной системы в работах [6, 11–13], где говорилось о влиянии фазовых флуктуаций в падающем свете на амплитудные флуктуации излучения, выходящего из резонатора. В работах [10, 14] исследовалось влияние кросс-корреляции между этими шумами на корреляционные функции.

Целью настоящей работы является исследование стационарной функции корреляции интенсивности $C(t)$ потока электронов, проходящих через туннельную систему. В качестве внешних шумов рассматривались флуктуации амплитуды и фазы волновой функции в волновом пакете, описывающем поток электронов, падающий на туннельную систему. Мы рассчитывали корреляционные функции интенсивности на 2-х стационарных ветвях гистерезисного цикла, т.е. до перехода и после перехода, а также в окрестности точки перехода. При вычислении корреляционной функции использовался метод линеаризации уравнений движения в окрестности невозмущенного динамического режима, а также численная симуляция стохастических уравнений движения.

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСНОГО ТУННЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Рассматривается открытая когерентная туннельная система, где поток электронов, описываемый волновым пакетом, инжектируется слева и проходит через туннельную структуру только один раз. Для описания временной зависимости выходящего потока с учетом накопления заряда внутри потенциальной ямы и образования электростатического механизма обратной связи используется модель, представленная в работе [2]. В пределе высоких и узких барьеров было получено следующее дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды D выходящей волны:

$$dD/dt = (iz - 1)D - i|D|^2 D + D_0, \quad (1)$$

где D_0 — амплитуда волновой функции в падающем потоке,

$z = L(k - k_r)$ — параметр, пропорциональный расстройке волнового вектора электрона k от резонансного значения k_r , L — обратная полуширина резонансного уровня в k -пространстве, которая связана с полушириной в энергетическом пространстве соотношением $\delta E_{1/2} = 2\hbar\nu = \hbar k_r / (m^* L)$, m^* — эффективная масса электрона, $t = vt'$ — безразмерное время.

Переходя к интенсивностям $T_0 = D_0^2$, $T = D^2$, приходим к следующему соотношению между интенсивностями падающего T_0 и прошедшего T потоков в стационарном случае:

$$T_0 = T[1 + (z - T)^2] = F(T). \quad (2)$$

Это уравнение имеет три корня при значениях параметра $z > 3^{1/2}$. В этом случае в системе имеется 2 устойчивых стационарных состояния и одно неустойчивое, т.е. система находится в бистабильном режиме.

В качестве внешних шумов будем рассматривать флуктуации в падающем потоке (как амплитудные, так и фазовые), которые, предположительно, могут быть вызваны сбоями в устройстве, обеспечивающем постоянные значения параметров потока электронов, падающих на туннельную систему. Учет флуктуаций амплитуды волновой функции в волновом пакете, который моделирует падающую частицу, обеспечивается заменой параметра амплитуды падающей волновой функции D_0 на случайную величину $D_0(t) = D_0 + G_1 \tilde{q}(t)$, где $\tilde{q}(t)$ — флуктуации гауссового типа с нулевым средним и корреляцией $\langle \tilde{q}^*(t) \tilde{q}(t') \rangle = \delta(t - t')$, а $G_1 = (P/2)^{1/2}$, где P — интенсивность флуктуаций амплитуды.

Флуктуацию фазы принято описывать фазовой диффузионной моделью [15, 11], в которой случайная частота моделируется гауссовым шумом. Учет флуктуаций частоты для нашей модели означает, что величина z также является флуктуирующей величиной возле своего среднего значения $z(t) = z + G_2 \tilde{\xi}(t)$, где $\tilde{\xi}(t)$ является гауссовым процессом с нулевым средним и корреляцией $\langle \tilde{\xi}^*(t) \tilde{\xi}(t') \rangle = \delta(t - t')$, а $G_2 = (Q/2)^{1/2}$, где Q — интенсивность флуктуаций фазы.

