Входными данными являются давление в магистральном трубопроводе и управляющие импульсы на электромагниты управляющего устройства. На выходе определяется угол поворота заслонки для дальнейшего гидравлического расчета магистрального трубопровода.

Поскольку использована неявная схема составления конечноразностных уравнений, на каждом шаге по времени происходит увязка решения методом Зейделя.

На рис.3 приведены результаты моделирования: изменение угла поворота заслонки при различном сочетании сигналов выданных блоку управления управляющему механизму.

Выводы. В статье представлена математическая модель пневматического крана-регулятора, которая позволяет определить реакцию регулятора, в виде поворота заслонки, на изменение атмосферного давления и параметров воздуха в магистрали перед регулятором, а также на управляющие сигналы от электронного блока управления. Положение регулирующей заслонки используется для определения давления воздуха в системе за регулятором с помощью модели расчета нестационарных гидравлических процессов в трубопроводе.

1. *Хлистун А.И.* Динамичские характеристики регулятора давления пневматической системы самолета// Пром. гидравлика и пневматика. - 2004. - №3(5).- С. 62-64.
2. *Идельчик И.Е.* Гидравлические сопротивления. - Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.:Машиностроение, 1992.-559с.
3. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. – Изд. 3-е, перераб. – М.: Наука, 1969. – 824 с.

Поступила 27.10.2016р.

УДК 681.142 + 519.4

О. Д. Глухов, м. Київ

ПРО СКЛАДНІ ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ ВИСОКОЇ СТРУКТУРНОЇ СТІЙКОСТІ

This paper investigates the connectivity properties of quasi-random graphs based on Erd˝os- R´enyi expanders .

В данной работе исследована связность квазислучайных графов на базе экспандеров Эрдёша-Реньи.

В цій роботі буде показано, як на основі випадкового графа моделі Ердеша-Реньї побудувати складну дискретну системи високої структурної стійкості.

Ми будемо розглядати випадковий граф $G_{n,p}$ моделі Ердеша-Реньї [1], де $p = a\ln n/n$, $a > 2$ - деяка стала.

Буде показано, що такий граф :

1) З ймовірністю $1-o(1)$ має степінь не більше, ніж $ca\ln n$, де c - деяка стала.
2) З ймовірністю $1-o(1)$ є експандером [2].

Далі, буде показано, що квазівипадковий граф $G(p^*)$ [3, 4], де $p^* = const$, $0 < p^* < 1$, побудований на основі описаного вище графа $G_{n,p}$ буде зв'язним з ймовірністю $1-o(1)$, якщо a - достатньо велике число, і навпаки буде незв'язним з ймовірністю $1-o(1)$, якщо a - достатньо мале число (a - залежне від p^*).

Лема 1. Граф $G_{n,p}$, де $p = a\ln n/n$, $a > 1$- деяка стала, з ймовірністю $1-o(1)$ має максимальний степінь не більше, ніж $ca\ln n$, де $c \le e^2$.

Доведення. Позначимо через Q - ймовірність того, що в даному графі існує хоча б одна вершина степеня не менше, ніж $ca\ln n$, а через Q_1 ймовірність того, що деяка вершина даного графа має степінь не менше, ніж $ca\ln n$. Маємо наступні нерівності:

$$Q_1 \le \sum_{k \ge ca\ln n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sum_{k \ge cnp} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} < \sum_{k \ge cnp} \left(\frac{en}{k}\right)^k p^k = \sum_{k \ge cnp} \left(\frac{enp}{k}\right)^k .$$

Оскільки $\dfrac{enp}{k} < \dfrac{1}{2}$, то $Q_1 < 2\left(\dfrac{e}{c}\right)^{cnp} \le 2\exp(-e^2 np) = 2n^{-e^2 a}$.

Отже, для математичного сподівання M числа вершин степеня більше ніж $c\ln n$ маємо оцінку: $M \le nQ \le 2n^{1-e^2 a} = o(1)$, звідки , враховуючи, що $e^2 a > 1$, отримуємо, що $Q = o(1)$. Таким чином лема доведена.

