УДК 534.1

П.Я. Пукач, м. Львів

МЕТОДИ АНАЛІЗУ РЕЗОНАНСНИХ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ У СИЛЬНО НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РІВНЯННЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Abstract. The detailed analysis of the impact of periodic perturbation on strongly nonlinear model of Van der Pol equation in article is conducted. The method of investigation of oscillatory processes in strongly nonlinear systems with concentrated masses makes it possible not only to solve the problem of analysis, but are no less important problem of synthesis of oscillating systems at the design stage, select the elastic characteristics of dynamic systems that prevent them resonance phenomena.

Keywords: dynamic system, resonance phenomena, strongly nonlinear model, Van der Pol equation.

Вступ. Актуальність проблеми. Огляд літератури. Механічні коливання здебільшого описуються нелінійними диференціальними рівняннями (звичайними чи із частинними похідними). Для них залежності між відновлюючою силою і переміщенням виражаються співвідношеннями, які відрізняються від лінійного закону [1, 2]. До того ж наявні сили зовнішнього та внутрішнього тертя, що мають складну природу (залежать від відносної швидкості тіл, внутрішньої структури матеріалу [3, 4] та інших чинників). Наведене у сукупності приводить до нелінійних зв'язків між основними величинами, які описують динаміку процесу та його швидкістю протікання. Кожен з вказаних чинників зумовлює індивідуальні властивості тієї чи іншої коливальної системи.

Вивчення та оптимізація фізичних, фізико-хімічних, динамічних процесів, які відбуваються в технічних системах при великих швидкостях, високих тисках і енергіях, вимагають аналізу та дослідження достатньо складних з точки зору сучасного стану розвитку нелінійної теорії коливань моделей процесів. Проблема розроблення ефективних аналітичних методів, які дозволяють оптимальні інженерні рішення за рахунок вибору параметрів коливальної системи, тісно зв’язана з проблемою побудови і дослідження розв’язків звичайних диференціальних рівнянь, що описують рухи механічних систем. Цей факт випливає з аналізу публікацій, які стосуються аналітичних досліджень коливальних процесів систем із зосередженими масами [5, 6, 7] та ін. Окреме та досить вагоме місце у дослідженні коливальних процесів у нелінійних системах займає метод Ван-дер-Поля [8], який є достатньо ефективним для розв’язування нелінійних задач з одним ступенем вільності. Для застосування методу Ван-дер-Поля не потрібно додаткових припущень щодо природи сил, під дією яких відбуваються коливання системи. Цей метод є достатньо наочним і простим, тому набув широкого застосування в інженерних розрахунках. Узагальнення методу Ван-дер-Поля для сильно нелінійних систем дає добрі результати дослідження нелінійних консервативних систем незалежно від величини параметра ε в тих випадках, коли пружна сила монотонно зростає. Основна ідея методу Ван-дер-Поля була використана для дослідження коливань сильно нелінійних систем із зосередженими масами [9]. Найбільш цікавою та одночасно достатньо вивченою на базі асимптотичних методів нелінійної механіки є система, яка моделюється квазілінійним рівнянням Ван-дер-Поля [10, 8].

Виклад основного матеріалу. Нижче зупинимось на складнішій сильно нелінійній моделі цього рівняння, тобто розглядатимемо рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx^{\nu+1}=\varepsilon\left(1-\lambda x^2\right)\frac{dx}{dt}+H\sin\mu t\,, \tag{1}$$

де λ стала; m - маса матеріальної точки; x - її координата у довільний момент часу; c,ν - сталі, причому $\nu+1=\frac{2p+1}{2q+1}$ ($p,q=0,1,2,...$); μ , H - частота та амплітуда відповідно зовнішнього періодичного збурення, яке діє на систему; ε - малий параметр. Для нерезонансного випадку, як показано у [11], динамічний процес у коливальній системі, яка описується рівнянням (1), проходить відповідно до наступних законів зміни амплітуди та частоти:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=-\frac{\varepsilon}{2\Pi\omega(a)}\int_0^{2\Pi}sa\left(1,\nu+1,\overline{\psi}\right)f\left(aca(\nu+1,1,\psi),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\overline{\psi}\right)\right)d\overline{\psi},\\
\frac{d\overline{\psi}}{dt}&=\omega(a)-\frac{\varepsilon(\nu+2)}{4\Pi a\omega(a)}\int_0^{2\Pi}ca\left(\nu+1,1,\overline{\psi}\right)f\left(aca(\nu+1,1,\psi),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\overline{\psi}\right)\right)d\overline{\psi}
\end{aligned}\quad, \tag{2}$$

де $\overline{\psi}=\omega(a)t+\psi$ - фаза коливань незбуреного руху, $\omega(a)$ - частота коливань.

