4. *Безпрозванный А.А., Владимирский И.А., Ненюк А.Т.* Метод измерения тепловых потерь трубопроводов тепловых сетей. Збірник наукових праць. Інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України. Вип. 19, Київ, 2003р.-с.138-140.
5. Інструкція з визначення теплових втрат через ізоляцію трубопроводів теплових мереж з використанням високоточної мікропроцесорної вимірювальної техніки И-2Т-2007, Київ 2007.
6. *Владимирский А.А., Владимирский И.А.* Аппаратно-программный комплект для многоканальной регистрации температуры. Моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць. Інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України. Вип. 30, Київ, 2005р. -с.30-32.

Поступила 19.10.2015р.

УДК 681.142 + 519.4

О.Д. Глухов

ОЦІНКА СТРУКТУРНОЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ НА БАЗІ ЕКСПАНДЕРІВ ПІНСКЕРА

This paper investigates the connectivity properties of quasi-random graphs based on Pinsker's expanders .

В данной работе исследована связность квазислучайных графов на базе экспандеров Пинскера.

Експандери або збільшувачі знаходять широке застосування в обчислювальній техніці, теорії інформації, теорії кодування та інших галузях науки і техніки[1, 2]. Зокрема значний інтерес викликають складні дискретні системи, структура я ких базується на графах, що є експандерами.

Нагадаємо деякі означення. Нехай - G граф, H - деякий його підграф. Степінню підграфа H будемо називати число $\rho(H)$, яке визначине наступним чином: $\rho(H)=\{(x,y):(x,y)\in G^1, x\in H^0, y\notin H^0\}$.

Зв'язністною функцією графа G будемо називати величину $g(x)=\min\{\rho(H):H\subset G, |H^0|=x\}$, де $1\le x\le n/2$. Також будемо користуватись наступною позначкою: $\Gamma(H)=\{y:(x,y)\in G^1, x\in H^0\}$.

Граф G - називається α -експандером для деякого α, $0<\alpha<1$, якщо для кожного $H\subset G$, $|H^0|\le n/2$ має місце нерівність: $\rho(H)\ge\alpha|H^0|$.

Розглянемо випадковий неорієнтований граф G побудований за моделлю, запропонованою Пінскером [3] (граф Пінскера): для кожної вершини $x\in G^0$ графа виберемо випадково множину $V_x\subset G^0$, $|V_x|=d$, $d\ge 3$ і визначимо множину ребер наступним чином: $(x,y) \in G^1 \Leftrightarrow y \in V_x$. Легко бачити, що $\Gamma(H) = \bigcup_{x \in H^0} V_x$

Число ребер m такого графа дорівнює dn (граф може мати кратні ребра). Можна показати, що в достатньо великою ймовірністю степені його вершин будуть обмежені. Відомо також, що граф Пінскера з ймовірністю $1-o(1)$ буде експандером.

Лема 1. Якщо G - граф Пінскера, де c - деяка стала, то для довільного його підграфа H, $|H^0| \le cn$ з ймовірністю $1-o(1)$ виконується умова: $\rho(H) \ge (d-1-\varepsilon)|H^0|$, де $\varepsilon > 0$ - довільне мале число.

Доведення. Позначимо через Q ймовірність існування підграфа H , який задовольняє умовам: $|H^0| = k,\ k \le cn,\ \rho(H) \le k$.

Легко превірити, що має місце наступна нерівність:

$$Q < \sum_{k=1}^{cn} \binom{n}{k} \binom{n-k}{(d-1-\varepsilon)k} \left(\frac{(d-\varepsilon)k}{n} \right)^{dk} < \sum_{k=1}^{cn} \binom{n}{(d-\varepsilon)k} \left(\frac{(d-\varepsilon)k}{n} \right)^{dk} .$$

Дійсно, число підграфів на k вершинах є $\binom{n}{k}$ і, якщо виконана умова $\rho(H) \ge (d-1-\varepsilon)k$, то існує така підмножина вершин $A \subseteq G^0 - H^0$, $|A| = (d-1-\varepsilon)k,$ що $\Gamma(H) \subseteq H^0 \cup A$. Оскільки число таких підмножин буде $\binom{n-k}{(d-1-\varepsilon)k}$ і $|H^0 \cup A| = (d-\varepsilon)k$, то для кожного підграфа H має місце нерівність $\mathrm{Prob}(\rho(H) \le (d-1-\varepsilon)k) \le \mathrm{Prob}(\Gamma(H) \subseteq H^0 \cup A)$, а отже і нерівність $\mathrm{Prob}(\rho(H) \le (d-1-\varepsilon)k) \le \left(\frac{(d-\varepsilon)k}{n} \right)^{dk}$.

