

В.Є.Гончарук, Центр математичного моделювання ІППММ НАНУ, м.Львів;  
НУ “Львівська політехніка”

## МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЇ РОЗПАДНОЇ РЕЧОВИНИ В ТІЛАХ З КАНАЛАМИ ШВИДКОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ ЧАСТИНОК

**Abstract.** In the paper non-stationary processes of admixture mass transfer are studied in two-phase regular structures with taking into account periodical character of advective phenomena and decaying migrating substance. The solution of the contact initial boundary-value problem of advection-diffusion of decaying particles at the non-ideal contact conditions for concentration is constructed using applicable integral transformations over space variables separately in the contacting domains. The relation between these integral transforms is found by using non-ideal contact conditions. Simulation is carried out for migration of strontium-90 and cesium-137 in a kaolin layer.

**Key-words:** diffusion, convection, decaying admixture, periodical structure, mass flow, software package

**Анотація.** В роботі досліджено нестационарні процеси масоперенесення домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням періодичного характеру конвективних явищ та розпаду мігруючої речовини. Розв'язок контактної-крайової задачі конвективної дифузії розпадних частинок за неідеальних умов контакту на функцію концентрації побудований з використанням різних інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в контактуючих областях. Зв'язок між цими інтегральними перетвореннями знайдений з використанням неідеальних контактних умов. Комп'ютерне моделювання проведено для міграції стронцію-90 та цезію-137 в шарі каоліну.

**Ключові слова:** дифузія, конвекція, розпадна домішкова речовина, періодична структура, потік маси, пакет програм

**Вступ.** В результаті техногенної діяльності людини в оточуюче середовище потрапляє велика кількість небезпечних речовин та сполук. В наслідок аварій на атомних електростанціях довкілля забруднене радіонуклідами зі значними періодами піврозпаду. Інтенсивна експлуатація земельних ресурсів у сільськогосподарському виробництві призводить до накопичення в приповерхневих шарах Землі пестицидів, нітратів, нітритів та їхніх сполук, а також проникнення цих речовин у ґрунтові води. В таких випадках для прийняття адекватних управлінських рішень щодо знешкодження негативних чинників необхідна оцінка здатності природних матеріалів утримувати радіоактивні елементи та інші небезпечні сполуки в зоні забруднення, визначати закономірності їхнього поширення в конкретному

фізико-хімічному середовищі (земля, ґрунти, поверхневі та підземні води, мули, зависі, аерозолі тощо). Прогнозні розрахунки та відповідні оцінки поширення забруднень у ґрунтах базуються на математичних моделях масоперенесення, які повинні з достатньою повнотою враховувати складну неоднорідну структуру середовища [1], наявність різних шляхів дифузії частинок [2], можливість конвективного перенесення домішки (наприклад, процес фільтрації атмосферних опадів крізь профіль ґрунту) [3].

Для кількісного опису дифузії домішкових речовин у двофазних середовищах періодичної структури з урахуванням каналів конвективного перенесення речовини в працях [4-6] розвинений метод побудови точних аналітичних розв'язків відповідних контактних-крайових задач масопереносу, який у даній роботі застосовується для побудови розв'язків задач нестационарної конвективної дифузії в регулярних структурах з урахуванням розпаду мігруючої речовини та комп'ютерного моделювання поширення таких радіонуклідів як стронцій-90 і цезій-137 в каоліні.

**Об'єкт опису та постановка задачі.** Міграція забруднень (типу важких металів, зокрема, радіонуклідів (в т.ч.  $^{90}\text{Sr}$  і  $^{137}\text{Cs}$ ), нітратних сполук, пестицидів) в зволоженому ґрунті переважно зумовлена дифузією у водних розчинах та макроскопічним рухом приповерхневих і ґрунтових вод [7-9]. Моделюємо структуру ґрунту як сукупність мінеральних монокристалів, які утворюють пористий скелет [1, 2], і розділені тонкими каналами швидкого переміщення забруднюючих частинок (рис. 1).

