

Реляційні бази даних	Кількість
Національний університет «Львівська політехніка»	42
Харківський національний університет радіоелектроніки	
Тернопільський національний університет	27
Хмарні обчислення	
Національний технічний університет КПІ	45
Національний аерокосмічний університет	32
Національний університет «Львівська політехніка»	28

Прогнозування здійснювалось на 2012 р., отримані прогнознi кількостi статей порівнювалися з реальною кількістю статей за цей рік. Відхилення прогнозу – 27%.

Висновки

Дослідження присвячене вивченню можливостей виділення наукових шкіл за аналізом публікацій та прогнозуванню їх розвитку. Результати доцільно використовувати для прогнозування актуальності наукових напрямів.

1. *Mani I., Bloedorn E.* Summarizing Similarities and Differences Among Related Documents // Information Retrieval. – 1999. – 1, № 1. – P. 35–67.
2. *Radev D. R., McKeown K. R.* Generating Natural Language Summaries from Multiple Online Sources // Computational Linguistics. – 1998. – 24, № 3. – P. 469–500.
3. *Ноза Р.* Метод формування наукових шкіл на основі аналізу елементів публікацій // Математичні машини і системи, 2013, No 4. – Київ. – С. 107 – 113

Поступила 30.9.2013р.

УДК 517.9+534.1

П.Я. Пукач, А.В. Чабан, м. Львів

МАЛІ ПОПЕРЕ ЧНІ КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ ДИСИПАТИВНИХ СИЛ

Abstract. Interdisciplinary approach to the modeling of elastic vibrations in isotropic nonlinear medium as an example of the membrane is used. Mechanical equations of an object without any decomposition processes based solely on the energy approaches and theories of mechanical fields in continuum media are formed. The adequacy of received model of the real prototype is confirmed.

Keywords: Ostrogradskii-Hamilton principle, extended Lagrangian, Galerkin method.

Вступ.

Актуальність проблеми. Основною проблемою сучасного математичного моделювання є відповідність моделі її реальному прототипу. Оскільки енергетичні стани технічних об'єктів описуються зазвичай нелінійними функціональними залежностями, то під час побудови цих моделей згадані залежності потрібно враховувати. Досвід показує, що не завжди, моделюючи реальні фізичні об'єкти, можна нелінійні залежності розглядати як лінійні на короткому інтервалі, тобто здійснювати лінеаризацію. Особливо це стосується дослідження відповідальних об'єктів. Під час формування рівнянь стану об'єкта використовують фундаментальні закони, залежності та методи прикладної фізики, які свого часу були отримані та строго обґрунтовані з математичної точки зору відомими вченими. Натомість долучання нелінійних доданків до відомих рівнянь, зокрема рівнянь математичної фізики з розподіленими параметрами, може поставити під сумнів коректність розв'язків задачі, яка описується цими рівняннями. На жаль, відомі дотепер методи математичного моделювання перехідних процесів у динамічних системах не дають змоги в загальному випадку ефективно розв'язати цю проблему через складність математичного апарату. Тому тут доцільно використовувати локальні підходи до задач, у яких нелінійні процеси описуються подібними функціональними залежностями. Власне розв'язанню однієї з таких проблем і присвячена ця праця. У якості прикладу тут використано пружно-дисипативну металічну мембрану, яка коливається в нелінійному ізотропному середовищі.

Одержання рівняння малих нелінійних поперечних коливань мембрани. Аналіз малих поперечних коливань в'язко-пружного плоского ізотропного середовища займає важливе місце як в прикладній механіці, так і в теорії математичного моделювання фізико-механічних процесів. Адже в промисловості досить часто згадана проблема виникає, наприклад, при дослідженні коливань проводів повітряних ліній (в одновимірному варіанті), коливань стінок оливних баків в потужних силових трансформаторах, коливань різноманітних платформ тощо. Подібного роду процеси описуються рівняннями малих поперечних коливань з урахуванням зовнішньої та внутрішньої дисипації механічної енергії [1, 2, 3]. Лінійний аналог цього рівняння отримано в [1, с. 33] на підставі модифікованого інтегрального варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона з використанням розширеної функції Лагранжа. Ми ж пропонуємо ускладнити математичну модель пружного середовища, одержану в [1], нелінійними доданками. Запишемо розширену модифіковану функцію Лагранжа [4], елементами якої є нелінійні поверхневі густини енергій [1]

$$L = T - P + \Phi - D, \quad (1)$$

де T , P – поверхневі густини кінетичної та потенціальної енергій коливальної системи відповідно, Φ – поверхневі густини зовнішньої та внутрішньої дисипації енергії, D – поверхнева густина енергії активних і пасивних сил непотенціального характеру, що діють на систему ззовні. У нашому випадку