С учетом шумовых слагаемых получим следующее уравнение Ланжевена:

$$\dot{D} = -D + iDz - i|D|^2 D + D_0 + G_1 \tilde{q}(t) + iD G_2 \tilde{\xi}(t). \quad (3)$$

Представим комплексные случайные члены в виде:

$$\tilde{q}(t) = q_r(t) + i q_i(t), \quad \tilde{\xi}(t) = \xi_r(t) + i \xi_i(t).$$

Тогда, переходя в уравнении (3) к интенсивностям и фазам ($T = D^{1/2} \exp(i\eta)$, $T_0 = D_0^{1/2} \exp(i\eta_0)$), получим следующую систему

уравнений Ланжевена:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= -2T + 2(TT_0)^{1/2} \cos \varphi + 2T^{1/2}G_1q_r(t) \cos \varphi - 2TG_2\xi_1(t), \\ \dot{\varphi} &= -z + T - \sqrt{\frac{T_0}{T}} \sin \varphi - \frac{G_1}{\sqrt{T}} q(t) \sin \varphi - G_2\xi_r(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi = \eta_0 - \eta$.

В общем виде эту систему уравнений можно записать как [12]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_l &= f_l(x_l) + \sum_m g_{lm} \theta_m(t), \quad l, m = 1, 2, \\ x_1 &= T, \quad x_2 = \varphi, \quad \theta_1 = \tilde{q}(t), \quad \theta_2 = \tilde{\xi}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь выделены детерминистические члены

$$f_1 = -2T + 2(TT_0)^{1/2} \cos \varphi, \quad f_2 = -z + T - (T_0/T)^{1/2} \sin \varphi \quad (6)$$

и коэффициенты перед шумовыми компонентами

$$\begin{aligned} g_{11} &= 2\sqrt{T}G_1 \cos \varphi, \quad g_{12} = -2TG_2, \\ g_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{T}}G_1 \sin \varphi, \quad g_{22} = -G_2. \end{aligned}$$

Перейдем от уравнений Ланжевена к уравнениям Фоккера–Планка в представлении Стратоновича:

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\sum_{n=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_n} k_n W(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{n,m} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} k_{nm} W(\mathbf{x}, t), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f_1 + \frac{1}{2} \sum_l g_{lj} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_l} = f_1 + G_1^2 \cos^2 \varphi + \frac{G_1^2}{T} \sin^2 \varphi + 2TG_2^2, \\ k_2 &= f_2 + \frac{1}{2} \sum_l g_{lj} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_l} = f_2 + \frac{T-1}{2T^2} G_1^2 \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_j g_{1j} g_{1j} = 4TG_1^2 \cos^2 \varphi + 4T^2 G_2^2, \\ k_{22} &= \sum_j g_{2j} g_{2j} = \frac{1}{T} G_1^2 \sin^2 \varphi + G_2^2, \\ k_{12} &= g_{11} g_{21} + g_{12} g_{22} = -2G_1^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2TG_2^2, \quad k_{12} = k_{21}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнение (7), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(T, \varphi, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial T} [-2T + 2(TT_0)^{1/2} \cos \varphi + G_1^2 \cos^2 \varphi + \frac{G_1^2}{T} \sin^2 \varphi + \\ & + 2TG_2^2] W(T, \varphi, t) - \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[z - T + \sqrt{\frac{T_0}{T}} \sin \varphi + \frac{T-1}{2T^2} G_1^2 \sin \varphi \cos \varphi \right] \times \\ & \times W(T, \varphi, t) + \frac{\partial^2}{\partial T^2} [2TG_1^2 \cos^2 \varphi + 2T^2 G_2^2] W(T, \varphi, t) + \frac{1}{2T^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\frac{1}{T} G_1^2 \times \right. \\ & \left. \times \sin^2 \varphi + G_2^2 \right] W(T, \varphi, t) + \frac{1}{T} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial T} [-2G_1^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2TG_2^2] W(T, \varphi, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Проинтегрируем теперь каждое слагаемое по φ на интервале от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и положим $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} W(T, \varphi, t) d\varphi = W(T, t)$. Тогда уравнение (8) сведется к