Із наведених співвідношень (2) випливає, що як і для квазілінійного випадку, у системі існують два стаціонарні режими коливань $a_{1cm}=0$ та

$$a_{2cm}=\sqrt{\lambda\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{\nu+2}\right)}\,.$$

Перший із них відповідає рівноважному положенню, другий – усталеному динамічному процесу, що описується залежністю

$$x(t)=a_{2cm}ca\left(\nu+1,1,\sqrt{\frac{c(\nu+2)}{2m}}a_{2cm}^{\frac{\nu}{2}}t+\psi\right)\,.$$

Якщо для квазілінійного випадку усталений режим коливань при $\lambda=1$ відбувається за амплітуди $a_{2cm}=2$, то для сильно нелінійного аналогу вказаної системи амплітуда та частота усталеного динамічного процесу залежать від параметру нелінійності. Нижче представлено залежність від параметру ν (при $\lambda = 1$) стаціонарного значення амплітуди коливань (рис. 1), закони зміни амплітуди коливань перехідного процесу за різних значень вказаного параметру (рис. 2) та залежність (рис. 3) від параметру ν відношення частот стаціонарних коливань нелінійного та квазілінійного рівнянь Ван-дер-Поля ($\lambda = 1$).

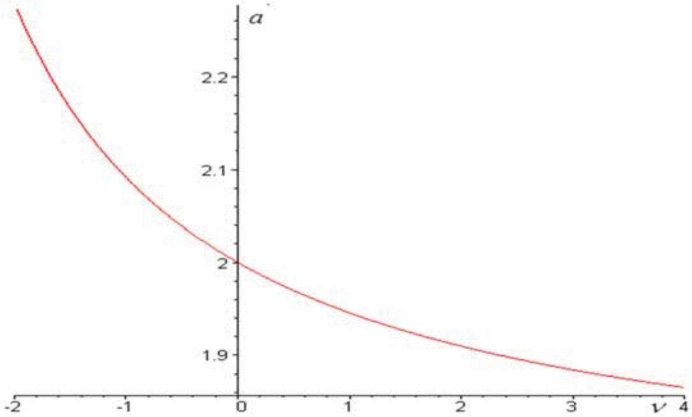

Рис. 1. Залежність стійкого стаціонарного значення амплітуди від параметру ν

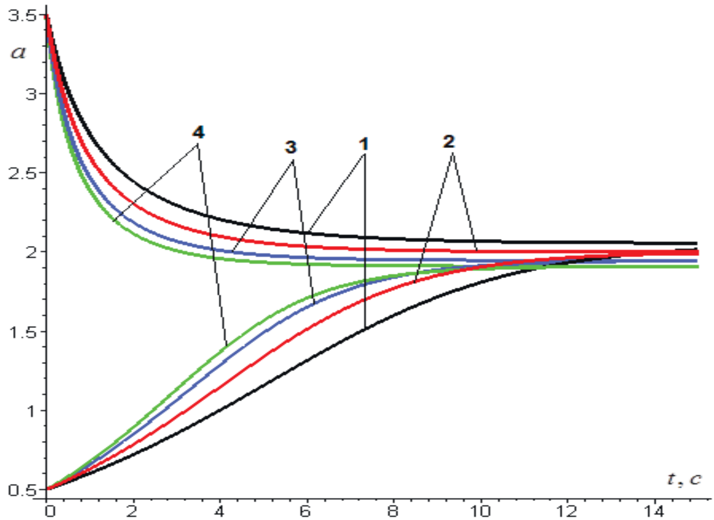

Рис. 2. Закони зміни амплітуди коливань перехідного процесу за різних значень параметру ν (крива 1 - $\nu = -2/5$, крива 2 - $\nu = 0$, крива 3 - $\nu = 2/5$, крива 4 - $\nu = 2$)