елементи з виразу (1) виглядають так: $T = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$, $P = \frac{N_l}{2} (\nabla u)^2$, $D \equiv 0$,

$$\Phi = \int_0^t \left(\nu \int_0^l \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t} \partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\partial \nabla u}{\partial t} \right)^2 \right) d\tau, \text{ де } u(x, y, t) - \text{амплітуда відхилен-}$$

ня від положення рівноваги точок мембрани у момент часу t , $p > 2$, ρ_S – поверхнева густина прямокутної мембрани з фіксованим периметром l , N_l – рівномірно розподілена за периметром мембрани сила, що спричинює початковий її натяг, ν , ξ – коефіцієнти зовнішньої та внутрішньої дисипацій плоского середовища відповідно. На відміну від лінійного випадку зазначимо, що неконсервативний несилловий нелінійний лагранжیان (1) отримано за умови, що густина кінетичної коенергії системи [5] визначається так:

$$\tilde{T} = \int_0^{q_t} \rho_S |q_t|^{p-2} q_t dq_t, \quad q_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ де } \rho_S - \text{стала, } \tilde{T} - \text{поверхнева густина кінетичної коенергії середовища, яка узагальнює розглянутий у роботі [1] лінійний випадок } p = 2. \text{ Відзначимо також, що } D \equiv 0, \text{ оскільки розглядатимемо вільні коливання мембрани, тобто енергія зовнішніх непотенціальних сил дорівнює нулю. Приймаючи до уваги згадане, маємо:}$$

Підставимо вираз (2) у рівняння Ейлера [1], з якого знаходимо рівняння руху мембрани [1, с.18]:

$$L = \frac{\rho_S}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{N_l}{2} (\nabla u)^2 + \int_0^t \left(\nu \int_0^l \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t} \partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\xi}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right)^2 \right) \right) d\tau. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right)} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Звідки будемо мати

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} = N_l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} = N_l \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)} = \xi \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right)} = \xi \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t}, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)} = -\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6)$$

Підставляючи вирази (4) – (6) у рівняння (3), отримаємо рівняння руху мембрани в нелінійному ізотропному середовищі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\xi}{\rho_s} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} \right) - \frac{v}{\rho_s} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{N_l}{\rho_s}}. \quad (7)$$

Розглядатимемо нелінійні коливання мембрани у випадку початкового амплітудного зміщення та нульової початкової швидкості точок мембрани. Крім того, будемо розглядати випадок жорстко закріпленої по периметру мембрани. Вказані міркування приводять до необхідності розглядати для рівняння (6) в області $Q_T = \Omega \times [0, T]$, Ω – прямокутник в площині Oxy з периметром l змішану задачу з початковими умовами

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

та крайовими умовами

$$u(x, y, t) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

де $\partial\Omega$ - межа прямокутника Ω .

Використання метода Гальоркіна для дослідження існування та єдиності розв'язку задачі про малі поперечні коливання мембрани з урахуванням нелінійних дисипативних сил. Змішана задача (7), (8), (9) є задачею для нелінійного еволюційного рівняння третього порядку. Оскільки для цієї задачі не існує жодних аналітичних методів знаходження розв'язку, то для її розв'язування необхідно застосовувати чисельні методи. Наведемо методіку якісного дослідження розв'язку в математичній моделі малих поперечних нелінійних коливань мембрани, яка дозволяє отримати результати існування та єдиності розв'язку задачі (7), (8), (9). Після обґрунтування коректності питання вибору того чи іншого чисельного методу є принциповим лише з точки зору ефективності самого методу. Зауважимо також, що у роботі [6] аналогічні питання розглянуто для задачі, яка моделює нелінійні коливання провідів повітряних ліній. Нехай всюди