Враховуючи, що $\binom{n}{k} < \left(\frac{en}{k} \right)^k$ отримуємо нерівність:

$$Q < \sum_{k=1}^{cn} \left(\frac{ak}{n} \right)^{\varepsilon k} , \text{ де } \ a = de^{d/\varepsilon} .$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{ax}{n} \right)^{bx}$, де $a > 1,\ b > 0,\ x \in [1, n/(2ea)]$. Неважко довести, що на даному інтервалі функція є монотонно спадаючою, і справедлива нерівність: $f(x)/f(x-1) \le 1/2,\ x \in [2, n/(2ea)]$. Отже, якщо взяти $c = (2de^{d/\varepsilon+1})^{-1}$, то, враховуючи останню нерівність, маємо оцінку

$\sum_{x=1}^{cn}\left(\frac{ax}{n}\right)^{bx} \le 2\left(\frac{a}{n}\right)^{b}$. Звідси випливає, що $Q < \sum_{k=1}^{cn}\left(\frac{ak}{n}\right)^{\varepsilon k} \le 2\left(\frac{a}{n}\right)^{\varepsilon} = \frac{2a^{\varepsilon}}{n^{\varepsilon}}$, а отже і оцінка $Q = o(1)$.

<u>Лема 2</u>. Якщо G - граф Пінскера, де c - деяка стала, то для довільного його підграфа H, $cn \le |H^0| \le n/2$ з ймовірністю $1-o(1)$ виконується умова: $\rho(H) \ge |H^0|/2$.

Доведення. Позначимо через Q ймовірність існування підграфа H, який задовольняє умовам: $|H^0| = k,\ cn \le k \le n/2,\ \rho(H) \le k/2.$.

Використовуючи міркування подібні як в доведенні леми 1, можна записати, що виконані наступні нерівності:

$$Q < \sum_{k=cn}^{n/2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k/2}\left(\frac{k}{n}\right)^{kd} < \sum_{k=cn}^{n/2}\binom{n}{1.5k}\left(\frac{k}{n}\right)^{kd}.$$

Враховуючи, що $d \ge 3$ і $k \ge cn$, отримаємо наступні співвідношення:

$$Q < \sum_{k=cn}^{n/2}\left(\frac{en}{1.5k}\right)^{1.5k}\left(\frac{k}{n}\right)^{kd} = \sum_{k=cn}^{n/2}\left(\frac{e}{1.5}\right)^{1.5k}\left(\frac{k}{n}\right)^{k(d-1.5)} < \sum_{k=cn}^{n/2}\left(\frac{ek}{1.5n}\right)^{1.5k}$$

Зауважимо, що $\left(\frac{ek}{1.5n}\right)^{1.5k} < \left(\frac{e}{3}\right)^{1.5cn}$ і оскільки $\frac{e}{3} < 1$, то маємо оцінку:

$$Q < (n/2)\left(\frac{e}{3}\right)^{1,5cn} = o(1).$$

<u>Теорема1</u>. Для випадкового графа Пінскера існує така стала c, що:

$g(x) \ge (d-1-\varepsilon)x$, при $1 \le x \le cn$,

$g(x) \ge 0,5x$, при $cn < x \le n/2$.

Доведення. Одразу випливає з лем 1, 2 та означення $g(x)$ -зв'язністної функції графа.

Оскільки означений вище випадковий граф G є експандером з ймовірністю $1-o(1)$, будемо такий експандер G називати експандером Пінскера.

Розглянемо тепер квазівипадковий граф $G(p)$ на базі даного експандера. Нагадаємо, що квазівипадкові графи писують системи, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків [4, 5].

Нехай G - звичайний граф з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0| = n$, $|G^1| = m$, квазівипадковим графом на основі графа G називається граф $G(p)$ з множиною $(G(p))^0 = G^0$ вершин і з випадковою множиною $U = (G(p))^1$, ребер для якого виконуються умови: Prob $(u \in U) = p$ при $u \in (G)^1$ і Prob $(u \in U) = 0$ при $u \notin (G)^1$.

Величину $\lambda = mq,\ q = 1 - p$ будемо називати декрементом квазівипадкового графа. Очевидно, що декремент це є математичне сподівання величини $|U|\backslash m$, тобто числа розривів зв'язків. Пороговим декрементом називається найбільше значення декременту, при якому граф $G(p)$ залишається зв'язним з ймовірністю $1 - o(1)$.

Таким чином, пороговий декремент є певною характеристикою стійкості структури системи до випадкових відмов.

Наступна теорема дає оцінку пороговому декременту експандера Пінскера.