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(T, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial T} [-2T + 2(TT_0)^{1/2} \langle \cos \varphi \rangle + G_1^2 \langle \cos^2 \varphi \rangle + \frac{G_1^2}{T} \langle \sin^2 \varphi \rangle + \\ & + 2TG_2^2] W(T, t) + \frac{\partial^2}{\partial T^2} [2TG_1^2 \langle \cos \varphi \rangle^2 + 2T^2 G_2^2] W(T, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Скобки $\langle \dots \rangle$ означают, что интегрирование по φ выполняется при условии, что $T = T_s$ постоянно. В этом случае $\langle \cos \varphi \rangle = [1 + (z - T_s)^2]^{-1/2}$.

Нелинейность коэффициентов переноса и диффузии делает уравнение (9) очень трудным для решения, поэтому, применяя подход [11, 12], мы линеаризуем уравнение (9) возле стационарного значения T_s и получим:

$$\frac{\partial W(T, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} [-\lambda_T (T - T_s) + D_T \frac{\partial}{\partial T}] W(T, t), \quad (10)$$

где величина

$$\lambda_T = \frac{\partial k_1(T)}{\partial T} = \frac{2[1 + (T_s - z)(3T_s - z)]}{1 + (z - T_s)^2} + 2G_2^2 - \frac{G_1^2}{T_s^2} \left(\frac{T_0 - T_s}{T_0} \right) \quad (11)$$

определяет скорость релаксации. Время релаксации определяется как $t_d = 1/\lambda_T$. Заметим, что функция в числителе этого выражения есть производная по T от функции $F(T)$ в уравнении (2). Эта производная равна нулю в поворотных точках гистерезиса. Значит, в этих точках время релаксации возрастает до бесконечности (так

называемое, критическое замедление), при этом происходит неограниченное нарастание флуктуаций амплитуды. Коэффициент диффузии равен:

$$D_T = 2T_s G_1^2 \langle \cos^2 \varphi \rangle + 2T_s^2 G_2^2 = 2T_s G_1^2 \frac{1}{1 + (z - T_s)^2} + 2T_s^2 G_2^2. \quad (12)$$

3. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ

В работе анализировалось поведение стационарной корреляционной функции $C(t)$ интенсивности прошедшего потока $T(t)$:

$$C(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\langle T(t' + t)T(t') \rangle - \langle T(t')^2 \rangle}{\langle T(t')^2 \rangle}$$

в зависимости от интенсивности флуктуаций амплитуды P и фазы Q на разных ветвях гистерезисного цикла. Корреляционная функция вычислялась по формуле:

$$C(t) = \frac{D_T}{T_s^2 \lambda_T} e^{-\lambda_T t} = \frac{2T_s}{\lambda_T} \left[\frac{G_1^2}{1 + (z - T_s)^2} + T_s G_2^2 \right] e^{-\lambda_T t}, \quad (13)$$

где величины λ_T и D_T выражались зависимостями (11) и (12) соответственно.

Вычисления корреляционной функции $C(t)$ выполнялись также путем непосредственного численного интегрирования стохастиче-

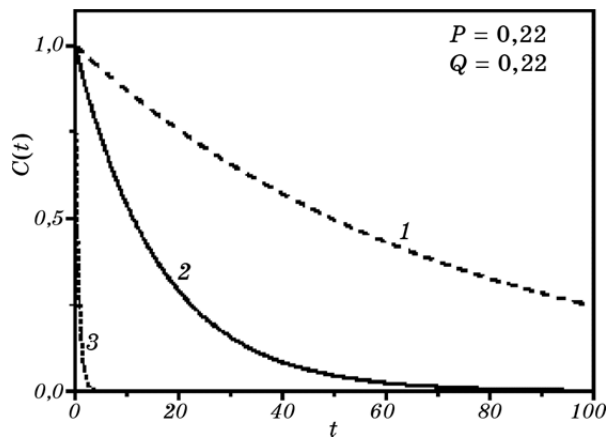


Рис. 1. Корреляционные функции интенсивности прошедшего потока вблизи точки перехода (кривая 1), до нее (кривая 2) и после нее (кривая 3) при интенсивности шума амплитуды $P = 0,22$ и фазы $Q = 0,22$.

