Висновки

Виконані роботи – це реалізація однієї із складових загальної технології візуального проектування додатків сценарного типу, яка для спеціалістів галузі є інструментом побудови систем підтримки компетентності ПУСО при управлінні об'єктами.

Роботи підтверджують доцільність використання технології, так як реалізують необхідний початковий етап підготовки до проектування імітатора інтерфейсу АРМ об'єкта спеціального призначення і його екранних форм у зручний, наглядний, ефективний і легкий для освоювання спосіб.

1. *Самойлов В.Д., Бальва А.А., Максименко Е.А.* Структура и технология построения графической модели приложения сценарного типа//Збірник наукових праць ІПМЕ ім.Г.Є.Пухова НАН України. К.:2013, Вып. 68, С.3-11.
2. *Самойлов В.Д., Бальва А.А., Максименко Е.А.* Построение интерактивной навигации сценарного типа//Збірник наукових праць Моделювання та інформаційні технології, К.:2014, Вип.71, С. 29-36.
3. *Абрамович Р.П., Бальва А.А., Самойлов В.Д.* Построение модели навигации для компьютерных тренажеров и приложений сценарного типа. – Электронное моделирование, 2014 – т. 36- №1, С.97-103.
4. *Леоненков А.* Самоучитель UML2.-СПб.: БХВ-Петербург, 2007.– 576 с.

Поступила 19.09.2016р.

УДК 519.218

Б. Б. Млинко, М. Є. Фриз, м. Тернопіль
Л. М. Щербак, м. Київ

МЕТОДОЛОГІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ СИГНАЛІВ НА ОСНОВІ УМОВНИХ ЛІНІЙНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Abstract. The fundamentals of methodology of stochastic signal mathematical modeling using conditional linear random processes have been developed. In particular, the basic notions, the method of mathematical model creating, and approach to statistical analysis of its characteristics have been considered.

Вступ

Розробк а та впровадження інформаційних систем опрацювання стохастичних сигналів є актуальною проблемою при вирішенні завдань технічної та медичної діагностики, автоматизованого керування, комп'ютерного еколого-економічного моніторингу, аналізу та прогнозування економічних показників і ресурсоспоживання, обміну та захисту інформації, комп’ютерного імітаційного моделювання досліджуваних сигналів та ін.

Одним із найважливіших етапів у даному контексті є побудова адекватних математичних моделей інформативних сигналів та завад, які б відображали фізичні чи економічні механізми їх породження, були придатними для вирішення задач ідентифікації своїх характеристик та побудови на їх основі комп’ютерних імітаційних моделей.

У теоретичних та прикладних задачах математичного, комп’ютерного моделювання та опрацювання випадкових сигналів поширеними є лінійні моделі, зокрема лінійні випадкові процеси та послідовності [1, 2]. Дуже поширеними такі моделі є в тих прикладних областях, де досліджуваний сигнал можна зобразити у вигляді суми великого числа незалежних імпульсів, які виникають у пуассонівські моменти часу. Однак, в багатьох задачах ці імпульси є випадковими і, в загальному випадку, стохастично залежними функціями. Такі сигнали можна вивчати з використанням математичних моделей у вигляді умовних лінійних випадкових процесів [3].

Постановка задачі

У роботі [3] означено умовний лінійний випадковий процес (УЛВП) як стохастичний інтеграл від випадкової функції за процесом із незалежними приростами, отримано вирази для математичного сподівання та кореляційної функції означеного процесу, показано умови, за яких він буде стаціонарним, а також циклостаціонарним випадковим процесом. Для випадку процесу з незалежними приростами без гауссівської компоненти УЛВП (на відміну від лінійних процесів) дозволяє здійснювати математичне моделювання сигналів у вигляді суми стохастично залежних випадкових імпульсів, що виникають у пуассонівські моменти часу.

Завданням даної статті є обґрунтування сукупності задач, які необхідно вирішувати при здійсненні математичного моделювання стохастичних сигналів із використанням умовних лінійних випадкових процесів.