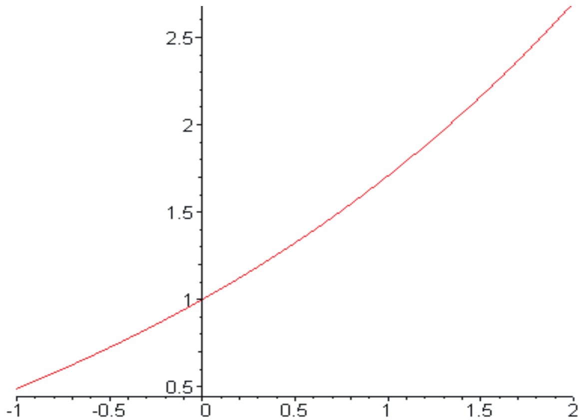

Рис.3.Залежність від параметру ν відношення частот стаціонарних коливань нелінійного та квазілінійного рівнянь Ван-дер-Поля при $\lambda = 1$

Представлені графічні залежності показують:

- для більших значень параметру ν стійке стаціонарне значення амплітуди є меншим;
- бистрота наближення амплітуди коливань до стаціонарного значення є більшою для жорсткіших систем;
- для значень параметру $-1 < \nu < 0$ частота усталеного динамічного процесу, за якої можливі резонансні коливанння, є меншою, ніж для квазілінійного випадку, а для $\nu > 0$ – більшою (за умови рівності інших параметрів).

Що стосується резонансних коливань, то для них у порівнянні із квазілінійною моделлю вказаного рівняння характерні не тільки кількісні відмінності у описі основних характеристик процесу, але й принципово якісні:

- по-перше, якщо у квазілінійній моделі явище головного резонансу має місце за умови $\mu = \sqrt{\frac{c}{m}}$, то у сильно нелінійній – $\mu = \frac{\Pi}{\pi}\sqrt{\frac{c(\nu+2)}{2m}}a^{\frac{\nu}{2}}$, тобто за значення аплітуди коливань, близької до $a^* = \left[\mu \frac{\pi}{\Pi}\left(\frac{2m}{c(\nu+2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{\nu}}$;
- по-друге, якщо початкове значення амплітуди коливань більше за a_{2cm}, а a^* меше за a_{2cm}, то явище резонансу взагалі у системі спостерігатись не буде.

Таким чином, явище резонансу буде мати місце за умов: $a_{2cm} < a^* < a_0$ при $a_0 > a_{2cm}$ та $a_0 < a^* < a_{2cm}$ при $a_0 < a_{2cm}$ На рис. 4 а) та рис. 4 б) заштрихованим областям відповідають області резонансу.

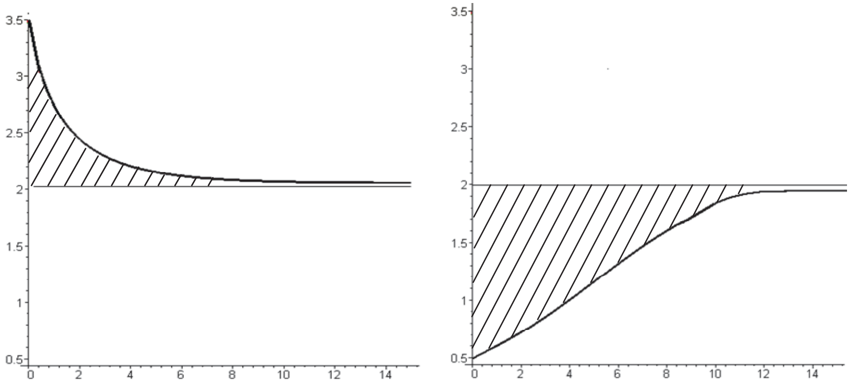

Рис. 4. Області резонансу для випадків $a_{2cm} < a^* < a_0$ і $a_0 > a_{2cm}$ - а) та $a_0 < a^* < a_{2cm}$ при $a_0 < a_{2cm}$ - б)

Після проведеного аналізу існування резонансних коливань розглядуваної системи перейдемо до їх дослідження. Наперед будемо вважати, що умови його існування виконуються. Відповідно до [12] співвідношення, які описують закони зміни резонансної амплітуди набувають вигляду

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a\sqrt{\pi}}{2\Pi m}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right) - \lambda a^2 \Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right)\right] -$$

$$-\frac{H}{2\pi\omega(a)}\left(\alpha_1 \cos\vartheta + \beta_1 \sin\vartheta\right),$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\pi}{\Pi}\omega(a) - \mu - \frac{H(\nu+2)}{4\pi a\omega(a)}\left(\alpha_2 \cos + \beta_2 \sin\vartheta\right).$$