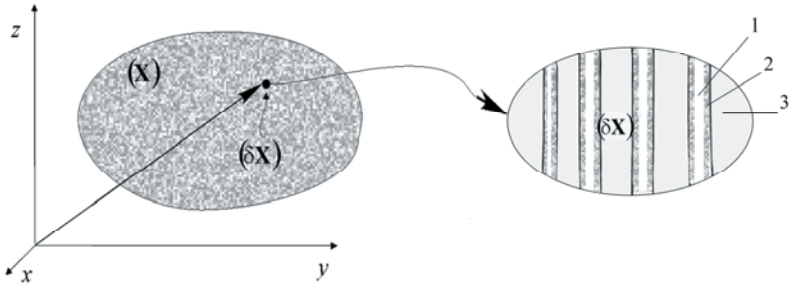


Рис. 1. Характерна структура фізично малого елемента ґрунту: 1 - водний поровий розчин; 2 – адсорбовані на скелеті ґрунту шари води; 3 – скелет ґрунту

Якщо двофазний матеріал можна розглядати як структуру з геометрично правильними включеннями, то реальну неупорядковану структуру заміняють регулярною структурою, яка має певну періодичність за просторовими координатами [10]. Тоді необхідно знаходити розв'язок задачі для виділеного елемента тіла, який містить одне або декілька включень.

Тому структуру ґрунту розглядаємо як шар товщини  $x_0$ , який складається з періодично розташованих прошарків двох типів (рис.2а), в яких дифундують домішкові частинки: прошарку з гравітаційно рухомим поровим розчином та подвійних електричних шарів, міцнозв'язаних з поверхнею міне-

рального скелета [2, 9]. В області каналів порового розчину такі частинки мають коефіцієнт дифузії значно більший, ніж у приповерхневих шарах, а також переміщуються конвективно. Виділяємо фізично репрезентативний елемент тіла (рис.2b), для якого приймаємо, що область каналу рідкої фази з коефіцієнтом дифузії  $D_1$  має ширину  $2L$ , а область твердої фази з коефіцієнтом  $D_2$  -  $2l$ , крім цього в областях з коефіцієнтом дифузії  $D_1$  масоперенос відбувається за конвективно-дифузійними механізмом зі швидкістю конвективного перенесення  $v$ , яка вважається відомою і сталою.

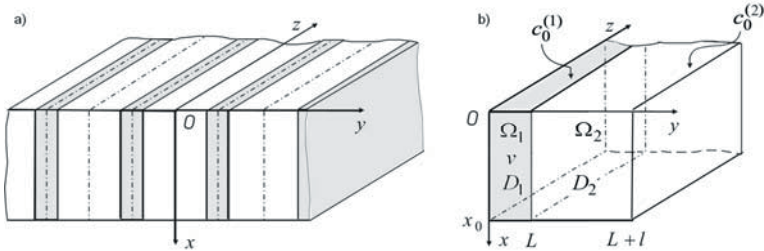


Рис.2. Регулярна структура тіла, в якому мігрує домішкова речовина (рис.а), та виділений елемент такої структури (рис.б)

В нестационарному випадку концентрація розпадної домішки  $c_1(x, y, t)$  в області  $\Omega_1 = ]0; x_0[ \times ]0; L[$  визначається з рівняння конвективної дифузії

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \left[ \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right] - v \frac{\partial c_1}{\partial x} - \lambda c_1, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (1)$$

де  $\lambda$  - коефіцієнт інтенсивності розпаду мігруючої речовини [ $c^{-1}$ ].

В області  $\Omega_2 = ]0; x_0[ \times ]L; L+l[$  концентрація розпадних частинок  $c_2(x, y, t)$  задовольняє рівняння дифузії

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \left[ \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right] - \lambda c_2, \quad (x, y) \in \Omega_2. \quad (2)$$

Вважаємо, що у початковий момент часу в тілі відсутня домішкова речовина:

$$c_1(x, y, t)|_{t=0} = c_2(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

а далі на границі  $x=0$  підтримуються сталі значення концентрацій, на нижній границі тіла концентрації дорівнюють нулю:

$$c_1(x, y, t)|_{x=0} = c_0^{(1)} \equiv \text{const}, \quad c_2(x, y, t)|_{x=0} = c_0^{(2)} \equiv \text{const},$$

$$c_1(x, y, t)|_{x=x_0} = c_2(x, y, t)|_{x=x_0} = 0. \quad (4)$$

На бічних поверхнях виділеного елемента  $y=0$ ,  $y=L+l$  нулю дорівнюють горизонтальні складові потоку, тобто

$$\left. \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c_2(x, y)}{\partial y} \right|_{y=L+l} = 0. \quad (5)$$

На границі контакту  $y = L$  задаємо умови неідеального контакту для функції концентрації у вигляді [11]:

$$\eta_1 c_1(x, y, t) \Big|_{y=L} = \eta_2 c_2(x, y, t) \Big|_{y=L}, \quad D_1 \left. \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L} = D_2 \left. \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L}, \quad (6)$$

де  $\eta_1$  і  $\eta_2$  ( $\eta_1 \neq \eta_2$ ) - коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу.