Вирішення задачі

При здійсненні математичного моделювання стохастичних сигналів на основі лінійних та умовних лінійних випадкових процесів, як правило, слід вирішити такі основні задачі [1 - 8]:

- теоретичне обґрунтування математичної моделі досліджуваного сигналу на основі аналізу апріорних даних про фізичну (можливо, економічну чи ін.) природу об’єкта, який його генерує чи породжує;
- теоретичний аналіз математичної моделі, зокрема, таких її ймовірнісних характеристик як характеристична функція, моментні та кумулянтні функції, спектральні характеристики; на даному етапі можна обґрунтувати, зокрема, умови, за яких побудована математична модель буде належати до класу стаціонарних чи циклостаціонарних [9] випадкових процесів, що важливо для подальшого вибору методів її експериментального аналізу;

- обґрунтування методів та алгоритмів статистичного аналізу математичної моделі (відповідно до конкретної прикладної задачі, для якої побудовано модель), для чого часто ще необхідно побудувати модель досліджуваного сигналу з дискретним часом, а також обґрунтувати ергодичні властивості використовуваної моделі; на даному етапі можна також попередньо ідентифікувати комплекс інформативних ознак побудованої моделі (якщо вона використовується, наприклад, в задачі розпізнавання образів);
- розробка інформаційної системи, планування та проведення експериментальних досліджень, експериментальне підтвердження адекватності моделі досліджуваному процесу та прикладній задачі, для вирішення якої вона розроблена;
- розробка та використання комп'ютерної імітаційної моделі досліджуваного сигналу.

Розглянемо тепер детальніше основні аспекти наведених вище задач. Наведемо спочатку означення лінійного та умовного лінійного випадкового процесу.

Нехай $\eta(\tau), \tau \in (-\infty, \infty)$, $\mathbf{P}(\eta(0) = 0) = 1$ − дійсний гільбертовий стохастично неперервний випадковий процес із незалежними приростами (породжуючий процес), позначимо також: $\mathbf{M}\eta(\tau) = a(\tau)$ і $\mathbf{D}\eta(\tau) = b(\tau)$, $\forall\tau$.

У роботах [1, 2] дійсний лінійний випадковий процес $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$, заданий на деякому ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathsf{F}, \mathbf{P}\}$ означено так:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t)\, d\eta(\tau),\ t \in (-\infty, \infty)\,, \tag{1}$$

де $h(\tau, t), \tau, t \in (-\infty, \infty)$ − дійсна *невипадкова* функція (ядро) така, що $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau, t)|\, d\tau < \infty, \forall t$.

Умовним лінійним випадковим процесом $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$, будемо називати стохастичний інтеграл виду [3]:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t)\, d\eta(\tau)\,, \tag{2}$$

де $\varphi(\tau, t), \tau, t \in (-\infty, \infty)$ − дійсна *випадкова* функція (ядро); випадкові функції $\varphi(\tau, t)$ і $\eta(\tau)$ є стохастично незалежними.

Для того, щоб стохастичний інтеграл (2) існував у розумінні збіжності в середньоквадратичному послідовності відповідних інтегральних сум необхідно й достатньо, щоб виконувалась така умова [3]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\big(\varphi(\tau_1, t)\varphi(\tau_2, t)\big) da(\tau_1) da(\tau_2) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\varphi^2(\tau, t)\, db(\tau) < \infty\,. \tag{3}$$

Першим етапом при використанні УЛВП у багатьох задачах математичного моделювання є встановлення фізичного (економічного чи ін.) механізму породження досліджуваного сигналу, який дав би підстави стверджувати (чи припускати), що цей сигнал може бути представлений у вигляді суми великого числа випадкових імпульсів, які виникають у випадкові моменти часу $\tau_k, k \in \mathbf{Z}$, що утворюють пуассонівський потік. Причому, імпульси не обов'язково повинні бути стохастично незалежними функціями. Тоді породжуючий процес $\eta(\tau), \tau \in (-\infty, \infty)$ буде узагальненим пуассонівським процесом (позначимо величини його стрибків: $\alpha_k, k \in \mathbf{Z}$), а УЛВП (2) набуває вигляду: $\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(\tau_k, t)$. Обгрунтована таким конструктивним способом математична модель буде мати відповідне фізичне підґрунтя, що є важливим аргументом її адекватності досліджуваному сигналу.

