

## ЗБІЖНІСТЬ ЗМІЩЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

**Abstract.** The results of research of approximation, stability and as a results coinciding of calculable charts of solving Cauchy problem for the ordinary differential equalizations developed on the basis of the displaced Tailor differential transformations are given.

### Актуальність

В багатьох практичних задачах, які виникають в таких областях, як хімічна кінетика, процеси управління та теорія електричних кіл, виникає завдання розв'язку задачі Коші для жорсткого диференціального рівняння [4, 8]. Одним з можливих варіантів розв'язання такої задачі є використання математичного апарату диференціально-тейлорівських (ДТ) перетворень [5].

Розв'язок задачі Коші для жорсткого диференційного рівняння здійснюється неявним числовим методом інтегрування звичайних диференційних рівнянь шляхом розробки неявної обчислювальної схеми [8]. Зазначені схеми характеризуються порядком точності та областю стійкості, з аналізу яких робиться висновок про їх результуючу збіжність [6, 8]. Бажаною властивістю такої обчислювальної схеми є її А-стійкість [8].

Питання розробки неявних обчислювальних схем на основі ДТ-перетворень (далі ДТ-схеми) розглянуті в [2], де показано, що серед усіх ДТ-схем немає А-стійких з порядком точності вище 2-го. Зараз розроблений новий вид ДТ-перетворень – зміщені ДТ-перетворення, який . Цей вид ДТ-перетворень, як стверджується у [1], дозволяє розробляти неявні ДТ-схеми з підвищеною точністю за рахунок взаємного компенсування відкинутих відрізків ряду Тейлора у прямій і зворотній моделях. У відомій літературі немає досліджень щодо стійкості і, відповідно, збіжності зміщених ДТ-схем.

### Постановка задачі

Практика рішення диференціальних рівнянь методом ДТ-перетворень показує, що область застосування цього методу перебиває область застосування математично класичних числових методів [7]. Серед традиційних числових методів розв'язку задачі Коші є А-стійки з будь яким порядком точності – це неявні методи Рунге-Кутта оптимального порядку [8]. Можливим шляхом створення А-стійких ДТ-схем з порядком точності вище 2-го може бути використання відносно нового виду ДТ-перетворень – зміщених ДТ-перетворень. Виходячи з вищевикладеного, *метою статті* є дослідження апроксимації, стійкості і, як наслідок, збіжності обчислювальних схем розв'язку задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь, що розроблені на основі зміщених ДТ-перетворень.

## Вирішення задачі

Задача Коші для звичайного диференційного рівняння записується у вигляді:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u, t), \quad u(0) = u_0, \quad t > 0, \quad (1)$$

де  $u = u(t)$  – невідома функція, яку необхідно знайти;  $u_0$  – початкова умова;  $t$  – незалежна змінна;  $f(u, t)$  – задана функція, яка задовольняє умові Липшиця [6, 8].

Припустимо, що розв’язок задачі (1) існує, він єдиний та відповідає необхідним властивостям гладкості.

ДТ-перетвореннями називають функціональні перетворення вигляду [1, 5]:

$$Z(k) = \frac{H^k}{k!} \left[ \frac{d^k z(t)}{dt^k} \right]_{t_*}, \quad z(t) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left( \frac{t-t_*}{H} \right)^k Z(k), \quad (2)$$

де  $t$  – аргумент, за яким проводиться перетворення;  $t_*$  – значення аргументу, при якому проводиться перетворення;  $k$  – цілочисловий аргумент  $k = 0, 1, \dots$ ;  $Z(k)$  – дискретна функція за аргументом  $k$ ;  $H$  – відрізок аргументу, на якому розглядається функція  $z(t)$ .

Вирази (2) визначають пряме та обернене перетворення. Диференціальне зображення  $Z(k)$  прийнято називати диференціальним спектром або Т-спектром, а значення функції  $Z(k)$  за конкретних значень аргументу  $k$  – дискретами ДТ-спектру або Т-дискретами.

