

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ ДІЛЯНКИ ТРУБОПРОВОДУ ПІД ДІЄЮ РУХОМОГО ДІАГНОСТИЧНОГО ПОРШНЯ

Анотація. Розглядається математична модель поперечних коливань прямолінійної ділянки трубопроводу, що виникають під час проходження діагностичного поршня. Аналіз ґрунтується на застосуванні методу узагальнених переміщень, згідно з яким передбачається задавання форм коливань ланки з розподіленими параметрами відповідно до крайових умов. Діагностичний поршень подається на розрахунковій моделі як тверде тіло. Рівняння руху механічної системи одержуються за схемою рівнянь Лагранжа другого роду. Ілюструється вплив параметрів механічної системи і швидкості руху поршня на прогини ділянки трубопроводу, згинальні моменти і напруження в трубі.

Аннотация. Рассматривается математическая модель поперечных колебаний прямолинейного участка трубопровода, возникающих во время прохождения диагностического поршня. Анализ основывается на применении метода обобщённых перемещений, согласно которому предусматривается задание форм колебаний элемента с распределёнными параметрами с учётом граничных условий. Диагностический поршень представляется на расчётной схеме как твёрдое тело. Уравнения движения механической системы формируются с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Иллюстрируется влияние параметров механической системы и скорости движения поршня на прогибы участка трубопровода, изгибающие моменты и напряжения в трубе.

Abstract. In this article is considered a mathematical model of transverse vibrations of the pipeline straight section. Such vibrations occur during the movement of diagnostic piston in the pipeline. The analysis is based on the method of generalized displacements. This method provides setting modes of links with distributed parameters according to the boundary conditions. Diagnostic piston is considered as a solid in the calculation model. The equations of mechanical systems motion are derived by the Lagrange scheme equations of the second kind. As the result, we illustrate the influence of the mechanical system parameters and the speed of the piston on the pipeline section deflections, bending moments and stresses in the pipe.

Вступ

Аналіз коливальних явищ у механічних системах, що перебувають під дією рухомих навантажень, становить важливу проблему сучасної динаміки машин і споруд [1–4, 7–12]. Її практичне значення пояснюється необхідністю вдосконалення методів розрахунку підйимально-транспортних систем [2, 11, 12], механічних передач з гнучкими ланками [4], магістральних трубопроводів [5, 6], мостів [7, 8] тощо. Розв'язання задач динаміки таких систем із застосуванням континуальних розрахункових моделей зводиться до інтегру-

вання рівнянь з частинними похідними за наявності рухомих крайових умов [2, 10, 11]. У дослідженнях коливань стрижнів та ниток змінної довжини застосовують математичні моделі у вигляді інтегральних рівнянь [3].

Побудова замкннутих аналітичних рішень рівнянь руху для вказаних випадків пов'язана із значними математичними труднощами і реально здійснима лише для порівняно простих систем, ланки котрих мають сталі пружно-інерційні параметри, а закони руху крайових умов задані. Аналіз динамічних процесів у реальних несівних конструкціях доцільно виконувати із застосуванням засобів дискретизації механічних ланок, що значно спрощує розв'язання задачі. Достатньо ефективним є метод узагальнених переміщень [9], що ґрунтується на попередньому заданні форм коливань довгомірних елементів. За рахунок застосування коефіцієнтів амплітудних функцій як узагальнених координат він дає можливість описувати коливальні процеси звичайними диференційними рівняннями. Даний підхід успішно апробований під час дослідження динаміки континуально-дискретних механічних систем з довгомірними несівними елементами. У даній праці він розвивається на прикладі задачі про поперечні коливання прямолінійної ділянки трубопроводу під дією рухомого діагностичного поршня.

1. Математична модель згинних коливань ділянки трубопроводу під дією рухомого діагностичного поршня

Механічна система, що включає ділянку трубопроводу й рухомий інтелектуальний поршень, схематично зображена на рис. 1, де l – довжина ділянки; xOy – система координат, у якій розглядаються згинні коливання ділянки трубопроводу; m, J – маса й центральний момент інерції поршня; v – швидкість руху поршня, яку будемо вважати сталою; x_m – координата центра маси поршня. Густина і модуль пружності матеріалу труби позначаємо як ρ і E ; площу і осьовий момент інерції поперечного перерізу труби – як A і I_z .