нижче p' – число, спряжене до p , тобто $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Узагальненим розв'язком задачі (7), (8), (9) в області Q_T називаємо функцію $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega)) \cap L^p((0, T); L^p(\Omega))$, яка задовольняє умови (8), (9) та інтегральну тотожність

$$\int_{Q_\tau} \left[-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\xi}{\rho_S} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy dt + \int_{Q_\tau} \frac{v}{\rho_S} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t} v dx dy dt + \int_{\Omega} \frac{\partial u(x, y, \tau)}{\partial t} v(x, y, \tau) dx dy = 0 \quad (10)$$

для довільного $\tau \in (0, T]$ і для довільної функції $v \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega)) \cap L^p((0, T); L^p(\Omega))$ такої, що $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$.

Основний результат якісного дослідження розв'язку наступний: при виконанні умови $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (7), (8), (9) в Q_T .

Наведемо методику отримання основного результату. Для обґрунтування існування розв'язку задачі (7), (8), (9) використаємо схему [7]. Розглянемо в області Q_T послідовність гальоркінських наближень

$$u^N(x, y, t) = \sum_{k=1}^N C_k^N(t) \omega_k(x, y), \quad N = 1, 2, \dots, \{\omega_k\} - \text{ортонормована в } L^2(\Omega) \text{ система лінійно незалежних елементів простору } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \text{ таких, що лінійні комбінації } \{\omega_k\} \text{ щільні в } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega). \text{ При цьому функції } C_k^N \text{ визначаємо як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь}$$

тема лінійно незалежних елементів простору $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ таких, що лінійні комбінації $\{\omega_k\}$ щільні в $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. При цьому функції C_k^N визначаємо як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} + \frac{v}{\rho_S} \left| \frac{\partial u^N}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u^N}{\partial t} \right) \omega_k + \frac{\xi}{\rho_S} \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial t} \frac{\partial \omega_k}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^N}{\partial y \partial t} \frac{\partial \omega_k}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u^N}{\partial x} \frac{\partial \omega_k}{\partial x} + \frac{\partial u^N}{\partial y} \frac{\partial \omega_k}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0, \quad (11)$$

де $k = 1, \dots, N$, з початковими умовами $C_k^N(0) = u_{0,k}^N(x, y)$,

$u_0^N(x, y) = \sum_{k=1}^N u_{0,k}^N \omega_k(x, y)$, $\frac{\partial C_k^N}{\partial t}(0) = 0$, $\|u_0^N - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$, $N \rightarrow +\infty$. На

підставі теореми Каратеодорі існує неперервний розв'язок такої задачі Коші, що має абсолютно неперервну похідну за змінною t на проміжку $[0, \tau_0]$ для деякого $\tau_0 \leq T$. З отриманих нижче оцінок випливатиме, що $\tau_0 = T$.

Помножимо кожне рівняння системи (11) на $\frac{\partial C_k^N}{\partial t}$, підсумуємо усі рівняння

за k від 1 до N та проінтегруємо результат по t на проміжку $[0, \tau]$, $\tau \leq T$.

Використовуючи міркування, аналогічні до [7], з рівняння (7) робимо

висновок, що $\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$, тобто визначене значення

скалярного добутку $\left\langle \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, \frac{\partial u^N}{\partial t} \right\rangle$ між просторами $H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$ та

$H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ і $\int_0^\tau \left\langle \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, \frac{\partial u^N}{\partial t} \right\rangle dt$ існує для довільного $\tau \in (0, T]$. В резуль-

таті одержимо рівність

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \left\langle \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, \frac{\partial u^N}{\partial t} \right\rangle dt + \int_{Q_\tau} \left[\frac{\xi}{\rho_S} \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u^N}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 u^N}{\partial y \partial t} \right) + \frac{\nu}{\rho_S} \left| \frac{\partial u^N}{\partial t} \right|^p \right] dx dy dt + \\ + a^2 \int_{Q_\tau} \left(\frac{\partial u^N}{\partial x} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u^N}{\partial y} \frac{\partial^2 u^N}{\partial y \partial t} \right) dx dy dt = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Проведемо перетворення та оцінки інтегралів рівності (12). Отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \left\langle \frac{\partial^2 u^N(x, y, t)}{\partial t^2}, \frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial t} \right\rangle dt &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u^N}{\partial t}(x, y, \tau) \right)^2 dx dy; \\ a^2 \int_{Q_\tau} \left(\frac{\partial u^N}{\partial x} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u^N}{\partial y} \frac{\partial^2 u^N}{\partial y \partial t} \right) dx dy dt &= \frac{a^2}{2} \int_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u^N}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy dt \geq \\ &\geq \frac{a^2}{2} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u^N(x, y, \tau)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, \tau)}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_0^N(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0^N(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