Для резонансних коливань розглядуваної механічної системи можливі два принципово якісно та кількісно відмінні випадки. Розглянемо спочатку простіший випадок, а саме: $a_0 < a_{cm}$, а $a_0 < a^* < a_{2cm}$. Для вказаного випадку, внаслідок того, що амплітуда коливань зростає з часом, намагаючись досягти стійкого стаціонарного значення (рис.5), через деякий проміжок динамічний процес “входить” у резонансну зону. Не дивлячись на його короткотривалість, амплітуда коливань різко зростає, а, отже, система виходить із зони резонансу. Незалежно від величини амплітуди виходу із резонансу ($a > a_{2cm}$ чи $a^* < a < a_{2cm}$) система внаслідок сильної стійкості стаціонарного значення амплітуди коливань у резонансну область більше не потрапляє.

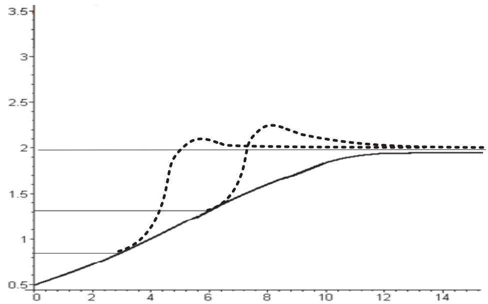

Рис. 5. Закон зміни амплітуди резонансних коливань системи Ван-дер-Поля у випадку

$a_0 < a_{2cm}$, а $a_0 < a^* < a_{2cm}$

Таким чином, якщо $a_0 < a_{2cm}$, а $a_0 < a^* < a_{2cm}$, то періодичне збурення у зоні резонансу приводить до одноразового збільшення амплітуди коливань, а, отже, наближує динамічний процес до усталеного.

Цікавішим та одночасно складнішим випадком резонансних коливань системи Ван-дер-Поля є випадок $a_0 > a_{2cm}$, а $a_0 > a^* > a_{2cm}$, тобто: резонансне значення амплітуди є більшим за стійке стаціонарне значення амплітуди коливань, проте меншим за початкове значення амплітуди. Для вказаного випадку система, увійшовши у резонанс, за короткий проміжок часу значно збільшує амплітуду коливань, а, отже, виходить із зони резонансу. Вийшовши із зони резонансу, динамічний процес описується

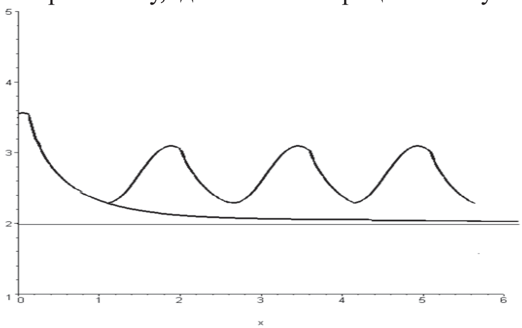

Рис. 6. Закон зміни амплітуди резонансних коливань системи Ван-дер-Поля у

випадку $a_0 > a_{2cm}$, а $a_0 > a^* > a_{2cm}$

нерезонансними рівняннями (2) до моменту часу, поки амплітуда коливань не стане близькою до a^*. Таким чином, процес виходу та входження у резонанс буде повторюватись, поки діє гармонічне збурення. Якісна картина цього резонансного випадку представлена на рис. 6. Подібне явище спостерігається і у випадку, коли період зовнішнього періодичного збурення сильно нелінійної моделі рівняння Ван-дер-Поля співпадає із періодом власних коливань усталеного руху, тобто $\frac{\pi}{\mu} = \frac{\Pi}{\sqrt{\frac{c(\nu+2)}{2m} a_{2cm}^{\frac{\nu}{2}}}}$. Вказане має місце, якщо частота зовнішнього періодичного збурення дорівнює величині $\mu = \frac{\pi}{\Pi}\sqrt{\frac{c(\nu+2)}{2m} a_{2cm}^{\frac{\nu}{2}}}$. Тоді амплітуда коливань у резонансній зоні описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a\sqrt{\pi}}{2\Pi m}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right) - \lambda a^2 \Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right)\right] -$$

$$-\frac{H}{2\pi\omega(a)}\left(\alpha_1 \cos\vartheta + \beta_1 \sin\vartheta\right),$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Pi}{\pi}\frac{\nu}{2}\sqrt{\frac{c(\nu+2)}{2m}} a_{2cm}^{\frac{\nu-2}{2}}\left(a-a^*\right) - \frac{H(\nu+2)}{4\pi a\,\omega(a)}\left(\alpha_2 \cos + \beta_2 \sin\vartheta\right). \qquad (3)$$