Розв'язок контактної-крайової задачі масоперенесення (1)-(6) шукаємо з допомогою інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в контактуючих областях [4-6]. Для цього доозначимо функції  $\partial c_1 / \partial y$  на границі області  $\Omega_1$  і  $\partial c_2 / \partial y$  на границі  $\Omega_2$ , враховуючи другу контактну умову (6). Вона означає, що на границі контакту  $y = L$  масові потоки рівні між собою і, в свою чергу, дорівнюють деякій функції  $g(x, t)$ , тобто

$$D_1 \left. \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L} = D_2 \left. \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L} = g(x, t). \quad (7)$$

Тепер можемо виконати скінченні інтегральні cos-перетворення окремо в контактуючих областях. За змінною  $y$  в області  $\Omega_1$  застосуємо скінченне інтегральне cos-перетворення Фур'є [12]

$$\tilde{c}_1(x, k, t) = \int_0^L c_1(x, y, t) \cos(y_k y) dy, \quad (8)$$

$$\bar{c}_1(x, y, t) = \frac{1}{L} \tilde{c}_1(x, 0, t) + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_1(x, k, t) \cos(y_k y), \quad (9)$$

де  $y_k = k\pi/L$ . За змінною  $x$  застосуємо таке інтегральне перетворення [13]

$$\bar{c}_1(n, k, t) = \int_0^{x_0} \tilde{c}_1(x, k, t) e^{-v_D x} \sin(x_n x) dx, \quad (10)$$

$$\tilde{c}_1(x, k, t) = \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_1(n, k, t) \sin(x_n x), \quad (11)$$

де  $v_D = v/2D_1$ ,  $x_n = n\pi/x_0$ . Для функції  $g(x, t)$  відповідно маємо

$$\tilde{g}_n(t) = \int_0^{x_0} g(x, t) e^{-v_D x} \sin(x_n x) dx, \quad (12)$$

$$g(x, t) = e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(t) \sin(x_n x). \quad (13)$$

В результаті крайова задача в області  $\Omega_1$  в зображеннях зводиться до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\bar{c}_1}{dt} = -\left[ D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2) + \lambda \right] \bar{c}_1 + D_1 a_k c_0^{(1)} x_n + (-1)^k \tilde{g}_n(t) \quad (14)$$

з початковою умовою

$$\bar{c}_1(n, k, t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (15)$$

Тут  $a_k = \begin{cases} L, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$ .

Розв'язок задачі (14)-(15) знаходимо у вигляді [14]:

$$\bar{c}_1(n, k, t) = e^{-[D_1(x_n^2 + y_k^2 + v_D^2) + \lambda]t} \int_0^t \left[ D_1 a_k c_0^{(1)} x_n + (-1)^k \tilde{g}_n(t') \right] e^{[D_1(x_n^2 + y_k^2 + v_D^2) + \lambda]t'} dt'. \quad (16)$$

В області  $\Omega_2$  за змінною  $y$  застосуємо  $\cos$ -перетворення Фур'є із зсувом [2]

$$\tilde{c}_2(x, j, t) = \int_L^{L+l} c_2(x, y, t) \cos(y_j(y-L)) dy, \quad (17)$$

$$\bar{c}_2(x, y, t) = \frac{1}{l} \tilde{c}_2(x, 0, t) + \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_2(x, j, t) \cos(y_j(y-L)), \quad (18)$$

де  $y_j = j\pi/l$ . За змінною  $x$  застосуємо скінченне інтегральне  $\sin$ -перетворення Фур'є [12]

$$\bar{c}_2(m, j, t) = \int_L^{L+l} \tilde{c}_2(x, j, t) \sin(x_m x) dx, \quad (19)$$

$$\tilde{c}_2(x, j, t) = \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_2^{\infty}(m, j, t) \sin(x_m x), \quad (20)$$