Враховуючи наведені оцінки та міркуючи подібно до [7], можна отримати

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u^N(x, \tau)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, \tau)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, \tau)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{Q_{\tau}} \left[\left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, \tau)}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, \tau)}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left| \frac{\partial u^N}{\partial t} \right|^p \right] dx dy dt \leq C_1 \quad (13)$$

для довільних $\tau \in (0, T]$, де $C_1 = \frac{a^2}{2\lambda} \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}$ – додатна стала, що не залежить від N , причому $\lambda = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a^2}{2}, \frac{\xi}{\rho_S}, \frac{\nu}{\rho_S} \right\}$. З нерівності (13) робимо

висновок про існування деякої підпослідовності $\{u^{N_k}\}$ послідовності $\{u^N\}$

такої, що $u^{N_k} \rightarrow u^*$ -слабко в $L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega))$, $\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ *-слабко в

$L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$, $\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ слабко в $L^2((0, T); H_0^2(\Omega))$, $\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$

слабко в $L^p((0, T); L^p(\Omega))$ при $N_k \rightarrow \infty$. Зауважимо також, що

$$\left\| \frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \right\|_{L^p((0, T); L^p(\Omega))} \leq C_2, \quad C_2 = \text{const} > 0. \quad (14)$$

З нерівності (14) випливає, що $\left| \frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u^{N_k}}{\partial t} \rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial t}$ слабко в

$L^{p'}((0, T); L^{p'}(\Omega))$. Можна показати, що функція u задовольняє інтегральну

тотожність (10), умови (9), а також можна отримати, що $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega))$,

$\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$, $u_0^{N_k} \rightarrow u_0$ сильно в $H_0^1(\Omega)$, $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$,

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$, $(x, y) \in \Omega$. Отже, u є узагальненим розв'язком (7), (8), (9).

Для обґрунтування єдиності покладемо $w = u^1 - u^2$, де u^1 , u^2 – два узагальнені розв'язки задачі (7), (8), (9). Оскільки $u^1(x, y, 0) = u^2(x, y, 0)$,

$\frac{\partial u^1}{\partial t}(x, y, 0) = \frac{\partial u^2}{\partial t}(x, y, 0) = 0$, то, міркуючи аналогічно до (13), одержимо

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w(x, y, \tau)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x, y, \tau)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x, y, \tau)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{Q_{\tau}} \left(\frac{\partial^2 w(x, y, \tau)}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dy dt +$$

$$+ \int_{Q_{\tau}} \left(\frac{\partial^2 w(x, y, \tau)}{\partial y \partial t} \right)^2 dx dy dt + \int_{Q_{\tau}} \left(\left| \frac{\partial u^1}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u^1}{\partial t} - \left| \frac{\partial u^2}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial u^2}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u^1}{\partial t} - \frac{\partial u^1}{\partial t} \right) dx dy dt \leq 0.$$

Отже, $u^1 = u^2$ майже скрізь в Q_{τ} , звідки одержуємо єдиність розв'язку.

