

модельовання в енергетиці. – 2009. – Вип. 51. – С.178-184.

2. *Лиса Н.К.* Моделі обробки даних для експертних висновків про стан і динамічну ситуацію в технічних системах / Н.К. Лиса, Л.С. Сікора // ЗНП, Інститут проблем модельовання в енергетиці. – 2009. – Вип. 53. – С.169-177.

3. *Сікора Л.С.* Процедури діалогу для оперативного управління в автоматизованих ієрархічних системах / Л.С. Сікора, Ю.Г. Міюшкович, Н.К. Лиса, Б.Л. Якимчук, Л.Ю. Якимчук // ЗНП, Інститут проблем модельовання в енергетиці. – 2011. – Вип. 58. – С.141-150.

4. *Сікора Л.С.* Інформаційні технології створення сценаріїв діалогу для інтелектуалізації управління в ієрархії АСУ-ТП / Л.С. Сікора, Ю.Г. Міюшкович, Н.К. Лиса // Матеріали 16-ї Міжнародної конференції з автоматичного управління «Автоматика-2009», (Чернівці, 22-25 вересня 2009 р.). – Чернівці, 2009. – С. 369-370.

5. *Sikora L.* Laser Photochemistry of Technological Sensors / L. Sikora, N.Lysa // Proc. of the XIth International Conferense CADSM-2011, (Lviv-Polyana, 23-25 February, 2011). – Lviv-Polyana, 2011. – P. 390-391.

6. *Башкин А. С.* Лазеры и химия / А.С. Башкин. – М.: Знание, 1981. – 64 с.

7. *Сікора Л.С.* Лазерні інформаційно-вимірвальні системи для управління технологічними процесами / Л. С. Сікора. – Львів: Каменярь, 1998. – 445 с.

8. *Сявавко М.* Інформаційна система «Нечіткий експерт» / М. Сявавко. – Львів.: Видавничий центр ЛНУ ім. Ів. Франка, 2007. – 320 с.

Поступила 26.03.2014р.

УДК 004.272

В. В. Душеба, А. А. Сигарев, г. Киев

МЕТОД СИНТЕЗА СТРУКТУРНЫХ ГРАФОВ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Abstract. This paper proposes a method for the synthesis of structural homogeneous graphs distributed computing systems providing continuity of address space and allowing apriority calculate the shortest routes for all messages. The method allows for the optimum load distributed computing system.

Введение. В любой системе параллельной обработки вычислительные узлы, выполняющие разные части одной задачи, должны как-то взаимодействовать друг с другом, чтобы обмениваться информацией [1, 2]. В системах межсоединений с размерностью один и выше можно выбирать, по какому пути передавать данные от одного вычислительного узла к другому. В работе [3] были рассмотрены вопросы поиска наиболее эффективного способа соединения стандартных компонент распределенных вычислительных систем и сформулированы основные определения и правила разработки алгоритма выбора маршрута. Обосновано, что исключительно

важную роль играет система нумерации вершин структурного графа, из которой непосредственно вытекает и масштабирование, и адресация, и маршрутизация в системе. Поэтому, решение проблемы синтеза однородных графов с заданным числом уровней иерархии является одним из основных вопросов для дальнейшего рассмотрения.

Формальная процедура формирования рекуррентной последовательности графов

Введем обозначения:

$M_n = \{0, 1, \dots, z\}$ – множество всех цифр n -ричной системы счисления,

Старшая цифра n -ричной системы счисления будет обозначена через z , т.е.

$$z_2 = 1, z_8 = 7, z_{10} = 9, z_{16} = F.$$

M_n^k – множество всех целых положительных k -разрядных чисел n -ричной системы счисления, включая 0.

Очевидно, что $M_n^1 = M_n$. Индекс n будет всегда выражаться в десятичной системе счисления.

