1. A.Mitra, S. Takei, Y. B. Kim, and A. J. Millis, Phys. Rev. Lett. 97, 236808 (2006).
2. A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. 59, 1 (1987).
3. S. Iwai, M. Ono, A. Maeda, H. Matsuzaki, H. Kishida, H. Okamoto, and Y. Tokura, Phys. Rev. Lett. 91, 057401 (2003).
4. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. 80, 885 (2008).
5. J. Hubbard, Proc. R. Soc. Lond. A 276, 238 (1963).
6. P. Weiss, J. Phys. Theor. Appl. 6, 661 (1907).
7. W. Metzner and D. Vollhardt, Phys. Rev. Lett. 62, 324 (1989).
8. J. K. Freericks, V. M. Turkowski, and V. Zlati, Phys. Rev. Lett. 97, 266408 (2006).
9. M. Eckstein, M. Kollar, and P. Werner, Phys. Rev. Lett. 103, 056403 (2009).
10. E. Gull, A. J. Millis, A. I. Lichtenstein, A. N. Rubtsov, M. Troyer, and P.Werner, Rev. Mod. Phys. 83, 349 (2011).
11. M. Pottho, Eur. Phys. J. B 32, 429 (2003).
12. E. Arrigoni, M. Knap, and W. von der Linden, Phys. Rev. Lett. 110, 086403 (2013).
13. M. Balzer and M. Potthof, Phys. Rev. B 83, 195132 (2011).
14. G. Baym and L. P. Kadano_, Phys. Rev. 124, 287 (1961).
15. M. Wagner, Phys. Rev. B 44, 6104 (1991).

Поступила 16.10.2013р.

УДК 681.142 + 519.4

О. Д. Глухов**,** м. Київ

ЕКСПАНДЕРИ, СИЛЬНІ ЕКСПАНДЕРИ ТА КВАЗІВИПАДКОВІ ГРАФИ

This paper investigates the connectivity properties of quasi-random graphs based on expanders and strong expanders.

В данной работе исследована связность квазислучайных графов на базе экспандеров и сильних экспандеров.

Квазівипадкові графи (частково-випадкові графи) описують системи, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків [1-3]. Нехай G - звичайний граф з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0| = n$, $|G^1| = m$, квазівипадковим графом на основі графа G називається граф $G(p)$ з множиною $(G(p))^0 = G^0$ вершин і з випадковою множиною $U = (G(p))^1$, ребер для якого виконуються умови: $Prob\,(u \in U) = p$ при $u \in (G)^1$ і $Prob\,(u \in U) = 0$ при $u \notin (G)^1$.

Величину $\lambda = mq,\ q = 1 - p$ будемо називати **декрементом** квазівипадкового графа. Очевидно, що декремент це є математичне сподівання величини $|U|\backslash m$, тобто числа розривів зв'язків. В загальному випадку декремент розглядатиметься як деяка функція: $\lambda = \lambda(m)$**;** якщо $\lambda = \lambda(m)$ є константою, то граф *G(p)* називаєтьтся квазівипадковим графом пуассонівського типу[3]. **Пороговим декрементом** називається найбільше значення декременту, при якому граф *G(p)* залишається зв'язним з ймовірністю $1-o(1)$.. В даній роботі будуть розглядатися квазівипадкові графи $G(p)$ на основі експандерів а також т.зв. сильних експандерів.

Експандери (збільшувачі) знаходять широке застосування в обчислювальній техніці, теорії інформації, теорії кодування та інших галузях науки і техніки[4]. Нагадаємо деякі означення. Нехай - G граф H - деякий його підграф. Позначимо через $E(H)$ множину усіх ребер графа G, інцидентних вершинам під графа H, а через $E^*(H) = E(H) \setminus H^1$ кограницю цього підграфа , тобто множину ребер графа G тільки один кінець котрих інцидентний деякій вершині під графа H. Відповідно степенню під графа H. будемо називати число $\rho(H,G) = |E^*(H)|$ ребер його кограниці. Для d-регулярного граф G очевидно, що $|E(H)| = d\,|H^0| - |H^1|$, а $|E^*(H)| = d\,|H^0| - 2\,|H^1|$.

Граф G - називається α-експандером для деякого α, $0 < \alpha < 1$, якщо для кожного $H \subset G$, $|H^0| \le n/2$ має місце нерівність: $\rho(H,G) \ge \alpha\,|E(H)|$; для d-регулярного графа можна записати: $\rho(H,G) \ge \alpha^* d\,|H^0|$, де . $\alpha/2 \le \alpha^* \le \alpha$, якщо крім того, $\alpha^* d \ge 1$, тобто виконана умова: $\rho(H,G) \ge \left|H^0\right|$, то граф G - будемо називати **сильним експандером**.