де  $x_m = m\pi/x_0$ . Для функції  $g(x, t)$   $\sin$ -перетворення Фур'є має вигляд

$$\tilde{g}_m(t) = \int_0^{x_0} g(x, t) \sin(x_m x) dx, \quad (21)$$

$$g(x, t) = \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{g}_m \sin(x_m x). \quad (22)$$

Тоді в зображеннях отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\bar{c}_2}{dt} = -[D_2(x_m^2 + y_j^2)\bar{c}_2 + \lambda] + D_2 a_j c_0^{(2)} x_m - \tilde{g}_m(t) \quad (23)$$

з початковою умовою

$$\bar{c}_2(m, j, t)|_{t=0} = 0, \quad (24)$$

де  $a_j = \begin{cases} l, & j = 0 \\ 0, & j = 1, 2, \dots \end{cases}$ . Звідки знаходимо

$$\bar{c}_2(m, j, t) = e^{-[D_2(x_m^2 + y_j^2) + \lambda]t} \int_0^t [D_2 a_j c_0^{(2)} x_m - \tilde{g}_m(t')] e^{[D_2(x_m^2 + y_j^2) + \lambda]t'} dt'. \quad (25)$$

Значимо, що на відміну від стаціонарного випадку, де в зображеннях отримувались алгебраїчні рівняння, тут одержано диференціальні рівняння.

У виразах (18) і (25) залишаться невідомими функції  $\tilde{g}_n(t')$  і  $\tilde{g}_m(t')$ . Ці функції шукаємо з першої контактної умови (6) стрибка функції концентрації на границі розділу областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ . Для цього виконуємо відповідні обернені інтегральні перетворення і отримані вирази підставляємо в першу умову (6). В результаті отримуємо таке інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \eta_1 e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left( \left[ D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{\tilde{g}_n(t')}{L} \right] e^{-[D_1(v_D^2 + x_n^2) + \lambda](t-t')} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{L} \tilde{g}_n(t') \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-[D_1(v_D^2 + x_n^2 + y_k^2) + \lambda](t-t')} \right) dt' = \\ & = \int_0^t \eta_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x_m x) \left( \left[ D_2 c_0^{(2)} x_m - \frac{\tilde{g}_m(t')}{l} \right] e^{-[D_2(x_m^2 + y_j^2) + \lambda](t-t')} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{l} \tilde{g}_m(t') \sum_{j=1}^{\infty} e^{-[D_2(x_m^2 + y_j^2) + \lambda](t-t')} \right) dt'. \quad (26) \end{aligned}$$

Крім цього потрібно знайти зв'язок між функціями  $\tilde{g}_n(t')$  і  $\tilde{g}_m(t')$ . Виявилось, що врахування в моделі розпаду мігруючої речовини на такий зв'язок не впливає. Отже маємо [6]

$$\tilde{g}_m(t') = \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} \tilde{g}_n(t') \quad \text{або} \quad \tilde{g}_n(t') = \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \tilde{g}_m(t'), \quad (27)$$

де коефіцієнти  $A_{n,m}$  і  $B_{n,m}$  визначаються наступним чином

$$A_{n,m} \equiv \frac{2v_D \pi^2}{x_0^2} \frac{nm[(-1)^{n+m} e^{v_D x_0} - 1]}{\left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n-m)^2 \right\} \left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n+m)^2 \right\}},$$

$$B_{n,m} \equiv -\frac{2v_D \pi^2}{x_0^2} \frac{nm \left[ (-1)^{n+m} e^{-v_D x_0} - 1 \right]}{\left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n-m)^2 \right\} \left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n+m)^2 \right\}}. \quad (28)$$

Тоді, розв'язуючи рівняння (26), одержимо

$$\tilde{g}_n(t') = \frac{-\frac{\eta_1}{\eta_2} D_1 c_0^{(1)} x_n + \frac{2}{x_0} D_2 c_0^{(2)} \sum_{m=1}^{\infty} x_m B_{n,m} E_{n,m}(t-t')}{\frac{\eta_1}{\eta_2 L} \Theta_0 \left( 0, e^{-D_1 \frac{\pi^2}{L^2} (t-t')} \right) + \frac{4}{x_0^2 l} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t-t') A_{n,m} B_{n,m} e^{D_1 (v_D^2 + x_n^2) (t-t')}}}, \quad (29)$$

де  $E_{n,m}(t-t') = \exp \left\{ - \left[ D_2 x_m^2 - D_1 (v_D^2 + x_n^2) \right] (t-t') \right\}$ ,  $\Theta_0(v, x)$  – еліптична тета-функція [15],  $\Phi_m(t-t') = e^{-D_2 x_m^2 (t-t')} \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-D_2 y_j^2 (t-t')} \right\}$ .