Обчислювальна схема числового розв’язку задачі (1) на основі зміщених ДТ-перетворень – це ітераційна обчислювальна схема в якій значення функції у  $n+1$ -й точці розраховується так, щоб сума відрізка ряду Тейлора, обчисленого в ній, дорівнювала на середині інтервалу  $[t_n, t_{n+1}]$  сумі відрізка ряду Тейлора, обчисленого в попередній точці  $n$  [1]

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}} \left( \frac{1}{2} \right)^k Y_n(k) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left( -\frac{1}{2} \right)^k Y_{n+1}(k), \quad (3)$$

де  $Y_n(k), Y_{n+1}(k)$  – диференціальний спектр рішення задачі (1) у відповідних точках обчислювальної сітки  $\omega_n = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}$  з кроком  $\tau = t_{n+1} - t_n$ ;  $k_{\max}$  – максимальний номер дискрети ДТ-спектру, що бере участь у відновленні.

Використовуючи (3), можна послідовно (починаючи з  $n = 0$ ) знайти розв’язок (1), тобто визначити на  $\omega_n$  значення сіткової функції  $y_n$ , яке приймається за наближене значення шуканої функції  $u(t_n) \approx y_n$ .

Розпишемо дискрети диференційного спектру в (3), використовуючи пряме перетворення з (2), та введемо заміну  $k_{\max} = m$  :

$$\sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} y_n^{(k)} = \sum_{k=0}^m \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} y_{n+1}^{(k)}. \quad (4)$$

За аналогією з традиційними числовими методами [6, 8] визначимо похибку апроксимації або нев'язку зміщеної ДТ-схеми, яка є результатом підстановки точного розв'язку задачі (1) –  $u_n = u(t_n)$  в обчислювальну схему (4). Для цього зробимо підстановку у вигляді [6]

$$u_{n+1} = \sum_{s=0}^p \frac{\tau^s}{s!} u_n^{(s)} \Rightarrow u_{n+1}^{(k)} = \sum_{s=0}^{p-k} \frac{\tau^s}{s!} u_n^{(k+s)}, \quad p > m.$$

З урахуванням вищезазначеного похибка апроксимації зміщеної ДТ-схеми буде мати вигляд (множник  $1/\tau$  з'являється за рахунок приведення обчислювальної схеми (4) до канонічного вигляду числового методу відповідно до [6]):

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \frac{1}{\tau} \left( \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} u_n^{(k)} - \sum_{k=0}^m \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} u_{n+1}^{(k)} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Psi_n = \frac{1}{\tau} \left( \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} u_n^{(k)} - \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^{p-k} \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} \frac{\tau^s}{s!} u_n^{(k+s)} \right] \right), \end{aligned}$$

використовуючи підстановку  $s + k = d \Rightarrow s = d - k$ , отримаємо

$$\Psi_n = \frac{1}{\tau} \left( \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} u_n^{(k)} - \sum_{k=0}^m \sum_{d=k}^p \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} \frac{\tau^{d-k}}{(d-k)!} u_n^{(d)} \right] \right),$$

змінимо порядок у подвійній сумі

$$\Psi_n = \frac{1}{\tau} \left( \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!} u_n^{(k)} - \sum_{d=0}^p \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} \sum_{k=0}^{\min(d,m)} \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} \right] \right),$$

$$\text{де } \min(d, m) = \begin{cases} d, & \text{при } d < m \\ m, & \text{при } d > m \end{cases},$$

змінимо індекс у першій сумі з  $k$  на  $d$ , тоді

$$\Psi_n = \frac{1}{\tau} \left( \sum_{d=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^d \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} - \sum_{d=0}^p \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} \sum_{k=0}^{\min(d,m)} \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} \right] \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n = \frac{1}{\tau} \left( \sum_{d=0}^m \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} \right) \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^d - \sum_{k=0}^d \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} \right] \right\} -$$

$$- \sum_{d=m+1}^p \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} \sum_{k=0}^m \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} \right].$$

Враховуючи властивості біноміальних коефіцієнтів [3]

$$\sum_{k=0}^d \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} \right] = \left( \frac{1}{2} \right)^d,$$