Теорема 2. Пороговий декремент квазівипадкового графа $G(p)$ на основі експандера Пінскера не менше an^{β}, де $a > 0$ - довільна стала, $\beta = \frac{d-2}{d-1} - \varepsilon$, а $\varepsilon > 0$ - довільна мала стала.

Доведення.

Нехай $G(p)$ - квазівипадковий граф на основі екпандера Пінскера і $q = an^{\beta - 1}$. Припустимо, що граф $G(p)$ є незв'язним, тоді він має компоненту зв'язності порядок якої не більше $n/2$.

Для ймовірності Q існування такої зв'язної компоненти маємо наступну нерівність:

$$Q \le S = \sum_{1 \le k \le n/2} \binom{n}{k} q^{g(k)} .$$

Розіб'ємо дану суму наступним чином: $S = S_1 + S_2$, де:

$$S_1 = \sum_{1 < k \le cn} \binom{n}{k} q^k , \quad S_2 = \sum_{cn < k \le n/2} \binom{n}{k} q^k .$$

Оцінимо кожну з цих сум окремо. Спочатку оцінимо S_1.

$$S_1 = \sum_{1 < k \le cn} \binom{n}{k} q^{(d-1-\varepsilon)k} < \sum_{1 < k \le cn} n^k \frac{a^{(d-1-\varepsilon)k}}{n^{(d-1-\varepsilon)(1-\beta)k}} = \sum_{1 < k \le cn} \frac{a^{(d-1-\varepsilon)k}}{n^{\theta k}} ,$$

де $\theta = \varepsilon(d - 1 - 1/(d-1) - \varepsilon)$. Легко перевірити, що при $d \ge 3$ $\theta > 0$.

Оскільки для достатньо великих n $a^{(d-1-\varepsilon)} / n^{\theta k} < 0{,}5$, то очевидно, що $S_1 < 2\beta^{(d-1-\varepsilon)} / n^{\theta}$ і тому $S_1 = o(1)$.

$$S_2 = \sum_{cn < k \le n/2} \binom{n}{k} q^k < \sum_{cn < k \le n/2} \left(\frac{en}{k}\right)^k \frac{a^{0,5k}}{n^{0,5(1-\beta)k}} .$$

Але оскільки $k \ge cn$, то $\left(\frac{en}{k}\right)^k \le \left(\frac{e}{c}\right)^k$ і тому вірна наступна нерівність:

$S_2 = \sum_{cn<k\le n/2} \left(\frac{a^{0,5}e}{cn^{0,5(1-\beta)}} \right)^k$. Беручи до уваги, що $\beta < 1$ і отже для достатньо великих n має місце нерівність $\frac{a^{0,5}e}{cn^{0,5(1-\beta)}} < 0,5$, отримуємо, що $S_2 < 2\left(\frac{a^{0,5}e}{n^{0,5(1-\beta)}} \right)^{cn}$, і тому $S_2 = o(1)$.

Таким чином, $S = o(1)$, звідки і випливає твердження теореми.

1. *Diestel R.* Graph Theory. -NewYork , Springer-Verlag, 2000.-322p.
2. *Hoory S., Linial N., Wigderson A.* Expander graphs and their applications. - Bulletin (new series) of the american mathematical society, V43, N4, October 2006, Pages 439–561.
3. *M. S. Pinsker*. On the complexity of a concentrator. - In 7th International Telegraffic Conference, 1973, p. 318/1–318/4.
4. *Глухов О.Д., Коростіль Ю.М*. Структурна безпека складних дискретних систем при випадкових відмовах. - Моделювання та інформаційні технології. Зб. наукових праць ІПМЕ НАНУ, вип. 27, Київ, 2004, с. 91-95.
5. *Глухов О.Д.* Експандери, сильні експандери та квазівипадкові графи.- Моделювання та інформаційні технології. Зб. наукових праць ІПМЕ НАНУ, вип.70, Київ, 2013, с. 54-58.

Поступила 26.10.2015р.

УДК 621.56 : 629.7

А.А. Чирва, г. Киев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЕРВИЧНОМ УЗЛЕ ОХЛАЖДЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОДГОТОВКИ ВОЗДУХА

Abstract. The article presents the basic equations for the regulator, that can be used execute transient simulation of hydraulic processes in the regulator. The article also presents the mathematical model for calculating the hydraulic mode in the pipelines and in the channels of the heat exchanger.

Введение. На самолете необходимый для работы пневматических систем воздух отбирается от двигателей. Температура и давление отобранного воздуха в зависимости от режима полета варьируются в широких пределах, а для нормальной работы потребителей на их входе указанные параметры воздуха необходимо поддерживать на одном значении с