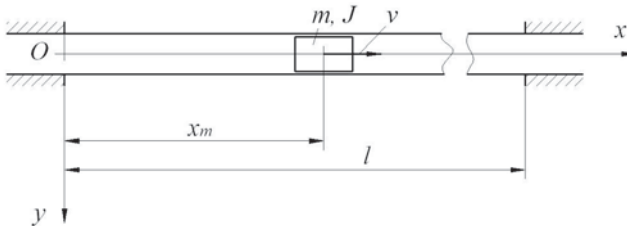


Рис. 1. Розрахункова схема надземної ділянки трубопроводу з рухомим діагностичним поршнем.

Функцію, яка описує зігнуту вісь ділянки трубопроводу, подаємо у вигляді

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_i(t) \cdot \psi_i(x), \quad (1)$$

де t – час; $y(x,t)$ – прогин трубопроводу; $\psi_i(x)$ – форми коливань, які треба добирати так, щоб виконувалися граничні умови на кінцях ділянки; $Y_i(t)$ – амплітудні коефіцієнти; n – число ступенів вільності механічної системи, що дорівнює числу врахованих форм коливань трубопроводу.

Задамо залежності $\psi_i(x)$ у вигляді власних форм поперечних коливаль стрижня з зашумленими кінцями,

$$\psi_i(x) = \psi_{1i}(x) - \frac{\psi_{1i}(l)}{\psi_{2i}(l)} \cdot \psi_{2i}(x) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

де

$$\psi_{1i}(x) = \cos k_i x - \operatorname{ch} k_i x; \quad \psi_{2i}(x) = \sin k_i x - \operatorname{sh} k_i x. \quad (3)$$

Добутки $k_i l$, знайдені для нижчих десяти власних форм, становлять:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_i l$	4,730	7,853	10,996	14,137	17,279	20,420	23,562	26,704	29,846	32,989

Десять нижчих власних форм ділянки трубопроводу, одержані за формулами (2), (3), наведені на рис. 2.

Приймаючи за узагальнені координати величини $Y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), застосовуємо рівняння Лагранжа другого роду для опису руху механічної системи,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

де T і Π – кінетична і потенціальна енергії; q_i – узагальнена координата; Φ – функція Релея; Q_j – неконсервативна узагальнена сила.

Кінетичну енергію записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} T = & \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{\rho I_z}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx + \\ & + \frac{m}{2} \left\{ \left[\frac{dx_m(t)}{dt} \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_{x=x_m} \cdot \frac{dx_m(t)}{dt} + \frac{\partial y(x_m,t)}{\partial t} \right]^2 \right\} + \\ & + \frac{J}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_{x=x_m} \right) \cdot \frac{dx_m(t)}{dt} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right)_{x=x_m} \right]^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Потенціальна енергія деформації ділянки трубопроводу виражається формулою