Лема 2. Граф $G_{n,p}$, де $p = a\ln n/n$, $a > 2$- деяка стала, з ймовірністю $1-o(1)$ є експандером, тобто виконується умова: $\forall H \subset G : |H^0| = k \le n/2 \Rightarrow \rho(H) \ge \alpha ak\ln n$ для деякого α, наприклад, можна взяти $\alpha = \dfrac{1}{4e}\left(\dfrac{a-2}{a}\right)^2$.

Доведення. Нехай $H \subset G$ - деякий підграф графа G, $|H^0| = k \le n/2$, $s = k(n-k)$, позначимо $P_\alpha(k) = \mathrm{Prob}[\rho(H) < r]$, де $r = \alpha knp = \alpha ak \ln n$.

$$P_\alpha(k) = \sum_{t<r} x_t \text{, де } x_t = \binom{s}{t} p^t q^{n-t}.$$

Оскільки $\dfrac{x_{t+1}}{x_t} = \dfrac{s-t}{t+1} \cdot \dfrac{p}{q} > 1$, то маємо наступну нерівність:

$P_\alpha(k) < r \cdot \binom{s}{r} p^r q^{s-r} < r\left(\dfrac{esp}{rq}\right)^r q^s$. Враховуючи, що

$kn/2 \le s \le nk$, $q = 1 - p < e^{-p}$, отримуємо нерівність:

$$P_\alpha(k) < r\left(\frac{e}{\alpha q}\right)^r q^s < \alpha knp \cdot \left(\frac{2e}{\alpha}\right)^{\alpha knp} \cdot e^{-knp/2}.$$

Зауважимо, що при $0 < \alpha < 0.39$ має місце нерівність:

$\alpha \cdot (\ln 2 + 1 - \ln \alpha) < \sqrt{e\alpha}$, а тому при $\alpha = \dfrac{1}{4e}\left(\dfrac{a-2}{a}\right)^2$ маємо :

$\left(\dfrac{2e}{\alpha}\right)^\alpha \le e^{(a-2)/2a-\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$.

Таким чином отримуємо нерівності:

$$P_\alpha(k) < \alpha ak \ln n \cdot \left(\frac{2e}{\alpha}\right)^{\alpha knp} e^{-knp/2} = \alpha ak \ln n \cdot \exp(-(1+a\varepsilon)k \ln n),$$

$$P_\alpha(k) < \alpha ak \ln n \cdot n^{-(1+a\varepsilon)k}.$$

Далі оцінимо математичне сподівання M числа таких підграфів $H \subset G$, $|H^0| = k \le n/2$, що $\rho(H) < r$.

$$M = \sum_{k \le n/2} \binom{n}{k} P_\alpha(k) < \alpha a \ln n \sum_{k \le n/2} \binom{n}{k} \cdot k \cdot n^{-(1+a\varepsilon)k}.$$

Відомо, що $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^k = nx(1+x)^{n-1}$, а отже виконані наступні співвідношення:

$$M < \alpha a \ln n \sum_{k \le n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot n^{-(1+a\varepsilon)k} = \alpha a \ln n \cdot n^{-a\varepsilon} (1+n^{-(1+a\varepsilon)})^{n-1} .$$

Але очевидно, що $(1+n^{-(1+\varepsilon)})^{n-1} = 1+o(1)$, а отже

$M < \alpha a \ln n \cdot n^{-a\varepsilon} \cdot (1+n^{-(1+a\varepsilon)})^{n-1} = o(1)$, звідки й випливає твердження леми 2.

Позначимо через $\xi_k(G)$ число зв'язних s - підграфів графа G .

Вірна наступна лема, доведення якої тут опускаємо.

Лема 3. Якщо $1-o(1)$ - граф степеня s, то $\xi_k(G) \le ns^{2k-2}$.

Теорема 1. Нехай $G(p)$ квазівипадковий граф на основі графа G, $q = 1-p = e^{-\theta}$, де $\theta > 0$, деяка стала, який задовольняє наступним умовам:

1) усі вершини графа G степені не більше $\beta \ln n$;
2) G є α - експандером в наступному сенсі :
   $\forall H \subset G : |H^0| = k \le n/2 \Rightarrow \rho(H) \ge \alpha a k \ln n$;
3) $\theta\alpha a > 1$.

Тоді $G(p)$ буде зв'язним з ймовірністю $1-o(1)$.