Отдельные цифры указанной системы счисления могут быть обозначены и строчными буквами латинского алфавита. Для обозначения отдельных чисел будут использованы строчные буквы греческого алфавита с нижним индексом, который показывает их разрядность. Так 121, i21, ab5, β_3 – всё это трех разрядные числа.

Допустимой является запись:

$$\beta_3 = i5j,$$

но недопустимы записи:

$$\beta_3 = i5j2 \text{ (несоответствие разрядности),}$$

$$i = \beta\gamma \text{ (отсутствуют нижние индексы в правой части).}$$

Далее нумерация вершин графов будет осуществляться только в n -ричной системе счисления, а её вид будет опускаться.

Определим n -клик, как пару

$$F_n = (V, E), \tag{1}$$

где V – множество вершин графа, а E – множество его ребер.

Все параметры такого графа общеизвестны и не требуют пояснений, однако принимаем, что

$$V = M_n^1.$$

Этим выражением авторы подчеркивают особенность рассматриваемого подхода в нумерации вершин графов [4, 5]. Что касается множества ребер E , то оно непосредственно и однозначно вытекает из полносвязности графа и не требует детализации. Таким образом, вершины графа F_n будут закодированы

всегда одноразрядными числами. В силу того, что $|M_n^1| = |V|$, то вершины базового графа независимо от n всегда будут требовать для обозначения всего множества одноразрядных чисел.

$$|V| = n \text{ и } |E| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Построение графа $F_n^{(2)}$. Строим промежуточный граф

$$F_n^{(2)} = \underbrace{F_n + F_n + \dots + F_n}_n. \quad (2)$$

Выражение (2) означает сумму n изоморфных графов без общих вершин, в данном случае n -клик. Эта сумма необходима в дальнейшем для построения других графов, но в таком виде оно не пригодно для этих целей. Чтобы определиться с вершинами каждого из входящих в неё графов перепишем его в следующем виде:

$$F_n^{(2)} = \sum_{i=0}^z F_{n(i)}. \quad (3)$$

где каждый из $F_{n(i)} \sim F_n$. Для упрощения синтеза новых структур номера вершин каждого вновь сформированного графа приводятся в однозначное соответствие с номерами вершин базовых графов и фиксируются. Кроме того, $i \subset M_n$ показывает, что вершины произвольного графа $F_{n(i)}$ получаются из вершин F_n путем приписывания к каждой из его вершин слева цифры i . К примеру, если q произвольная вершина графа F_n , то iq соответствующая ей вершина графа $F_{n(i)}$.

Формально графы, входящие в (3) определим следующим образом:

$$F_{n(i)} = (V_i, E_i) \quad (4)$$

$$(F_n \Leftrightarrow F_{n(i)}) \Rightarrow (V \Leftrightarrow V_i) \wedge (E \Leftrightarrow E_i)$$

$$(v_q \in V) \Leftrightarrow (v_{iq} \in V_i)$$

$$(V = \{0, 1, \dots, z\}) \Rightarrow (V_i = \{i0, i1, \dots, iz\} \supset M_n^2). \quad (5)$$

Выражение (5) задает однозначное соответствие V и V_i .

$$F_n^{(2)} = (V^2, E^{(2)}), \quad (6)$$

где V^2 , $E^{(2)}$ соответственно множества вершин и ребер, при этом:

$$V^2 = \bigcup_{i=0}^z V_i, |V^2| = n^2$$

$$E^{(2)} = \bigcup_{i=0}^z E_i, |E^{(2)}| = \frac{n^2(n-1)}{2}.$$

Подчеркнем, что $F_n^{(2)}$ состоит из n изолированных графов, и все его n^2 вершин являются полюсами. Разобьем множество его вершин на два подмножества:

$$V^2 = V_{ii}^2 \cup V_{ij}^2, \quad (7)$$

где $V_{ii}^2 = \{ii\}_{i=0}^z$, $V_{ij}^2 = V^2 \setminus V_{ii}^2$. Множество V_{ii}^2 включает все двухразрядные числа, состоящие из одинаковых цифр, остальные числа войдут во множество V_{ij}^2 .