$$\Pi = \frac{EI_z}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (6)$$

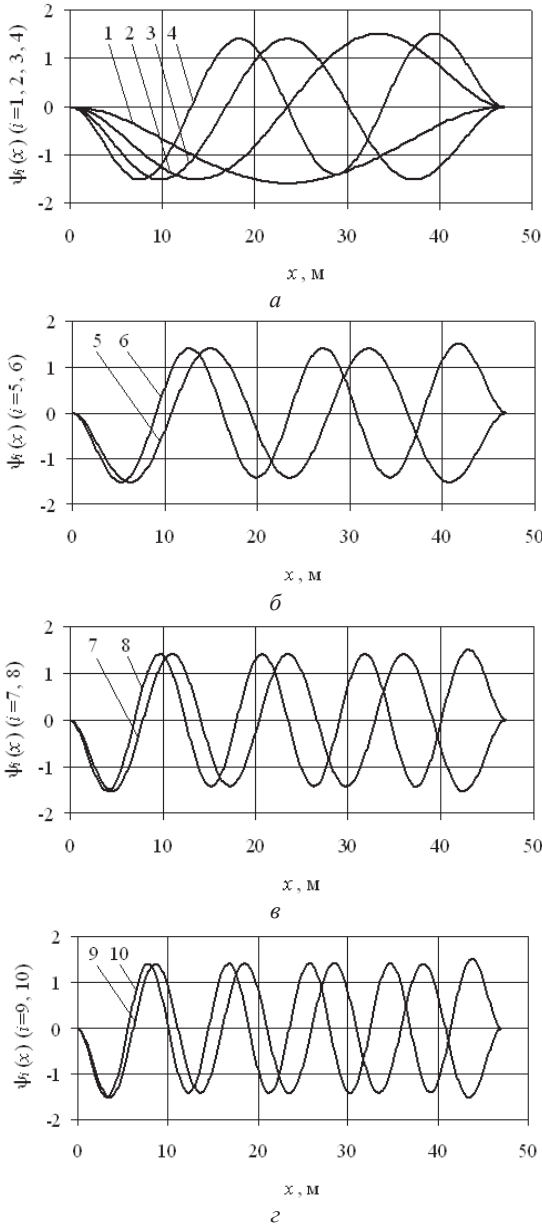


Рис. 2. Нижчі чотири (*a*), п'ята і шоста (*б*), сьома і восьма (*в*), дев'ята і десята (*г*) власні форми згинних коливань надземної ділянки трубопроводу. Позначення кривих відповідають порядковим номерам форм коливань

Функцію Релея, за допомогою якої враховуємо розсіяння енергії коливань, подаємо як

$$\Phi = \frac{\nu I_z}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right]^2 dx, \quad (7)$$

де ν – коефіцієнт гістерезисного відхилення матеріалу від закону Гука.

З урахуванням залежності (1) зводимо вирази (5) – (7) до вигляду

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^n \dot{Y}_i(t) \cdot \psi_i(x) \right]^2 dx + \frac{\rho I_z}{2} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^n \dot{Y}_i(t) \cdot \psi_i'(x) \right]^2 dx + \\ &+ \frac{m}{2} \left\{ [v(t)]^2 + \left[v(t) \sum_{i=1}^n Y_i(t) \cdot \psi_i'(x_m) + \sum_{i=1}^n \dot{Y}_i(t) \cdot \psi_i(x_m) \right]^2 \right\} + \\ &+ \frac{J}{2} \left[v(t) \sum_{i=1}^n Y_i(t) \cdot \psi_i''(x_m) + \sum_{i=1}^n \dot{Y}_i(t) \cdot \psi_i'(x_m) \right]^2; \\ \ddot{I} &= \frac{EI_z}{2} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^n Y_i(t) \cdot \psi_i''(x) \right]^2 dx; \quad \dot{O} = \frac{\nu I_z}{2} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^n \dot{Y}_i(t) \cdot \psi_i''(x) \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Перетворимо залежності (8) до вигляду, зручного для складання рівнянь руху механічної системи,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho A}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{Y}_i \dot{Y}_j + \frac{\rho I_z}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{Y}_i \dot{Y}_j + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (ma_{mij} + Jb_{mij}) \dot{Y}_i \dot{Y}_j + v(t) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (md_{mij} + Je_{mij}) Y_i \dot{Y}_j + \\ &+ \frac{[v(t)]^2}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (mb_{mij} + Jc_{mij}) Y_i Y_j + \frac{m[v(t)]^2}{2}; \\ \Pi &= \frac{EI_z}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} Y_i Y_j; \quad \Phi = \frac{\nu I_z}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{Y}_i \dot{Y}_j, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^l \psi_i(x) \psi_j(x) dx; \quad b_{ij} = \int_0^l \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx; \quad c_{ij} = \int_0^l \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx; \\ a_{mij} &= \psi_i(x_m) \psi_j(x_m); \quad b_{mij} = \psi_i'(x_m) \psi_j'(x_m); \quad c_{mij} = \psi_i''(x_m) \psi_j''(x_m); \\ d_{mij} &= \psi_i'(x_m) \psi_j(x_m); \quad e_{mij} = \psi_i''(x_m) \psi_j'(x_m). \end{aligned} \quad (10)$$

Диференціюючи вирази (9) і підставляючи одержувані результати до рівності (4), записуємо

$$A\ddot{Y} + B\dot{Y} + CY = Q, \quad (11)$$

де \dot{Y} – матриця-колонка узагальнених координат,

$$Y = \text{col}[Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)];$$

A, B, C – квадратні матриці,

$$A_{ij} = \rho A a_{ij} + \rho I_z b_{ij} + m a_{mij} + Y b_{mij}, \quad B_{ij} = \nu I_z c_{ij},$$

$$C_{ij} = \dot{\nu}(t)(m d_{mij} + Y e_{mij}) - [N(t)]^2 (m b_{ij} + Y c_{mij}) + E I_z c_{ij};$$