Остаточно отримаємо формули для концентрації розпадної домішкової речовини в області  $\Omega_1$

$$c_1(x, y, t) = e^{-\lambda t} e^{v_D x} \left[ c_0^{(1)} \frac{\text{sh } v_D (x_0 - x)}{\text{sh}(v_D x_0)} + \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left[ -\frac{c_0^{(1)} x_n}{v_D^2 + x_n^2} e^{-D_1 (v_D^2 + x_n^2) t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{L} \int_0^t \left\{ \tilde{g}_n(t') e^{\lambda t'} e^{-D_1 (v_D^2 + x_n^2) (t-t')} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(y_k y) e^{-D_1 y_k^2 (t-t')} \right) \right\} dt' \right] \right], \quad (30)$$

в області  $\Omega_2$

$$c_2(x, y, t) = c_0^{(2)} \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right) - \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x_m x) \left\{ \frac{c_0^{(2)} e^{-\lambda t} e^{-D_2 x_m^2 t}}{x_m} + \right. \\ \left. + \frac{1}{l} \int_0^t \tilde{g}_m(t') e^{-[D_2 x_m^2 + \lambda] (t-t')} \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos(y_j (y-L)) e^{-D_2 y_j^2 (t-t')} \right) dt' \right\}. \quad (31)$$

Зауважимо, що інтегральне рівняння (26) має неєдиний розв'язок, оскільки, зокрема, існують такі функції  $F(t') \neq 0$ , що  $\int_0^t F(t') dt' = 0$ . У той же

час розв'язок вихідної задачі є єдиним незалежно від вибору способу розв'язання інтегрального рівняння (26), оскільки  $\tilde{g}_n(t')$  і  $\tilde{g}_m(t')$  в розв'язках  $c_1(x, y, t)$  і  $c_2(x, y, t)$  фігурують тільки під знаком інтеграла за змінною  $t'$ .

Також зазначимо, що вираз (29) не містить коефіцієнта інтенсивності

розпаду домішки  $\lambda$ . Тоді, враховуючи формули (13) і (22), функція  $g(x, t)$  також не залежить від  $\lambda$ , тобто розпад мігруючої речовини не впливає на інтенсивність потоку через границю контакту областей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  (масообмін між контактуючими областями). В той же час інтегральні доданки формул для концентрації (30) і (31), які враховують масообмін між фазами, експоненціально залежать від коефіцієнта інтенсивності розпаду речовини.

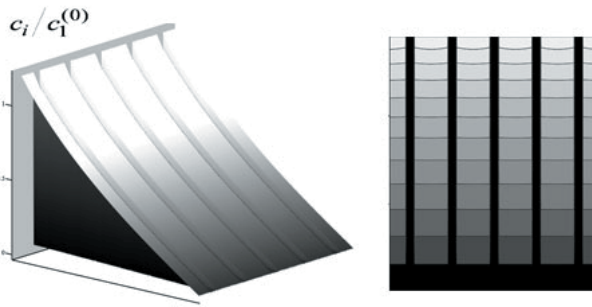
**Комп'ютерне моделювання міграції радіонуклідів в каоліні.** На основі отриманих формул (30), (31) дослідимо поширення забруднення в шарі каоліну. З літературних джерел відомо [2, 3, 7, 8], що радіоактивні частинки перебувають у ґрунтовому розчині та в шарах води, міцнозв'язаних з поверхнею мінерального скелета. В області порового розчину такі частинки мають коефіцієнт дифузії значно більший, ніж в адсорбованих шарах, а також переміщуються конвективно. За даними робіт [2, 7] для каоліну коефіцієнт дифузії  $^{90}\text{Sr}$  в міцно зв'язаних зі скелетом шарах води є  $D_2^{Sr} = 9 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2/\text{с}$ , а для  $^{137}\text{Cs}$  -  $D_2^{Cs} = 3 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2/\text{с}$ . Коефіцієнт дифузії  $^{90}\text{Sr}$  в поровому розчині (швидкий шлях переміщення) оцінюється  $D_2^{Sr} = (0.003 \div 0.08) D_1^{Sr}$ , при цьому коефіцієнт дифузії  $^{137}\text{Cs}$  у три рази більший відповідного коефіцієнта дифузії  $^{90}\text{Sr}$ . Для даної задачі прийнято  $D_1^{Sr} = 1.12 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2/\text{с}$  і  $D_1^{Cs} = 3.35 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2/\text{с}$ . Коефіцієнт конвективного перенесення залежно від кліматичних режимів змінюється в межах  $0 \div 3.5 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}$ . Тут розглядаються два випадки, в яких швидкість конвективного перенесення відрізняється на порядок  $v = 7.3 \cdot 10^{-11} \text{ м/с}$  і  $v = 7.3 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}$ . Враховуючи, що період піврозпаду для  $^{90}\text{Sr}$  28.8 року, для  $^{137}\text{Cs}$  – 30.17 року, коефіцієнти інтенсивності розпаду  $^{90}\text{Sr}$   $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$ ,  $^{137}\text{Cs}$   $\lambda = 1,04 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$ . Товщина приповерхневого шару Землі, в якому мігрує забруднююча речовина,  $x_0 = 3 \text{ м}$ , а товщина тонких каналів конвективного переміщення частинок є  $2L = 10^{-3} \text{ м}$ .