Очевидно, $|V_{ii}^2| = n, |V_{ij}^2| = n(n-1)$. Заметим, что в V_{ij}^2 произвольной вершине ij всегда найдется симметричная ей вершина ji .

Результирующий граф F_n^2 определяем парой:

$$F_n^2 = (V^2, E^2),$$

$$\text{где } E^2 = E^{(2)} \cup W^{(2)},$$

$$W^{(2)} = \{\alpha_2 \beta_2 / \alpha_2, \beta_2 \supset V_{ij}^2 \wedge (\alpha_2 = iq) \Rightarrow (\beta_2 = qi)\}. \quad (8)$$

Операции (7, 8) делают упорядоченным всё множество вершин графа F_n до такой степени, что каждая вершина сети становится уникальной и какое-либо переименование его вершин становится действием абсурдным, которое разрушает мгновенно предлагаемую концепцию. В реальной системе числовое выражение вершины является её абсолютным адресом в системе.

$$|W^{(2)}| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

и

$$|E^2| = \frac{n}{2}(n^2 - 1).$$

В графе F_n^2 вершины, составляющие подмножество V_{ii}^2 , являются его полюсами. Отметим, что все его вершины пронумерованы последовательными двузначными числами от 00 до zz включительно.

Построение графа F_n^3 . Оно аналогично предыдущему, но в качестве базы берется граф F_n^2 . Первым шагом является построение изолированного графа

$$F_n^{(3)} = \sum_{i=0}^z F_{n(i)}^2,$$

$$F_n^{(3)} = (V^3, E^{(3)}) \quad F_{n(i)}^2 = (V_i^2, E_i^2) \sim F_n^2.$$

$$V_i^2 = \{i00, i01, \dots, izz\} \supset M_n^3.$$

$$V^3 = \bigcup_{i=0}^z V_i^2. \quad V^3 = M_n^3, |V^3| = n^3.$$

$$E^{(3)} = \bigcup_{i=0}^z E_i^2 \quad |E^{(3)}| = \frac{n^2}{2}(n^2 - 1)$$

$$F_n^3 = (V^3, E^3)$$

$$E^3 = E^{(3)} \cup W^3$$

Разобьем множество V^3 на два подмножества следующим образом:

$$V^3 = V_{iii}^3 \cup V_{iqq}^3,$$

где $V_{iii}^3 = \{000, 111, \dots, zzz\}$. Тогда $V_{iqq}^3 = V^3 / V_{iii}^3$.

$$W^3 = \{\alpha_3 \beta_3 / \alpha_3, \beta_3 \in V_{iqq} \wedge (\alpha_3 = iqq) \Rightarrow (\beta_3 = qii)\}$$

$$|W^3| = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{и} \quad |E^3| = \frac{n}{2}(n^3 - 1).$$

В общем случае $F_n^{k-1} \rightarrow F_n^k$, который определим, как пару

$$F_n^k = (V^k, E^k),$$

где $V^k = M_n^k$, $|V^k| = n^k$, $|E^k| = \frac{n}{2}(n^k - 1)$.

$$|E^k| = n |E^{k-1}| + \frac{n}{2}(n-1). \quad (9)$$

Процедуру построения графов, показанную выше, условно можно назвать операцией возведения в степень базового графа. Сразу оговоримся, что введённая операция возведения не имеет никакого отношения к операции умножения графов, иногда используемой в теории графов. В предлагаемой схеме, которая является рекуррентной, действительно возводится в степень число вершин графа. Число рёбер графа при переходе от одного показателя степени к следующему определяется выражением (9). Валентность такого графа p не меняется с увеличением показателя степени, и при заданной базе всегда $p=n$. Эта операция может быть полезна при синтезе n -валентных сетей больших размерностей.