Основні властивості моментних функцій УЛВП наведено в [3], вони залежать від характеристик ядра та породжуючого процесу. Актуальною є також задача ймовірнісного аналізу математичної моделі на основі УЛВП методом характеристичних функцій.

Очевидно, що крім адекватності досліджуваному сигналу та можливості здійснення теоретичного аналізу його характеристик, математична модель повинна бути придатною для їх ідентифікації на основі експериментальних досліджень. З цією метою можна використовувати УЛВП з дискретним часом (умовні лінійні випадкові послідовності).

Дійсною умовною лінійною випадковою послідовністю ξ_t, $t \in \mathbf{Z}$ будемо називати випадкову послідовність виду [10]:

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t} \zeta_\tau , \tag{4}$$

де $\varphi_{\tau,t}$, $t, \tau \in \mathbf{Z}$ - дійсна випадкова функція, для якої виконуються умови $\mathbf{M} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \left|\varphi_{\tau,t}\right|^p < \infty$, $\forall t \in \mathbf{Z}$, $p = 1, 2$; ζ_τ, $\tau \in \mathbf{Z}$ - незалежна від $\varphi_{\tau,t}$ послідовність дійсних гільбертових незалежних випадкових величин.

Нехай ξ_t - стаціонарна УЛВП. Тоді важливим для практики її зображенням є послідовність авторегресії з випадковими коефіцієнтами, що означується наступним чином:

$$\xi_t = \sum_{k=1}^{p} (a_k + \alpha_{k,t}) \xi_{t-k} + \zeta_t, t \in \mathbf{Z}, \tag{5}$$

де $p \in \mathbf{N}$ - порядок моделі; ζ_t, $t \in \mathbf{Z}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з математичним сподіванням $\mathbf{M}\zeta_t = 0$ та дисперсією $\mathbf{D}\zeta_t = \sigma^2$, $\forall t \in \mathbf{Z}$; $(a_1, a_2, ..., a_p)$ - вектор невипадкових дійсних коефіцієнтів; $(\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, ..., \alpha_{p,t})$, $t \in \mathbf{Z}$ - послідовність незалежних однаково розподілених векторів, компоненти яких є незалежними випадковими величинами з математичними сподіваннями $\mathbf{M}\alpha_{k,t} = 0$, $k = \overline{1,p}$, $t \in \mathbf{Z}$ та дисперсіями $\mathbf{D}\alpha_{k,t} = \sigma_k^2$, $k = \overline{1,p}$, $t \in \mathbf{Z}$; вектори $(\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, ..., \alpha_{p,t})$ не залежать від ζ_t та від $\xi_{t-1}, \xi_{t-2}, \ldots$.

Для статистичного оцінювання параметрів $(a_1, a_2, ..., a_p)$, $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_p^2)$, σ^2 моделі (5) можна скористатися методами, які висвітлені, наприклад, в роботі [11]. Конструктивний характер моделі (5) дозволяє ефективно використовувати її в задачах комп'ютерного імітаційного моделювання досліджуваних сигналів.

При здійсненні прикладного статистичного аналізу стохастичних сигналів важливою й завжди бажаною для дослідника їх властивістю є ергодичність, що дозволяє значно зменшити необхідний обсяг спостережень. На практиці, як правило, ергодичність досліджуваного процесу просто пустулюється, тому важливе значення має застосування таких математичних моделей, для яких ергодичність була б характерною для них властивістю. У даному контексті зазначимо, що стаціонарні лінійні випадкові процеси мають властивість ергодичності [12, 13]. Послідовність авторегресії з випадковими коефіцієнтами (5) буде стаціонарною в широкому розумінні та ергодичною за виконання умови $\sum_{k=1}^{p} \left(a_k^2 + \sigma_k^2\right) < 1$ [11].