В даній роботі будуть розглядатися квазівипадкові графи на основі експандерів та сильних експандерів, буде встановлено наступні властивості таких графів:

1) у квазівипадковому графі $G(p)$ на основі експандера з обмеженою степінню вершин, де p - деяка стала, не залежна від числа n з ймовірністю $1-o(1)$ існує зв'язна компонента розміром не менше половини вершин графа;

2) квазівипадковий граф $G(p)$ на основі сильного експандера, де $p = 1 - \beta/\sqrt{n}$, буде зв'язним з ймовірністю $1-o(1)$, тобто пороговий декремент такого графа буде не менше $\beta\sqrt{n}$, де $\beta > 0$ - деяка константа.

Розглянемо спочатку d-регулярний α-експандер, з обмеженою степінню d вершин. Відомо, що такі експандери існують вже для $d \ge 3$ (для певного α, яке залежить від d). Ми будемо вважати, що у таких графів G має місце нерівність $\rho(H,G) \ge \alpha d\,|H^0|$ для кожного його підграфа

$H \subset G,\ |H^0| \le n/2$.

Лема 1. Якщо G - є d-регулярний α-експандер, $U \subseteq G^1$ і у графі $G \setminus U$ усі зв'язні компоненти містять не більше, ніж $n/2$ вершин, то $|U| \ge \alpha m$.

Доведення.

Нехай $G \setminus U = \sum_{k=1}^{s} H_k$, де $\{H_k\}_{k=1}^{s}$, $|H_k| \le n/2$, - множина зв'язних компонент графа $G \setminus U$. Маємо наступні нерівності:

$$\rho(H_k) \ge \alpha d\, |H_k^0|,$$

$$2|U| = \sum_{k=1}^{s} \rho(H_k) \ge \sum_{k=1}^{s} \alpha d\, |H_k^0| = \alpha d n ,$$

звідки і випливає твердження леми.

Теорема 1. Якщо $G(p)$ є квазівипадковий граф на основі d-регулярного α-експандера G і $p > 1 - \alpha/e$, то граф $G(p)$ з ймовірністю $1 - o(1)$ містить зв'язну компоненту, яка має більше, ніж $n/2$ вершин.

Доведення.

Враховуючи лему 1 достатньо довести, що з ймовірністю $1 - o(1)$ для кожного $U \subseteq G^1$, $|U| \ge \alpha m$ $P = \Pr ob(U \cap G^1(p) \ne \varnothing) = 1 - o(1)$. Для цього покажемо, що $Q = 1 - P = o(1)$. Дійсно, маємо наступні оцінки:

$Q \le M[|\{U : U \subseteq G^1, |U| \ge \alpha m, U \cap G^1(p) = \varnothing\}|]$, а отже

$Q \le \sum_{k \ge \alpha m} \binom{m}{k} q^k$, звідки, враховуючи, що $\binom{m}{k} \le \left(\frac{em}{k}\right)^k$ отримуємо:

$$Q \le \sum_{k \ge \alpha m} \left(\frac{emq}{k}\right)^k \le \sum_{k \ge \alpha m} \left(\frac{eq}{\alpha}\right)^k .$$

Але за умовами $p > 1 - \alpha/e$, а отже $qe/\alpha = \varepsilon < 1$ і ми отримуємо оцінку $Q < \varepsilon^{\alpha m}(1-\varepsilon)$, а отже $Q = o(1)$, звідки випливає твердження теореми.

Розглянемо тепер сильний регулярний експандер на n вершинах зі степінню вершин $d = const$. Ми не будемо тут доводити існування сильних експандерів, зауважимо тільки, цей факт є очевидним, принаймні, якщо допустити в графі кратні ребра.

Для оцінки ймовірності зв'язності квазівипадкового графа на основі сильного експандера, ми будемо використовувати не оцінку числа розрізів, як раніше, а оцінку числа $\xi(k)$ його зв'язних k – підграфів.

Лема 2. Якщо G - є d-регулярний граф, $d \ge 3$, то $\xi(k) < nd^{k-1}(k-1)!/k$.

Доведення.

Побудуємо ін'єктивне відображення множини його $k-$ підграфів в множину $k-$дерев. Для цього перенумеруємо множину вершин даного графа числами 1,2,…,n і кожному $k-$підграфу поставимо у відповідність дерево наступним чином. Спочатку виберемо в підграфі вершину з найменшим номером, далі, якщо вже побудовано поточне дерево T_j, $j < k$, , то виберемо вершину x_{j+1} з найменшим номером, яка не належить цьому дереву, але яка з'єднана ребром $u_j = (x_{j+1}, x_s)$ з однією з його вершин x_s . Якщо таких ребер декілька, то вибираємо серед них те, для якого число x_s найменше і покладемо: $T^0_{j+1} = T^0_j + \{x_{j+1}\}$, $T^1_{j+1} = T^1_j + (x_{j+1}, x_s)$.