Свойства семейства синтезированных графов вида F_n^k .

В самом обозначении графа содержится исчерпывающая информация о всех его параметрах.

1. Нижний индекс n показывает, что базовым графом для синтеза является полный n -вершинный граф F_n .

2. Верхний индекс k указывает на число уровней иерархии в рассматриваемом графе.

3. Множеством его вершин является упорядоченное множество всех k -разрядных чисел M_n^k n -ричной системы счисления.

4. Между двумя произвольными вершинами такого иерархического графа существует отношение $\langle \rangle$. Применительно к реальной системе вершины графа могут выступать в качестве абсолютных внутрикластерных адресов соответствующих им вычислительных узлов сети.

5. Значение любого из диаметров графа определяется формулой:

$$d = 2^k - 1. \tag{10}$$

Веса ребер графов принимаем за 1.

Диаметры, которые соединяют два произвольных полюса графа, будем в дальнейшем именовать *магистралями*. Число магистралей D в n -полюсном в графе определяется выражением:

$$D = \frac{n}{2}(n-1).$$

Другие свойства проиллюстрируем на конкретных графах (рис. 1).

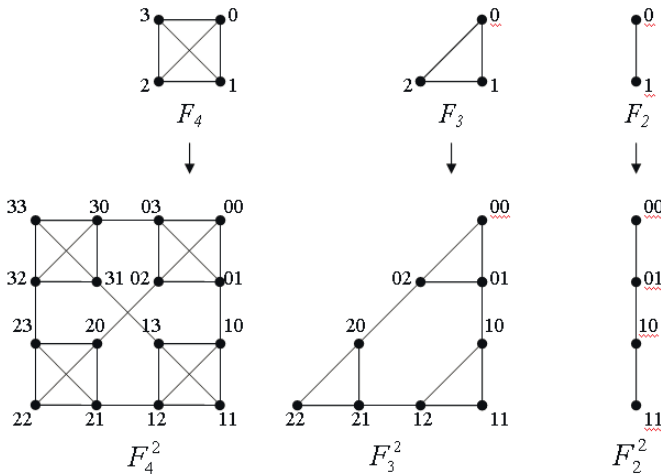


Рис. 1. Формирование сетей с двухуровневой организацией и различными валентностями

Возьмём в качестве базовых графы F_4 , F_3 , F_2 . На их основе будем строить однородные сети с двухуровневой организацией F_4^2 , F_3^2 , F_2^2 ,

вершинами которых служат упорядоченные множества всех двухразрядных чисел соответственно четверичной, троичной и двоичной систем счисления.

Даже беглый визуальный анализ изображения графов позволяет заметить законченность их структурной организации и строгую упорядоченность вершин в каждом графе, при этом они не обладают абсолютной однородностью. В данном случае задача достижения абсолютной однородности не ставилась, ибо она делает систему замкнутой и, следовательно, затрудняет масштабирование системы.

Все двухуровневые графы, имея разные валентности и разное число вершин, обозначены двухразрядными числами. Каждый из графов полностью использует все множество всех двухразрядных чисел, используемой в нём системы счисления. Даже добавление одной вершины в любой из приведенных графов (рис. 1) переводит его в следующий иерархический уровень. При этом важно определить, к какому полюсу подключить этот дополнительный узел.

В предлагаемом методе это решается однозначно. Чтобы обеспечить непрерывность адресного пространства и избежать проблем с маршрутизацией необходимо, чтобы значение добавленной вершины было на единицу больше наибольшей из имеющихся в сети вершин. К примеру, добавляемая к графу F_4^2 вершина должна получить значение $33+1=100$. Трёхразрядность добавленной вершины указывает на то, что с её добавлением начинает формироваться третий уровень иерархии исходного графа. Следовательно, к каждой из его вершин необходимо приписать слева 0. Вершина 100 может быть соединена только с вершиной 011 (бывшая вершина 11), а не с вершиной 033, как может показаться. В этом случае происходит переход к формированию графа F_4^3 , которое для своего завершения требует добавления в общей сложности 48 вершин, последней из которых будет вершина 333. При этом полученный незавершенный граф целесообразно обозначить как - $F_4^3 [100]$.