Математична модель пружної мембрани. Для математичного моделювання вільних нелінійних малих поперечних коливань використаємо металічну мембрану прямокутної форми, зафіксовану по периметру під дією сили на одиницю довжини периметра N_l . Вільні коливання описуються задачею (7), (8), (9). За таких умов просторову дискретизацію рівняння (7) здійснюємо за методом сіток. Нехай n, m – кількість вузлів дискретизації, а $\Delta x, \Delta y$ – крок сітки за координатами x та y відповідно. Введемо позначення $u_{i,j}$ – значення амплітудного зміщення у вузлі (i, j) сітки, $i = 2, 3, \dots, n-1, j = 2, 3, \dots, m-1$. Дискретизована система диференціальних рівнянь механічного стану виглядатиме наступним чином:

$$\frac{du_{1,q}}{dt} = v_{1,q}; \quad \frac{du_{p,1}}{dt} = v_{p,1}; \quad \frac{du_{n,q}}{dt} = v_{n,q}; \quad \frac{du_{p,m}}{dt} = v_{p,m}; \quad (15)$$

$$\frac{dv_{1,q}}{dt} = 0; \quad \frac{dv_{p,1}}{dt} = 0; \quad \frac{dv_{n,q}}{dt} = 0; \quad \frac{dv_{p,m}}{dt} = 0; \quad p = 1, 2, \dots, n; \quad q = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$\frac{dv_{i,j}}{dt} = a^2 \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right) +$$

$$+ \frac{\xi}{\rho_S} \left(\frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right) - \frac{v}{\rho_S} |v_{i,j}|^{p-2} v_{i,j};$$

$$\frac{du_{i,j}}{dt} = v_{i,j}; \quad (16)$$

$$u_{1,p}(0) = u_{n,p}(0) = u_{1,q}(0) = u_{m,q}(0) = 0; \quad (17)$$

$$v_{1,p}(0) = v_{n,p}(0) = v_{1,q}(0) = v_{m,q}(0) = 0;$$

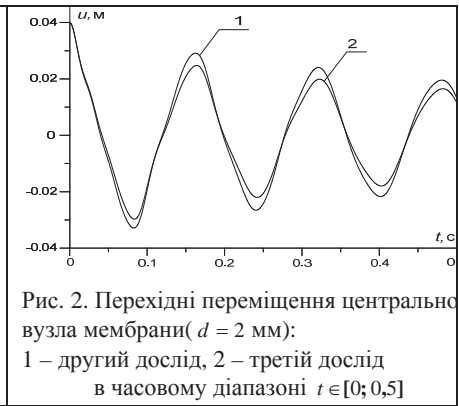
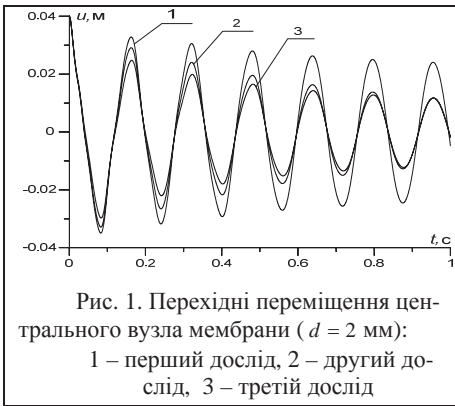
$$v_{i,j}(0) = 0; \quad u_{i,j}(0) = \begin{pmatrix} u_{2,2}^0 & u_{2,3}^0 & \dots & u_{2,m-1}^0 \\ u_{3,2}^0 & u_{3,3}^0 & \dots & u_{3,m-1}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,2}^0 & u_{n-1,3}^0 & \dots & u_{n-1,m-1}^0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

де $v_{i,j}(0)$, $u_{i,j}(0)$ – значення швидкості та амплітуди зміщення відповідно в початковий момент часу. Таким чином, розв'язання задачі (7), (8), (9) зведено до необхідності чисельного інтегрування на часовому інтервалі системи різницевих рівнянь (15), (16) за умов (17), (18).