Тепер оцінимо число $k-$дерев графа G. Будь-яке дерево можна побудувати , вибравши початкову вершину і приєднуючи до поточного дерева по одному ребру. Оскільки дерево T_j не завжди є породженим підграфом даного графа, то для числа ребер його кограниці маємо нерівність $|E^*(T_j)| \le d|T^0| - 2|H^1| = dj - 2(j-1) = (d-2)j + 2$. Таким чином, число різних $k-$дерев, побудованих починаючи з даної вершини графа G не перевищує наступної величини:

$$nd(2d-2)...(d(k-1)-2k+4) < nd^{k-1}(k-1)!\,.$$

Враховуючи, що кожне з $k-$дерево можна побудувати, починаючи з будь-якої його вершини, отримуємо твердження леми.

Теорема 2. Пороговий декремент квазівипадкового графа $G(p)$ на основі сильного d-регулярного експандера не менше $\beta\sqrt{n}$, де $\beta = 1/d$.

Доведення.

Нехай $G(p)$ - квазівипадковий граф на на основі сильного d-регулярного експандера не менше , де $p = 1/(d\sqrt{n})$. Зауважимо, що для зв'язністної $g(k)$ функції графа G маємо наступну нерівність: $g(k) \ge \max\{3, k\}$. Припустимо, що граф $G(p)$ є незв'язним, тоді він має компоненту зв'язності порядок якої не більше $n/2$.

Для ймовірності Q існування такої зв'язної компоненти маємо наступну нерівність:

$$Q \le S = \sum_{1 \le k \le n/2} \xi_k\, q^{g(k)}\,.$$

Розіб'ємо дану суму наступним чином: $S = S_1 + S_2 + S_3$, де:

$$S_1 \le \sum_{1 \le k \le 4} \xi_k\, q^3\,, \quad S_2 = \sum_{4 < k \le \sqrt{n}} \xi_k\, q^k\,, \quad S_3 = \sum_{\sqrt{n} < k \le n/2} \xi_k\, q^k\,.$$

Оцінимо кожну з цих сум окремо.

1) Оскільки для $1 \le k \le 4$ маємо $\xi(k) \le c_1 n$, $q^3 = \beta^3 n^{-3/2}$, а отже $S_1 = o(1)$.

2) З леми 2 та формули Стірлінга випливає наступна оцінка для числа $\xi(k)$ його зв'язних $k-$підграфів: $\xi(k) < n\left(\frac{dk}{e}\right)^k$.

$$S_2 < \sum_{4<k\le\sqrt{n}} \xi_k q^k < n \sum_{4<k\le\sqrt{n}} \left(\frac{dk\beta}{e\sqrt{n}}\right)^k = n \sum_{4<k\le\sqrt{n}} \left(\frac{k}{e\sqrt{n}}\right)^k .$$

Неважко перевірити, що функція $f(k) = \left(\frac{k}{e\sqrt{n}}\right)^k$ спадає на інтервалі $4 \le k \le \sqrt{n}$, а тому вірна наступна оцінка: $S_2 < n \sum_{4<k\le\sqrt{n}} \left(\frac{k}{e\sqrt{n}}\right)^k < n\sqrt{n}\left(\frac{4}{e\sqrt{n}}\right)^4 = \frac{256}{e^4\sqrt{n}}$, а отже $S_2 = o(1)$.

3) Для випадку $\sqrt{n} < k \le n/2$ візьмемо тривіальну оцінку: $\xi(k) \le \binom{n}{k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k$.

Маємо: $S_3 < \sum_{\sqrt{n}<k\le n/2} \left(\frac{en\beta}{k\sqrt{n}}\right)^k = \sum_{\sqrt{n}<k\le n/2} \left(\frac{e\beta\sqrt{n}}{k}\right)^k < \sum_{\sqrt{n}<k\le n/2} \left(\frac{e}{d}\right)^k$.

Враховуючи, що $e/d < 1$, отримуємо наступну оцінку:

$S_3 < \sum_{\sqrt{n}<k\le n/2} \left(\frac{e}{d}\right)^k < c_1\left(\frac{e}{d}\right)^{\sqrt{n}}$. Оже $S_3 = o(1)$.

Таким чином, $S = o(1)$, звідки і випливає твердження теореми.

1. *Глухов О.Д., Коростіль Ю.М.* Структурна безпека складних дискретних систем при випадкових відмовах. - Моделювання та інформаційні технології. Зб. наукових праць ІПМЕ НАНУ, вип. 27, Київ, 2004, с. 91-95.

2. *Глухов О.Д.* Деякі зв'язністні інваріанти частково-випадкових графів-Моделювання та інформаційні технології. Зб. наукових праць ІПМЕ НАНУ, вип.46, Київ, 2008, с. 14-17.

3. *Глухов О.Д.* Про зв'язність планарних pr- графів пуассонівського типу// II Український математичний конгрес, 27-29 серпня 2009 р.: тези доп. – К., 2009. – режим доступу: http://www.imath. kiev.ua/~congress2009.

4. *Diestel R.* Graph Theor //NewYork : Springer-Verlag, 2000.-322p.

Поступила 30.9.2013р.