Висновки

У статті проаналізовано основні поняття та методи методології математичного моделювання стохастичних сигналів з використанням умовних лінійних випадкових процесів неперервного та дискретного аргументу. Зокрема, подано спосіб обґрунтування та теоретичного аналізу математичної моделі, виходячи з апріорних даних про фізичну природу породження досліджуваного сигналу, запропоновано підхід до його статистичного аналізу за результатами експериментів.

Запропонована методологія надає досліднику сукупність інструментів для цілеспрямованого та системного застосовування умовних лінійних випадкових процесів у задачах математичного моделювання сигналів.

1. *Марченко Б.Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике / Б. Г. Марченко. — К. : Наукова думка, 1973. — 191 с.

2. *Марченко Б.Г.* Линейные случайные процессы и их приложения / Б. Г. Марченко, Л. Н. Щербак. — К. : Наукова думка, 1975. — 143 с.
3. *Фриз М.Є.* Властивості умовних лінійних процесів та їх застосування в прикладних задачах математичного моделювання стохастичних сигналів / М. Є. Фриз // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. - Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип. 6. – С. 228 – 238.
4. *Pierre P. A.* Central Limit Theorems for Conditionally Linear Random Processes / P. A. Pierre // SIAM J. of Applied Math. – 1971. – Vol. 20, no. 3– PP. 449 — 461.
5. *Марченко Б.Г.* Характеристична функція умовного лінійного випадкового процесу як математичної моделі газоспоживання / Б. Г. Марченко, Н. В. Мулик, М. Є. Фриз // Електроніка та системи управління. – 2006. – №3 (9). – С. 40 – 46.
6. *Фриз М.Є.* Обґрунтування математичної моделі водоспоживання у вигляді умовного лінійного випадкового процесу / М. Є. Фриз, Т. В. Михайлович // Електроніка та системи управління. – 2010. – №3 (25). – С. 137 – 142.
7. *Fryz M.* Conditional Linear Periodical Random Process as a Mathematical Model of Photoplethysmographic Signal / M. Fryz, B. Mlynko, O. Mul, N. Zagorodna // Scientific J. of Riga Technical University. – 2010. – Vol. 45. – PP. 82 – 86.
8. *Fryz M.* Conditional Linear Random Process as a Mathematical Model of Radar Noise / M. Fryz, L. Scherbak // Proc. Microwaves, Radar and Remote Sensing Symp., Kiev, Ukraine. – 2011. – PP. 367 – 370.
9. *Gardner W.A.* Cyclostationarity : Half a century of research / W. A. Gardner, A. Napolitano, L. Paura // Signal Processing. – Elsevier. – 2006. – № 86 (4). – P. 639 – 697.
10. *Фриз М.Є.* Умовні лінійні випадкові послідовності / М. Є. Фриз // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. – К. : Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – 2011. – Вип. 60. – С. 41 – 45.
11. *Nicholls D.F.* Random Coefficient Autoregressive Models: an Introduction. Lecture Notes in Statistics, 11 / D. F. Nicholls, B. G. Quinn. - New York : Springer Verlag, 1983. – 154 p.
12. *Фриз М.Є.* Властивість перемішування та ергодичність лінійних процесів у задачах математичного моделювання та статистичного аналізу випадкових сигналів / М. Є. Фриз, Л. М. Щербак // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. праць. – К. : Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – 2009. – Вип. 51. – С. 53 – 57.
13. *Фриз М.Е.* Эргодические свойства линейных процессов в задачах математического моделирования и статистического анализа случайных сигналов / М. Е. Фриз, Л. Н. Щербак // Электронное моделирование. – К. : Институт проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. - 2010. – Т.32. - №1. С. 3 – 14.

Поступила 8.09.2016р.