отримаємо

$$\psi_n = \frac{1}{\tau} \left( \sum_{d=0}^m \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} \right) \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^d - \left( \frac{1}{2} \right)^d \right\} - \sum_{d=m+1}^p \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} \sum_{k=0}^m \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n = -\frac{1}{\tau} \left( \sum_{d=m+1}^p \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} \sum_{k=0}^m \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} \right] \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n \approx -\frac{1}{\tau} \left( \sum_{d=m+1}^{p+2} \frac{\tau^d}{d!} u_n^{(d)} \sum_{k=0}^m \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} \right] \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n \approx \begin{cases} -\frac{1}{\tau} \frac{1}{2^m} \frac{\tau^{m+1}}{(m+1)!} u_n^{(m+1)}, & \text{якщо } m - \text{парне} \\ -\frac{1}{\tau} \frac{m+1}{2^{m+1}} \frac{\tau^{m+2}}{(m+2)!} u_n^{(m+2)}, & \text{якщо } m - \text{непарне} \end{cases}. \quad (5)$$

Аналіз залежності (5), показує, що зміщені ДТ-схеми (3) апроксимують вихідне диференційне рівняння (1) і мають не гірший за  $k_{\max}$ -й порядок апроксимації

$$\psi_n = \begin{cases} O\left(\tau^{k_{\max}}\right), & \text{якщо } k_{\max} - \text{парне} \\ O\left(\tau^{k_{\max}+1}\right), & \text{якщо } k_{\max} - \text{непарне} \end{cases}. \quad (6)$$

Після дослідження апроксимації перейдемо до розгляду питань стійкості зміщених ДТ-схем розв'язку задачі Коші (3). Для цього знайдемо області їх стійкості шляхом дослідження розв'язку модельного диференційного рівняння [6, 8]

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad (7)$$

де  $\lambda$  – довільне комплексне число.

Застосуємо зміщену ДТ-схему (3) до модельного рівняння (7)

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} y_{n+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} y_n. \quad (8)$$

Знайдемо розв'язок (8) у вигляді  $y_n = q^n$  [6, 8]

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\mu^k}{k!} q^{n+1} &= \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\mu^k}{k!} q^n \Rightarrow \\ \Rightarrow q &= \frac{\sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\mu^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\mu^k}{k!}}. \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\mu = \tau\lambda$  – комплексний параметр.

Рівняння (9) – це характеристичне рівняння зміщеної ДТ-схеми з якого можна визначити область стійкості методу зміщених ДТ-перетворень рішення задачі Коші для звичайного диференційного рівняння. Область стійкості числового методу визначається як частина комплексної площини  $\mu = \text{Re}\{\mu\} + j \text{Im}\{\mu\}$ , на якій виконується умова [6, 8]

$$|q| < 1. \quad (10)$$

Для отримання області стійкості відповідно до (9), достатньо зробити підстановку  $q = \exp\{j\phi\}$ , яка є граничною до умови (10), та скористатися будь-яким середовищем математичного моделювання. Результати наведено на рис.1, де область стійкості зображена зафарбованою.

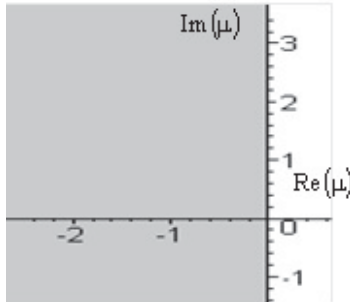


Рис. 1. Область стійкості обчислювальних схем розв'язку задачі Коші на основі зміщених ДТ перетворень

Аналіз рис. 1 показує, що область стійкості обчислювальних схем на основі зміщених ДТ-перетворень (3) включає всю ліву напівплощину  $\text{Re}(\mu) < 0$ , тобто вони є А-стійкими [6, 8].

**Приклад.** Розв'яжемо задачу Коші для жорсткого нелінійного звичайного диференціального рівняння хімічної реакції [4]

$$\begin{cases} u_1' = -0,013u_1 - 10^3 u_1 u_3 \\ u_2' = -2,5 \cdot 10^3 u_2 u_3 \\ u_3' = -0,013u_1 - 10^3 u_1 u_3 - 2500u_2 u_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 1 \\ u_3(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(10) = ? \\ u_2(10) = ? \\ u_3(10) = ? \end{cases}. \quad (11)$$