Q – матриця-колонка узагальнених сил,

$$Q = \text{col}[Q_1, Q_2, \dots, Q_n].$$

Для визначення узагальнених сил системи запишемо вертикальне переміщення центра ваги діагностичного поршня як

$$y(x_m, t) = \sum_{i=1}^n Y_i \psi_i(x_m). \quad (12)$$

Віртуальна робота сили ваги поршня визначається залежністю

$$\delta A = mg \cdot \delta y(x_m, t), \quad (13)$$

де $\delta y(x_m, t)$ – віртуальне переміщення, яке знаходимо з урахуванням (12),

$$\delta y(x_m, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y(x_m, t)}{\partial Y_i} \delta Y_i = \sum_{i=1}^n \psi_i(x_m) \delta Y_i, \quad (14)$$

причому, δY_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – варіації узагальнених координат.

З урахуванням (13), (14) записуємо віртуальну роботу у вигляді

$$\delta A = mg \sum_{i=1}^n \psi_i(x_m) \delta Y_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta Y_i. \quad (15)$$

Як випливає зі співвідношення (15), узагальнені сили визначаються залежностями

$$Q_i = mg \psi_i(x_m). \quad (16)$$

Отже, нестационарні згинні коливання надземної ділянки трубопроводу під дією рухомого діагностичного поршня описують диференціальні рівняння (11), розв'язання яких виконуємо з урахуванням виразів узагальнених сил (16) і відповідних початкових умов. Якщо при $t = 0$ механічна система перебуває у стані спокою, то значення узагальнених координат і їхніх похідних за часом приймаємо рівними нулю, тобто,

$$Y_i(0) = 0; \quad \dot{Y}_i(0) = \dot{Y}_i(0) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

З метою застосування широко розповсюдженого програмного забезпечення для розв'язання задачі, перетворюємо систему диференціальних рівнянь (11) до нормальної форми Коші:

$$\dot{X} = D(t, x), \quad (18)$$

де $X, D(t, x)$ – матриці-колонки,

$$X = \text{col}(Y, V);$$

$$D(t, x) = \text{col}\left[V, A^{-1}(-BV - CY + Q)\right].$$

Таким чином, аналіз динамічних явищ у механічній системі зводиться до розв'язання задачі Коші для системи $2n$ диференціальних рівнянь (18) з урахуванням залежностей для визначення форм коливань ділянки трубопроводу (2), (3), узагальнених сил (16) і початкових умов (17). Після знаходження узагальнених координат $Y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) визначаємо прогин ділянки трубопроводу за формулою (1), а згинальні моменти – за співвідношенням

$$M(x, t) = EI_z \sum_{i=1}^n Y_i(t) \cdot \psi_i''(x). \quad (19)$$

що впливає безпосередньо з технічної теорії згину,

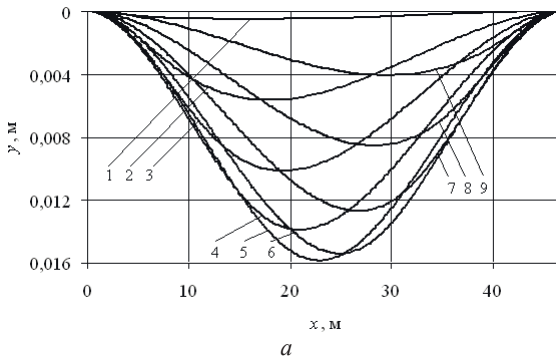
з урахуванням залежності (19), максимальні напруження згину у поперечних перерізах трубопроводу обчислюємо як

$$\sigma(x, t) = \frac{M(x, t)}{W_z} = \frac{Ed}{2} \sum_{i=1}^n Y_i(t) \cdot \psi_i''(x),$$

де W_z і d – момент опору і зовнішній діаметр поперечного перерізу труби.