ской системы уравнений движения (4) с помощью метода, описанного в работе [18]. Чтобы при вычислении стационарной корреляционной функции $C(t)$ быть уверенными, что счет ведется в области стационарных значений, уравнения вычислялись вплоть до времени, в 10 раз превышающего время характеристического распада корреляционной функции. В качестве $T(0)$ бралось детерминированное стационарное значение T_s . Результаты для $C(t)$ усреднялись по большому числу реализаций (обычно порядка 5000). Временной шаг составлял 10^{-3} . Для обеспечения работы в бистабильном режиме значение безразмерного параметра z_s бралось равным 3,5. При этом в стационарном детерминированном режиме переход с нижней ветви гистерезисного цикла на верхнюю происходил при $T_{0s} = 7,59$.

На рисунке 1 приведены полученные с использованием формулы (13) кривые корреляционной функции интенсивности прошедшего потока при интенсивностях падающего потока, находящихся в окрестности нестационарной точки ($T_{0s} = 7,59$), до нее ($T_{0s} = 7,46$) и после перехода с нижней ветви на верхнюю ($T_{0s} = 7,7$), при значениях силы шума амплитуды и фазы, равных $P = 0,22$ и $Q = 0,22$ соответственно. Когда величина интенсивности падающего потока приближается к поворотной точке, переменная интенсивности подвергается критическому замедлению, а флуктуации амплитуды резко возрастают. При этом площадь под кривой зависимости корреляционной функции от времени увеличивается. Это видно из сравнения кривых 1 и 2, полученных вблизи точки перехода и до нее соответственно.

Различие в форме корреляционной функции на нижней и верх-

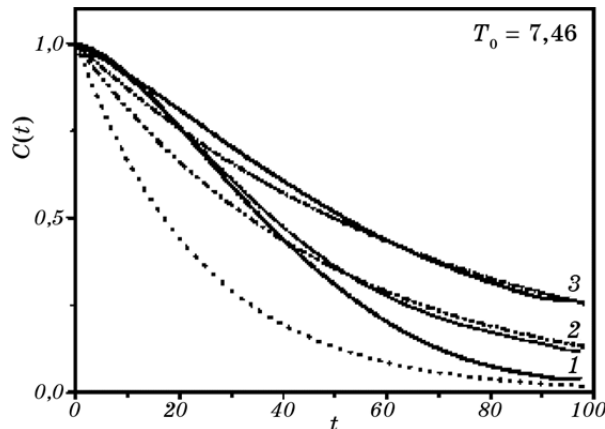


Рис. 2. Корреляционные функции интенсивности перед точкой перехода при значениях интенсивностей шумов: 1 — $P = 0,22$, $Q = 0,22$, 2 — $P = 0,5$, $Q = 0,22$, 3 — $P = 0,7$, $Q = 0,12$. Сплошные кривые — численная симуляция. Пунктирные кривые — линейное приближение.

ней ветвях гистерезисного цикла (кривые 2 и 3, соответственно) возникает из-за различных значений скорости релаксации λ_T , равных на этих ветвях, соответственно, $\lambda_T = 0,203$ и $\lambda_T = 5,332$.