Зміщена ДТ-схема (3) для задачі (11) з врахуванням властивостей ДТ-перетворень [6] запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} t_n = nH, \quad Y_{1,n=0}(0) = 1, \quad Y_{2,n=0}(0) = 1, \quad Y_{3,n=0}(0) = 1 \\ Y_{1,n}(k+1) = \frac{H}{k+1} (-0,013Y_{1,n}(k) - 10^3 Y_{1,n}(k) * Y_{3,n}(k)) \\ Y_{2,n}(k+1) = \frac{H}{k+1} (-2,5 \cdot 10^3 Y_{2,n}(k) * Y_{3,n}(k)) \\ Y_{3,n}(k+1) = \frac{H}{k+1} \times (-0,013Y_{1,n}(k) - 10^3 Y_{1,n}(k) * Y_{3,n}(k) - 2500Y_{2,n}(k) * Y_{3,n}(k)) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k Y_{1,n}(k) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k Y_{1,n+1}(k) \\ \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k Y_{2,n}(k) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k Y_{2,n+1}(k) \\ \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k Y_{3,n}(k) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k Y_{3,n+1}(k) \end{cases} \quad (13)$$

де  $Y_{1,n}(k), Y_{2,n}(k), Y_{3,n}(k)$  – диференціальний спектр рішення задачі (10) у точці  $n$ ;  $*$  – позначення операцій алгебраїчної згортки, наприклад

$$S(k) * Q(k) = \sum_{l=0}^k S(k-l) \cdot Q(l).$$

Використовуючи (12) та (13) можна послідовно (починаючи з  $n=0$ ) знайти розв'язок задачі (11), при цьому нелінійне алгебраїчне рівняння (13) на кожному кроці необхідно розв'язувати, наприклад, методом простої ітерації. Результати розрахунків наведені в табл. 1.

Таблиця 1.

Результати розрахунку зміщеною ДТ-схемою

$k_{\max}$	$H$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
2	$2,5 \cdot 10^{-4}$	0,877546377729103	0,12241598164966	$-3,76406212784041 \cdot 10^{-5}$
	$1 \cdot 10^{-4}$	0,877546366915849	0,122415992466651	$-3,76406175172835 \cdot 10^{-5}$
8	$2,5 \cdot 10^{-4}$	0,877546367302521	0,122415992079861	$-3,76406176517729 \cdot 10^{-5}$
	$1 \cdot 10^{-4}$	0,877546366791355	0,122415992591173	$-3,7640617473986 \cdot 10^{-5}$

Аналіз даних табл.1 показує, що зміщена ДТ-схема залишається стійкою при зміні як порядку її точності, так і кроку обчислювальної сітки. Тобто наведений приклад наочно ілюструє апроксимацію та стійкість, і, як наслідок, збіжність обчислювальної схеми розв'язку задачі Коші для жорсткого, нелінійного диференційного рівняння, що розроблена на основі зміщених ДТ-перетворень.

### **Висновки**

Результати дослідження обчислювальних схем розв'язку задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь, що розроблені на основі зміщених ДТ-перетворень, доводять, що зміщені ДТ-схеми апроксимують вихідне диференціальне рівняння з порядком апроксимації, не гіршим ніж  $k_{\max}$  (6), є А-стійкими і тому збігаються.

Таким чином, у статті викладено дослідження апроксимації, стійкості і, як наслідок, збіжності обчислювальних схем розв'язку задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь, що розроблені на основі зміщених диференціально-тейлорівських перетворень. Наведені результати є чітким теоретичним обґрунтуванням можливості використання методу зміщених диференціально-тейлорівських перетворень для розв'язку диференційних рівнянь.

1. Баранов Г.Л., Баранов В.Л., Жуков І.А., Алексеева Л.О. Диференціальні перетворення для комп'ютерного моделювання: Навч. посіб. – К.: Нац. ав. ун., 2002. – 106 с.
2. Коваль Н.В., Семагина Э.П. Об устойчивости алгоритмов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциального преобразования // Теоретическая электротехника. – 1985. – Вып. 39. – С. 108–118.
3. Корн Г., Корн К. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
4. Петренко А.И., Смирнов А.М., Гумен Б.Н. Сравнительное исследование неявных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений при решении модельных задач // Электронное моделирование. – 1981. – № 3. – С. 8–16.
5. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наукова думка, 1986. – 159 с.
6. Самарський А. А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.– М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
7. Семагина Э.П. Об эффективности Т-преобразований при численном решении дифференциальных уравнений // Электронное моделирование. – 1981. – № 4. – С. 103–104.
8. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979.

*Поступила 7.10.2013р.*