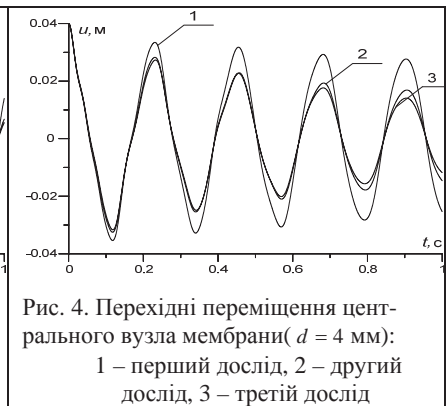
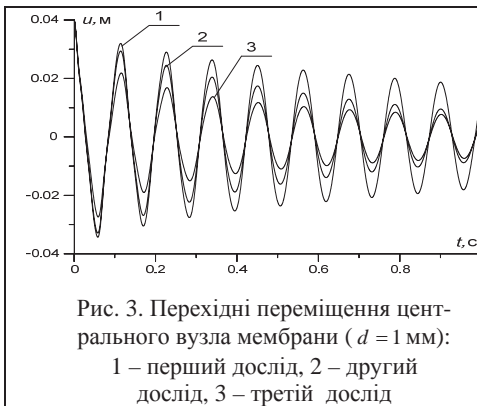
Результати комп'ютерної симуляції. Комп'ютерна симуляція перехідних процесів здійснювалась на прикладі аналізу малих поперечних коливань стінки оливного бака трансформатора, яка є тонкою металічною мембраною квадратної форми. Довжина мембрани – 1 м, ширина – 1 м, густина матеріалу сталльної мембрани $\rho = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, товщина мембрани - d мм. Мембрана отримала початкове збурення силою, прикладеною до її центра в напрямку розтягу (перпендикулярно до площини поверхні). Початкові умови для амплітудного зміщення в початковий момент часу (18) розраховувались з геометричних побудов (в початковий момент натягнута мембрана прийняла форму правильної чотирикутної піраміди). Комп'ютерна симуляція здійснювалась за таких параметрів системи: $N_l = 5000 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $\Delta x = \Delta y = 0,1 \text{ м}$,

$\xi = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$. У всіх проведених дослідях початкові умови однакові: відхилення центра мембрани (висота піраміди) з координатами (0,5;0,5), що відповідає вузлу $u_{6,6}(0) = 4 \text{ см}$. Для інших дискретних вузлів початкові умови визначались за допомогою спеціальної підпрограми. Інтегрування рівнянь механічного стану (15), (16) здійснено явним методом Рунге_Кутта 4 – го порядку та неявним методом Гіра 2 – го порядку. Чисельні результати практично співпали. Крок інтегрування явним методом Рунге_Кутта – $1 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, неявним методом Гіра – $1 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Система нелінійних алгебричних рівнянь на кожному кроці за змінною t розв'язується методом простої ітерації. Досліджувались *три стани* об'єкту. Перший стан – коливання стінки порожнього баку (присутня тільки лінійна внутрішня дисипація механічної енергії, $\nu = 0$). Другий стан – напівпорожній бак (присутні лінійна внутрішня та лінійна зовнішня дисипації енергії, $p = 2$, $\nu = 3$). Третій – коливання стінки повного баку (присутні лінійна внутрішня та нелінійна зовнішня дисипації енергії, $p = 4,3$, $\nu = 3$). Зрозуміло, що такі припущення дещо спрощені. Але за останніх з достатнім ступенем адекватності відтворено реальні фізичні процеси в об'єкті. Таким чином, проведено три дослід з урахуванням згаданих вище станів. Також для підтвердження достовірності моделі системи проведено додатково ще два експерименти, які полягали в дослідженні перехідних процесів у згаданій мембрані, але за умови різних товщин останньої. Основний експеримент (перший) $d = 2$ мм (рис. 1, 2), другий експеримент

$d = 1$ мм (рис. 3), третій – $d = 4$ мм (рис. 4) . Результати комп'ютерних симуляції представлені в вигляді рисунків, які аналізуються.



На рисунках 1 і 2 представлено множину кривих, які відтворюють перехідні переміщення центрального вузла сітки дискретизації мембрани для першого експерименту в різні часові діапазони.



На першому рисунку $t \in [0; 1]$, на другому – $t \in [0; 0,5]$. Другий рисунок подано для кращого візуального споглядання різниці рухів мембрани на різних дослідах. Тобто тут є три функціональні залежності, що описують рух центру мембрани у випадку. Аналізуючи сім'ю кривих, легко бачити істотний вплив внутрішніх дисипативних процесів на коливання стінки бака. Частково заповнений бак можна вважати як об'єкт з лінійною зовнішньою дисипацією. Натомість повний бак таким об'єктом вважати не завжди можна, адже власне турбулентні процеси в оливі створюють нелінійні впливи на стінки баку. Ці впливи залежать від товщини стінки бака. Це чітко проглядається на рисунках 3, 4.