3. Результати розрахунків динамічних процесів

Приклад процесу деформування ділянки трубопроводу під дією рухомого діагностичного поршня проілюстровано на рис. 3, де зображені криві прогинів (рис. 3, а) і згинальних моментів (рис. 3, б), побудовані для моментів часу, коли поршень пройшов шлях $0,1l; 0,2l; \dots; 0,9l$ (криві 1, 2, ..., 9).



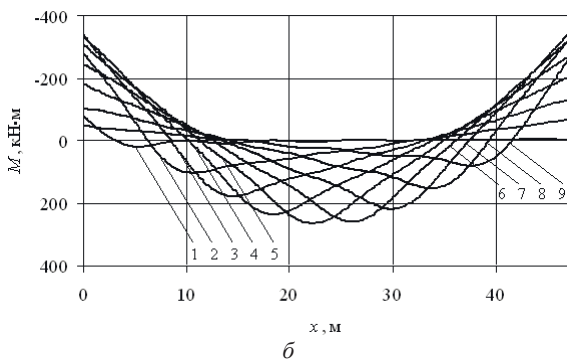


Рис. 3. Залежності прогинів (а) і згинальних моментів (б) від поздовжньої координати ділянки трубопроводу довжиною 47 м і діаметром 1200 мм з діагностичним поршнем масою 5000 кг, який рухається зі швидкістю 5 м/с, у мометни часу 0,94 с; 1,88 с; 2,82 с; 3,76 с; 4,7 с; 5,64 с; 6,58 с; 7,52 с; 8,46 с (криві 1 – 9 відповідно)

Найбільшого прогину значенням 15,979 мм набула точка осі труби з координатою $x = 23,754$ м у момент часу $t = 4,751$ с. Значні згинальні моменти, що можуть впливати на міцність трубопроводу, виникають як у крайніх перерізах ділянки, так і в перерізах, розміщених в області середньої частини ділянки. Найбільший за абсолютним значенням згинальний момент становив -345,920 кН·м і виник у поперечному перерізі з координатою $x = 47$ м у момент часу $t = 6,404$ с. Максимальне напруження згину досягло значення 26,266 МПа.

Із збільшенням швидкості руху діагностичного поршня спостерігається загальна тенденція до зростання максимального прогину та максимального напруження у трубі (рис. 4, 5). Однак, слід відмітити, що для трубопроводу великого діаметра і, відповідно, великої згинної жорсткості, напруження, обумовлені дією рухомого діагностичного поршня, не чинять істотного впливу на міцність труби (рис. 4).

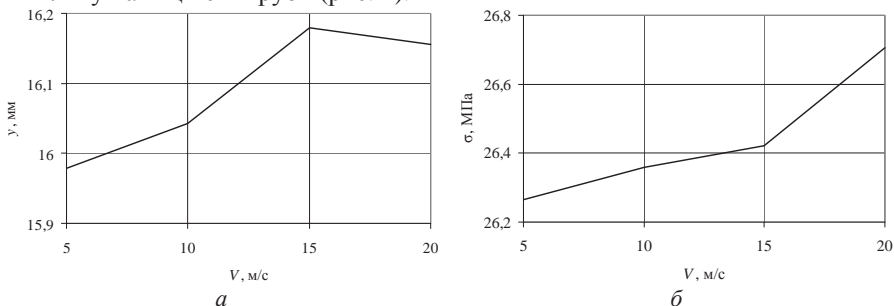


Рис. 4. Вплив швидкості руху діагностичного поршня на максимальний прогин (а) ділянки трубопроводу довжиною 47 м, діаметром 1200 мм і товщиною стінки 12 мм на максимальні напруження згину в трубі (б) під час руху діагностичного поршня масою 5000 кг

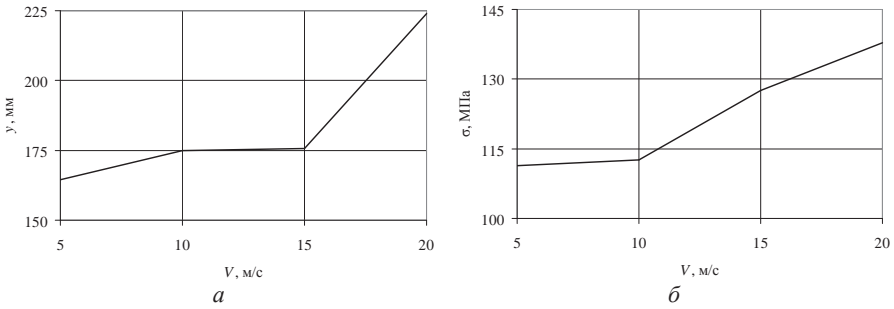


Рис. 5. Вплив швидкості руху діагностичного поршня на максимальний прогин (а) ділянки трубопроводу довжиною 47 м, діаметром 500 мм і товщиною стінки мм на максимальні напруження згину в трубі (б) під час руху діагностичного поршня масою 3500 кг