Числові розрахунки проводились у безрозмірних змінних [4]  $\tau = kt$ ,  $\xi = (k/D_1)^{1/2} x$ ,  $\zeta = (k/D_1)^{1/2} y$ , де  $k$  - коефіцієнт, який має розмірність  $[\text{с}^{-1}]$ . Тоді безрозмірні швидкості конвективного перенесення і відношення коефіцієнтів дифузії набувають значень:  $\hat{v} = 0.05$  і  $\hat{v} = 0.005$ ,  $d = D_2^{90Sr} / D_1^{90Sr} = 0.08$ ,  $d = D_2^{137Cs} / D_1^{137Cs} = 0.09$ . Відношення коефіцієнтів  $\eta_1/\eta_2$  визначалось зі значень коефіцієнтів сорбції-десорбції [13]: для  $^{90}\text{Sr}$   $\eta_1/\eta_2 = 0.4$ , для  $^{137}\text{Cs}$   $\eta_1/\eta_2 = 0.5$ . Також прийнято, що на поверхні  $c_2^{(0)}/c_1^{(0)} = 1.2$ . Це означає, що з поверхні ґрунту в тонкі канали потрапляє 45% поверхневого забруднення, а в сорбовану воду – 55%.





a



b

Рис.3. Просторові розподіли функцій концентрації домішки  $c_j/c_1^{(0)}$  і рівні однакових концентрацій  $^{90}\text{Sr}$  для малих (рис.а) і великих (рис.б) швидкостей конвективного перенесення при  $c_2^{(0)}/c_1^{(0)} = 1.2$

Зазначимо, що у випадку каоліну для великих швидкостей конвективного перенесення радіонукліди практично не накопичуються у каналах швидкого переміщення частинок (рис.3б і 4б), при цьому розподіл концентрації  $^{90}\text{Sr}$  в монокристалах є ближчим до лінійного. Для малих швидкостей конвективного перенесення сумарна концентрація радіонуклідів є більшою в усій області тіла і значно більшою в околі поверхні, де діє джерело маси (рис.3а і 4а), причому  $^{90}\text{Sr}$  може в незначних кількостях накопичуватись в адсорбованих шарах води (рис.3а). У випадку інтенсивнішого змиву  $^{90}\text{Sr}$  з поверхні ґрунту в тонкі канали спостерігається значне приповерхнєве ( $\approx 5-10$  см) накопичення радіонукліда в адсорбованій на монокристалах ґрунту воді за рахунок сорбційних процесів. В той же час для міграції  $^{137}\text{Cs}$  в каоліні концентрація радіонукліда збільшується на деякій віддалі від поверхні ґрунту (у проміжку 30-50 см від поверхні).