Зависимость корреляционной функции интенсивности от силы шумов проиллюстрирована на рис. 2, когда система находилась на нижней кривой. Из сравнения кривых видно, что шумы амплитуды и фазы по-разному влияют на спад корреляционной функции. Так, из линейной теории следует, что с увеличением силы шума амплитуды P площадь под кривой корреляции увеличивается, в то время как с увеличением силы шума фазы Q она уменьшается. Кривые, полученные при численной симуляции, качественно повторяют эти закономерности на больших временах. При малых временах зависимость отличается от экспоненциальной, там спад кривых замедляется. Это можно связать как с нелинейностью рассматриваемой задачи, так и с взаимной корреляцией шумов.

4. ВЫВОДЫ

В выполненных исследованиях влияния внешних шумов в процессе резонансного туннельного процесса на стационарную корреляционную функцию интенсивности прошедшего через туннельную систему потока электронов показано, что амплитудные и фазовые флуктуации в падающем потоке по-разному влияют на спад корреляционной функции. Увеличение силы шума амплитуды приводит к сдвигу кривой корреляционной функции вправо, в сторону больших времен, т.е. к росту площади под кривой, что свидетельствует об увеличении времени релаксации. Наоборот, с увеличением силы шума фазы площадь под кривой корреляционной функции уменьшается. В окрестности точки перехода система очень чувствительна к влиянию шумов и под их влиянием может перейти в другой режим работы, не доходя до точки бифуркации в детерминированном режиме. При приближении к точке перехода площадь под кривой корреляционной функции с увеличением силы шума растёт, а после того, как переход произошел, резко спадает, что приводит к сдвигу кривой корреляции в зависимости от времени влево. Можно сделать вывод, что метод линеаризации уравнений движения качественно правильно описывает поведение корреляционных функций со временем на больших временах, т.е. на спаде корреляционной функции.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. V. V. Mitin, V. A. Kochelap, and M. A. Stroschio, *Introduction to Nanoelectronics. Science, Nanotechnology, Engineering, and Applications* (Cambridge: University Press: 2008).

2. A. S. Davydov and V. N. Ermakov, *Physica D*, **28**: 168 (1987).
3. E. A. Ponezha, *Ukr. J. Phys.*, **55**: No. 2: 244 (2010) (in Russian).
4. V. N. Ermakov and E. A. Ponezha, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **33**, No. 1: 45 (2011) (in Russian).
5. A. Hernández-Machado and M. San Miguel, *J. Math. Phys.*, **25**, No. 4: 1066 (1983).
6. A. Hernández-Machado and M. San Miguel, *Phys. Rev. A*, **33**, No. 4: 2481 (1986).
7. J. Casademunt, R. Mannella, P. V. E. McClintock, F. E. Moss, and J. M. Sancho, *Phys. Rev. A*, **35**, No. 12: 5183 (1987).
8. M. Aguado, E. Hernández-García, and M. San Miguel, *Phys. Rev. A*, **38**, No. 1: 5670 (1988).
9. P. D. Lett and E. C. Gage, *Phys. Rev. A*, **39**, No. 3: 1193 (1989).
10. E. Hernández-García, R. Toral, and M. San Miguel, *Phys. Rev. A*, **42**, No. 11: 6823 (1990).
11. C.-J. Wang, Q. Wei, and D.-C. Mei, *Phys. Lett. A*, **372**: 2176 (2008).
12. Ping Zhu, *Eur. Phys. J. B*, **55**: 447 (2007).
13. C. R. Willis, *Phys. Rev. A*, **27**, No. 1: 375 (1983).
14. C. R. Willis, *Phys. Rev. A*, **29**, No. 2: 774 (1984).
15. S. Singh, S. Friberg, and L. Mandel, *Phys. Rev. A*, **27**, No. 1: 381 (1983).
16. D. Mei, C. Xie, and Li Zhang, *Phys. Rev. E*, **68**: 051102 (2003).
17. S. N. Dixit, P. Zoller, and P. Lambropoulos, *Phys. Rev. A*, **21**, No. 4: 1289 (1980).
18. J. M. Sancho, M. San Miguel, S. L. Katz, and J. D. Gunton, *Phys. Rev. A*, **26**, No. 3: 1589 (1982).