Данное обозначение показывает, что:

1. Формирование 3-го уровня иерархии не завершено.
2. Наибольшей вершиной является вершина 100.

Отметим здесь и одно свойство магистралей, которое выделяет их из множества остальных диаметров графа. Оно заключается в том, что промежуточные их вершины формируются посредством двух значащих цифр, входящих в состав полюсов графов. К примеру, вершины магистрали (33, 32, 23, 22) в графе F_4^2 (рис. 2) содержит только набор из двух цифр 3 и 2. Если в каждой из вершин этой магистрали осуществить подстановку: $2 \rightarrow 1$, и $3 \rightarrow 0$, то получим двоичное отображение (00, 01, 10, 11) данной магистрали. Это-последовательность всех двух разрядных двоичных чисел, старшее из которых 11 указывает на то, что протяженность таких магистралей равна 3, что находится в полном соответствии с выражением (10).

Каждая вершина графа, таким образом, имеет две ипостаси: n -ричную и двоичную, первая из которых является абсолютным сетевым адресом вершины, а вторая - метрической координатой её положения в сети. Очевидно, по двоичному отображению строится и сама магистраль, если заданы соответствующие полюсы графа, так как все магистрали графа имеют одно и тоже двоичное отображение. И полученное двоичное отображение является векторной константой для всего множества двухуровневых графов.

Наблюдается следующая особенность: цепочка вершин (00, 01, 10, 11) имеется в каждой из трех синтезированных сетей, но в соответствующей системе счисления. Изображение цикла (00, 01, 10, 11, 12, 21, 22, 20, 02) в сети F_4^2 полностью идентично сети F_3^2 . Отметим, что указанное сходство не является случайным. Напротив – это результат системы кодирования вершин рассматриваемых графов.

Выводы. Предложенный в статье метод синтеза структурных однородных графов обеспечивая непрерывность адресного пространства, позволяет априори вычислять кратчайшие маршруты для всех сообщений или пакетов системы и, таким образом, избежать проблем с маршрутизацией [6, 7], а также осуществлять оптимальную загрузку распределенной вычислительной системы. Основная цель, которая при этом ставилась, – максимальное упрощение процедуры межузлового обмена и минимизация временных затрат на его осуществление.

1. *Каляев И.А.* Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры / Каляев И.А., Левин И.И., Семерников Е.А., Шмойлов В.И. // Изд. ЮНЦ РАН. – Ростов-на-Дону, 2008. – 393 с.
2. *Корнеев В.* Современные подходы к повышению производительности / Виктор Корнеев // Открытые системы, 2006. – № 5.
3. *Душеба В.В., Сигарев А.А.* К вопросу об оптимизации топологии кластерных вычислительных систем / В.В. Душеба, А.А. Сигарев // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. – К.: ИПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАНУ, 2011. – Вип. 61. – С. 32-36.
4. *Tamm U.* Теория графов. Пер. с англ. М.: Мир, 1988. – 424 с.
5. *Diestel R.* Graph Theory, Electronic Edition. — NY: Springer-Verlag, 2005. — С. 422.
6. *Сигарев А.А., Душеба В.В.* Способ упразднения межпроцессорного обмена в макроконвейерах / А.А. Сигарев, В.В. Душеба // Электронное моделирование. – К., 2006. – т. 28, № 6. – С. 71-89.
7. *Сигарев А.А., Душеба В.В.* Организация многопроцессорных систем класса МКОД / А.А. Сигарев, В.В. Душеба // Электронное моделирование, 1999. - 21, № 1. С. 47-57.

Поступила 10.02.2014р.