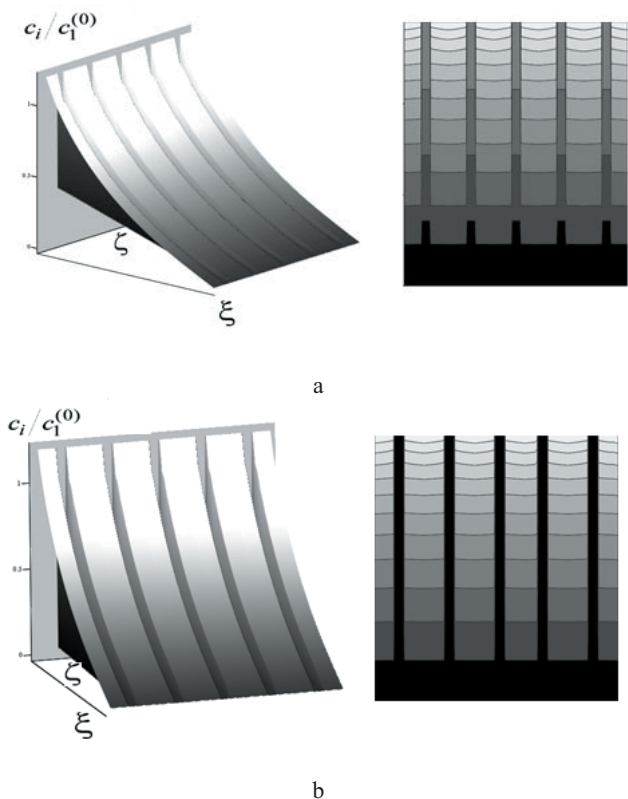


Рис.4. Просторові розподіли функцій концентрації домішки  $c_j/c_1^{(0)}$  і рівні однакових концентрацій  $^{137}\text{Cs}$  для малих (рис.а) і великих (рис.б) швидкостей конвективного перенесення при  $c_2^{(0)}/c_1^{(0)}=1.2$

**Висновки.** Таким чином, розглянуто нестационарні процеси дифузії домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням періодичного характеру конвективних явищ та розпаду мігруючої речовини. Крайова задача математичної фізики сформульована за неідеальних умов контакту на функцію концентрації. Розв'язок задачі конвективної дифузії розпадних частинок побудований з використанням різних інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в контактуючих областях. Зв'язок між цими інтегральними перетвореннями знайдений з використанням контактних умов, отримано інтегральне рівняння Вольтерра першого роду для знаходження потоку маси на границі контакту. Показано, що розпад міг-

руючої речовини не впливає на інтенсивність потоку через границю контакту областей, з яких складене тіло, тобто на масообмін між контактуючими областями. Проте інтегральні доданки формул для концентрації, які враховують масообмін між фазами, експоненціально залежать від коефіцієнта інтенсивності розпаду речовини. Комп'ютерне моделювання проведено для міграції стронцію-90 та цезію-137 в шарі каоліну.

Для подальших досліджень перспективно вивчення конвективної дифузії в тілах регулярної структури за наявності каналів швидкого переміщення частинок з врахуванням каскадного розпаду мігруючої речовини.

1. *Полдубаринова-Кочинова П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Недра, 1977. – 664 с.
2. *Прохоров В.М.* Миграция радиоактивных загрязнений в почвах. – М: Энергоатомиздат, 1981. – 106 с.
3. *Борзилов В.А.* Физико-математическое моделирование поведения радионуклидов // Природа. – 1991. - № 5. – С. 42-51.
4. *Chaplya Y., Chernukha O., Dmytruk V.* Advective-diffusive mass transfer in binary regular structures in the steady-state regime // Applied Math. Modelling. – 2013. – V. 37. – P.6191-6211.
5. *Чернуха О.Ю., Гончарук В.С., Дмитрук В.А.* Моделювання граничних випадків контактної-крайової задачі стаціонарної конвективної дифузії в періодичних структурах // Моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 58. – С. 242-253.
6. *Гончарук В.С., Дмитрук В.А., Чернуха О.Ю.* Нестационарні процеси конвективно-дифузійного масоперенесення у бінарних регулярних структурах // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Фізико-математичні науки. – 2012. - № 740. – С. 79-90.
7. *Фрид Ж.* Загрязнение подземных вод. - М: Недра, 1981. – 304 с.
8. Чорнобильська катастрофа / Під ред. акад. В.Г.Бар'яхтара. – К.: Наукова думка, 1996. – 575 с.
9. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
10. *Хорошун Л.П.* Математические модели и методы механики стохастических композитных материалов. - Прикладная механика. - 2000. – Т. 36, № 10. - С. 30-62.
11. *Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – К.: Наукова думка, 2006. – 272 с.
12. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – 667 с.
13. *Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
14. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
15. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

*Поступила 4.02.2013р.*