Доведення. Позначимо через Q - ймовірність того граф $G(p)$ буде незв'язним. Якщо граф $G(p)$ незв'язний , то в $G(p)$ є деяка зв'язна компонента з числом вершин не більше, ніж $n/2$. Для математичного сподівання M числа таких компонент маємо наступні оцінки:

$$M < \sum_{k=1}^{n/2} \xi_k(G) q^{\alpha k \ln n} \le \sum_{k=1}^{n/2} n(\beta \ln n)^{2k-2} n^{-\theta\alpha a k} ,$$

$$M < \frac{n}{(\beta \ln n)^2} \sum_{k=1}^{n/2} ((\beta \ln n)^2 n^{-\theta\alpha a})^k .$$

Оскільки $\theta\alpha a > 1$, то можна вважати, що $\theta\alpha a = 1+\varepsilon, \varepsilon > 0$, а тому для достатньо великих n :

$(\beta \ln n)^2 n^{-\theta\alpha a} = (\beta \ln n)^2 n^{-1-\varepsilon} < 1/2$, а отже :

$$M < \frac{2n}{(\beta \ln n)^2} (\beta \ln n)^2 n^{-1-\varepsilon} = 2n^{-\varepsilon} = o(1) .$$

Звідси одразу випливає, що $Q = o(1)$, звідки й випливає твердження теореми.

Наслідок. Для кожного p^*, де $0 < p^* < 1$, $p^* = const$, існує таке

$a > 2$, що квазівипадковий граф $G(p^*)$ на основі графа випадкового графа $G_{n,p}$, де $p = a\ln n / n$, буде зв'язним з ймовірністю $1 - o(1)$.

Таким чином, зв'язність квазівипадкового графа $G(p^*)$ при заданій сталій ймовірності $q^* = 1 - p^*$ розрива ребра може бути забезпечена з ймовірністю $1 - o(1)$, якщо вибрати граф G степеня $a\ln n$, де $a > 2$ - достатньо велике число (залежне від q^*).

Далі буде показано, що коли базою квазівипадкового графа $G(p^*)$ є граф степеня $a\ln n$, де a достатньо мале, то в цьому випадку граф $G(p^*)$ навпаки буде незв'язним з ймовірністю $1 - o(1)$.

Теорема 2. Якщо $G(p)$ квазівипадковий граф на основі графа G , де $q = 1 - p = e^{-\theta}$, $\theta > 0$, а граф G має степінь не більше, ніж $a\ln n$ і $a\theta < 1$, то граф $G(p)$ буде незв'язним з ймовірністю $1 - o(1)$.

Доведення. Нехай граф $G(p)$ - задовольняє умовам теореми і нехай $d = a\ln n$ - степінь графа G . Як відомо [2], в графі G можна вибрати множину B $n/(d+1)$ попарно несуміжних вершин. Розглянемо тепер граф $G(p)$ і оцінимо ймовірність того, що хоча б одна з його вершин ізольована. Очевидно, що ймовірність того, що дана вершина не ізольована не більше $1 - q^d$. Враховуючи той факт, що усі вершини з B є попарно несуміжними, маємо наступну оцінку ймовірності $Q(B)$ того, що усі вершини з B є не ізольованими :

$$Q(B) \le (1 - q^d)^{n/(d+1)} < \exp(-e^{\theta d} n/(d+1)),$$ або

$$Q(B) < \exp(-n^{1-a\theta} /(a\ln n + 1)).$$

Враховуючи тепер умову $a\theta < 1$, отримуємо, що $Q(B) = o(1)$, а отже $P = 1 - o(1)$, що і треба було довести.

1. *Erdos P., Renyi A.* On the evolution of random graphs. - Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1960.V5. P.17-61.
2. *Diestel R.* Graph Theory. -NewYork , Springer-Verlag, 2000.-322р.
3. *Глухов О.Д., Коростіль Ю.М.* Структурна безпека складних дискретних систем при випадкових відмовах. - Моделювання та інформаційні технології. Зб. наукових праць ІПМЕ НАНУ, вип. 27, Київ, 2004, с. 91-95.
4. *Глухов О.Д.* Експандери, сильні експандери та квазівипадкові графи.- Моделювання та інформаційні технології. Зб. наукових праць ІПМЕ НАНУ, вип.70, Київ, 2013, с. 54-58.

Поступила 13.10.2016р.