Із зменшенням діаметра і, відповідно, згинної жорсткості трубопроводу прогини та напруження, зумовлені рухом поршня, значно зростають (рис. 5). Істотно збільшується також вплив швидкості руху поршня на зазначені характеристики напружено-деформованого стану ділянки трубопроводу.

Висновки

Побудована математична модель згинних коливань ділянки трубопроводу під дією рухомого діагностичного поршня, що ґрунтується на застосуванні методу узагальнених переміщень, дає можливість звести розрахунок динамічного процесу до розв'язання задачі Коші для нелінійної системи диференціальних рівнянь за допомогою широко апробованих чисельних методів.

Як показують результати досліджень, дія рухомого діагностичного поршня на трубопровід може спричинити значні динамічні деформації, згинальні моменти і напруження у матеріалі труби та істотно вплинути на міцність надземної ділянки трубопроводу. Динамічні напруження зростають зі зменшенням згинної жорсткості трубопроводу і значною мірою залежать від швидкості руху діагностичного поршня, що необхідно враховувати як під час проектування трубопроводів, так і в процесі проведення їх технічної діагностики.

1. Болотин В. В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Механика и машиностроение. – 1961. – № 4. – С. 109–115.
2. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М: ФИЗМАТГИЗ, 2001. – 320 с.
3. Гогеля Т. И. Динамический расчёт конструкций на подвижные нагрузки с применением метода конечных элементов // Сообщения АН ГрССР, 115. – 1984. – № 1. – С. 121–124.
4. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. К.: Наукова думка, 1971. – 224 с.
5. Грудз В. Я., Тимків Д. Ф., Михалків В. Б., Костів В. В. Обслуговування і ремонт газопроводів. – Івано-Франківськ: Лілея-НВ, 2009. – 712 с.

6. Грузд В. Я., Бакаев В. В., Грузд Я. В., Розен Г. Математичне моделювання процесу руху інтелектуального поршня на газопроводі // Нафтова і газова промисловість. – 2000. – № 4. – С. 46–47.
7. Иванченко И. И. Метод расчета на подвижную нагрузку стержневых систем, моделирующих мосты // Изв. АН РФ. Механика твердого тела. – 2001. – №4. – С. 151–165.
8. Иванченко И. И. О действии подвижной нагрузки на мосты // Известия АН РФ. Механика твердого тела. – 1997. – №6. – С. 180–185.
9. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
10. Коган А. Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом. – М.: Транспорт, 1997. – 326 с.
11. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка, 1980. – 231 с.
12. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
13. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.

Поступила 9.9.2013р.

УДК 004.932

В. И. Загребнюк, к. т. н., ОНАС им. А.С. Попова, Одесса
Ф. В. Насиров, аспирант, ОНАС им. А.С. Попова, Одесса

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА СЕГМЕНТОВ НА ТЕЛЕВИЗИОННОМ ИЗОБРАЖЕНИИ

Анотація. У роботі розглянуто математичну модель визначення кількості сегментів телевізійного зображення. Показано, що при розкладанні зображення на сингулярні компоненти, кількість змін знака значень третього власного вектора співпадає з кількістю сегментів.

Ключові слова: сегментація телевізійних зображень, прикладні телевізійні системи, сингулярне розкладання, кількість сегментів.

Abstract. The mathematical model of definition of segment count on TV image is proposed. It is shown, that using singular vector decomposition TV image the number of sign changes of the third eigenvector values corresponds to the number of segments.

Keywords: TV image segmentation, applied television, singular decomposition, segment count.

Введение

Прикладные телевизионные системы все более широко используются не только в промышленности, но и в других предметных областях. Например, охранные системы, системы видеонаблюдения, телевизионные