Як випливає із системи (3), амплітуда коливань у кінці зони резонансу є значно більшою від $a_{2cm}^{\frac{\nu}{2}}$, а, отже, система виходить із резонансу. Вийшовши із зони резонансу, динамічний процес буде описуватись диференціальними рівняннями нерезонансного руху, тобто рівняннями (2) до моменту часу, поки амплітуда коливань, наближаючись до стаціонарного значення, не переведе систему знову у новий резонанс. На рис. 7 представлено закон зміни амплітуди коливань за умови, коли період гармонічного збурення співпадає із періодом коливань усталеного руху сильно нелінійної системи Ван-дер-Поля.

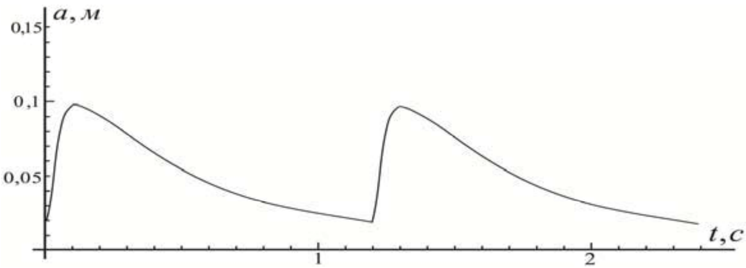

Рис. 7. Закон зміни амплітуди “усталених” резонансних коливань системи Ван-дер-Поля

Висновки.

У статті проведений ґрунтовний аналіз впливу періодичного збурення на сильно нелінійну модель рівняння Ван-дер-Поля. Встановлено наступні факти: а) у випадку, коли порогове значення резонансної амплітуди є більшим за початкове її значення, але меншим за стаціонарне значення амплітуди, то система за певний проміжок часу входить у зону резонансу. Резонансний процес є дуже короткотривалим і, вийшовши із зони резонансу, динамічний процес наближається до усталеного динамічного режиму коливань; б) у випадку, коли порогове значення амплітуди є меншим за початкове її значення, але більшим або рівним стаціонарному її значенню, то система, ввійшовши у зону резонансу, через незначний проміжок часу виходить із неї. Вийшовши із зони резонансу, завдяки сильній стійкості стаціонарного режиму коливань знову входить у резонансну зону. Так процес повторюється до тих пір, поки діє періодичне збурення. Розроблена методика дослідження коливальних процесів сильно нелінійних систем із зосередженими масами дає змогу розв`язати не тільки задачі аналізу, але і не менш важливі задачі синтезу коливних систем ще на стадії проектування, вибрати такі пружні характеристик динамічних систем, які унеможливлюють у них резонансні явища.

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механіка / Г. Каудерер. – М.: ИЛ, 1961.– 777 с.
2. *Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.– М.: Высшая школа, 1970.– 710 с.
3. *Писаренко Г. С.* Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале / Г. С. Писаренко. – Киев: Изд-во АН УССР, 1970. – 379 с.
4. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах:/Джек Хейл. – М.: Мир, 1966.– 229 с.
5. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман.– М.: Высшая школа, 1980.– 408 с.
6. *Кузмак Г. Е.* Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коефициентами / Г. Е. Кузмак // ПММ. – 1959.– 23. – №3. – С. 515–526.
7. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А. М., Перестюк Н. А. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1980. – 80 с.
8. *Wan der Pol B.* A Theory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations / B. Wan der Pol // Radio Review.– 1920.– №1. – P. 701–710.
9. *Сокіл Б. І.* Періодичні Ateb – функції у дослідженні нелінійних систем з імпульсним збуренням / Б. І. Сокіл, М. Б. Сокіл // Науковий вісник: збірник науково-технічних праць. – Львів: УДЛТУ, 2002. – Вип. 12.8. – С. 304–311.
10. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.– Москва: Наука, 1974. –501с.
11. *Пукач П.Я.* Методи аналізу динамічних процесів у нелінійних неавтономних механічних системах різної структури: автореф. дис.… д–ра техн. наук: 05.02.09 "Динаміка та міцність машин"/ П. Я. Пукач; Нац. ун-т "Львівська політехніка".– Львів, 2014.– 40 с.

Поступила 15.09.2014 р.