По–перше, зменшення товщини мембрани приводить до збільшення частоти власних коливань останньої. Натомість, збільшення товщини мембрани призводить, навпаки, до зменшення цієї частоти. Цей факт повністю відповідає класичній теорії пружності. По–друге, затухання в мембрані меншої товщини інтенсивніше, що залежить від внутрішніх процесів у тілі мембрани. По–третє, нелінійні властивості зовнішніх сил (рідини) проявляються сильніше в баках з тоншими стінками, що повністю є зрозумілим з фізичної точки зору. На рисунках 5 і 6 репрезентовано положення мембрани в різні часи та для різних експериментів. Згадані рисунки представлені в 3D форматі для представлення об’ємної картини коливного процесу в фіксовані моменти часу.

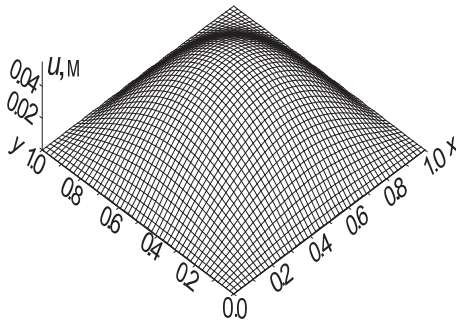


Рис. 5. Положення мембрани для $d = 2$ мм в момент часу $t = 0,8$ с для першого експерименту

Цілком очевидно, що згадані рисунки повністю є пов’язаними з рисунками 1 та 3, та відповідають останнім.

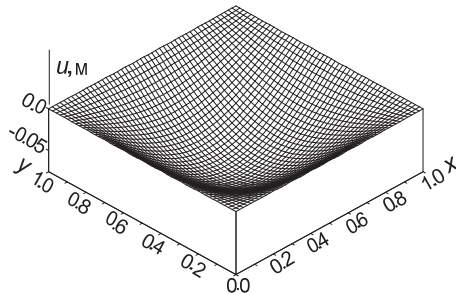


Рис. 6. Положення мембрани для $d = 4$ мм в момент часу $t = 0,74$ с для другого експерименту

Висновки. Використання інтердисциплінарних підходів до моделювання малих поперечних коливань у пружному ізотропному нелінійному середовищі на прикладі мембрани дає змогу формувати безпосередньо рівняння механічного стану об'єкта без будь-яких декомпозиційних процесів, виходячи виключно з енергетичних підходів та теорії механічних полів у континуальних середовищах. Для підтвердження коректності постановки задачі про малі поперечні коливання пружної мембрани в нелінійному середовищі використано фундаментальні засади та методи загальної теорії нелінійних крайових задач, теорію диференціального, інтегрального та варіаційного числень. На підставі результатів комп'ютерної симуляції підтверджено достатню адекватність одержаної моделі її реальному прототипу— сталій мембрані. Показано, що нелінійне середовище сприяє швидшому затуханню коливань та призводить до виникнення ангармонійних процесів у системі. Також підтверджено відомий факт, що збільшення товщини мембрани приводить до зменшення частоти власних коливань системи, і навпаки.

1. Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах / А. Чабан.- Львів.: В-во Тараса Сороки, 2008.- 328 с.
2. Ерофеев В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В. В. Кажаев, Н., П. Семерикова.– Москва: Физматлит, 2002.– 208 с.
3. Филиппов А.А. Колебания деформируемых систем / А.А. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 730 с.
4. Chaban A. Non-Conservative Lagrangian / Andriy Chaban // Технічні вісті.– 2012.– № 1(35), 2(36).– С. 20–21.
5. Уайт Д. Электромеханическое преобразование энергии / Д. Уайт, Г. Вудсон. – М.-Л.: Энергия, 1964. – 528 с.
6. Пукач П. Я. Нелінійні поперечні коливання напівнеобмеженого каната з урахуванням опору / П. Я. Пукач, І. В. Кузьо // Науковий вісник Національного гірничого університету.– 2013.– № 3.– С. 82–86.
7. Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.–Л. Лионс. [Перев. с англ. под ред. О.А. Олейник].– Москва: Эдиториал УРСС, 2002.–587 с.

Поступила 16.10.2013р.