

1. Dong P. Welding residual stresses and effects on fracture in pressure vessel and piping components: A millennium review and beyond / P. Dong, F.W. Brust // *Journal of Pressure Vessel Technology*. – 2000. – Vol. 122. – P.329-338.
2. Hobbacher A. Recommendations for Fatigue Design of Welded Joints and Components / A. Hobbacher // *IIW XIII-2151r4-07/XV-1254r4-07*. Paris: IIW. – 2008. – 149 p.
3. Xue L. Damage accumulation and fracture initiation in uncracked ductile solids subject to triaxial loading / L. Xue // *Int. J. of Solids and Structures*. – № 44. – 2007. – P.5163-5181.
4. Карзов Г.П. Физико-механическое моделирование процессов разрушения / Г.П. Карзов, Б.З. Марголин, В.А. Швецова. С-Пб.: Политехника, 1993. – 391 с.
5. Lemaitre J. Engineering Damage Mechanics. Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures / J. Lemaitre, R. Desmorat. – Berlin: Springer-Verlag, 2005. – 292 p.
6. Махненко В.И. Ресурс безопасной эксплуатации сварных соединений и узлов современных конструкций / В.И. Махненко – Киев: Наукова думка, 2006. – 618 с.
7. Xue L. Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials / L. Xue // *Engineering Fracture Mechanics* – № 75. – 2008. – P.3343-3366.
8. Milenin O. Numerical prediction of the current and limiting states of pipelines with detected flaws of corrosion wall thinning / O. Milenin // *Journal of hydrocarbon power engineering*. – Vol. 4. – Issue 1. – 2017. – P.26-37.

Поступила 1.03.2018р.

УДК: 519.63

В.В. Хайдуров, Київ

БАГАТОСІТКОВИЙ МЕТОД ВИРІШЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРО- ТА ТЕПЛОЕНЕРГЕТИКИ

Abstract. In the article on the example of optimization of thermophysical characteristics of internal heaters of an electric industrial furnace, the applied problem of finding a numerical solution of IHCP for the search of optimal temperatures is described. The aim of the work is the modification and application of multigrid method of IHCP solution. On the basis of the proposed method, mathematical and computer modeling of thermal processes in the elements of turbomachines, boiler plants, internal combustion engines, non-ferrous metallurgy aggregates, and the determination of the thermophysical properties of polycrystalline superhard materials is carried out.

Вступ. Для вирішення проблем, які описані в [3, 4], одним із основних інструментів є вирішення обернених задач теплопровідності (ОЗТ). Більшість ОЗТ мають некоректну постановку. Даний клас задач відноситься до класу задач на умовний екстремум, де в якості обмеження виступає саме ж рівняння теплопровідності.

Пошук чисельного розв'язку подібних задач має ряд труднощів [2, 5]. Однією із основних труднощів ОЗТ – питання коректності постановки задачі.

Від того, наскільки коректно поставлено математичне формулювання технічної задачі, залежить ефективність застосування чисельних методів розв'язку даного класу задач та отриманих достовірних результатів в цілому. Другим не менш важливим фактором є час пошуку розв'язку певної ОЗТ. Навіть з використанням сучасних обчислювальних машин час знаходження чисельного розв'язку однієї ОЗТ може займати значний проміжок часу.

Значна увага приділялась дослідженням теплофізичних характеристик внутрішніх нагрівачів електричних промислових печей [1; 5; 6], які зображені на рис. 1.



Рис. 1. Приклади електричних промислових печей

Постановка завдання

Прикладну задачу на відновлення теплофізичних властивостей внутрішніх нагрівачів промислової печі можна сформулювати наступним чином. У піч вбудовані нагрівачі, які мають певні розташування у промисловій печі. Потрібно знайти такі температури цих нагрівачів, щоб температура на об'єкті промислової печі була близька до наперед заданої.

Для розуміння теплофізичного процесу, розглянемо геометрію задачі елементарної форми: об'єкт печі – прямокутник, який поміщено в область даної печі (див. рис. 2.), яка також має прямокутну форму.

Рівняння в частинних похідних, яке описує розповсюдження тепла всередині печі з часом, має наступний вигляд:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k\nabla T), \quad (1)$$

де

ρ – щільність;

C – питома теплоємність;

T – шукана функція, яка є розв'язком (1);

t – час.

Надалі будемо використовувати стаціонарний процес, тобто коли $\partial T / \partial t = 0$. Рівняння (1) набуде вигляду:

$$\nabla(k\nabla T) = 0. \quad (2)$$

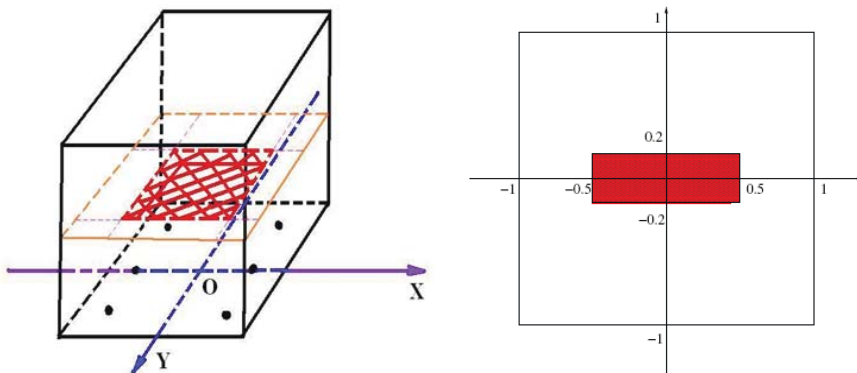


Рис. 2. Положення об'єкту всередині печі та точкових внутрішніх нагрівачів

Повний розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності для (2) у заданій області містить:

- 1) граничні умови: $\partial D = \partial D_D + \partial D_N$, $(x, y) \in \partial D_D : T = T(x, y)$; $(x, y) \in \partial D_N : \partial T / \partial n = p(x, y)$. Тут D – область, у якій знаходиться розв'язок задачі, ∂D – границя області D , ∂D_D – частина границі (може бути порожня), на якій задано умову Діріхле та ∂D_N – частина границі, на якій задано умову Неймана, n – нормаль до границі області;
- 2) залежність параметрів задачі від координат та температури: $k = k(x, y, T)$.
- 3) положення точкових нагрівачів у області D та значення їхніх температур.

Для фізичних і математичних задач, температурне поле повинне задовольняти певним умовам на стінках печі. Для прикладу візьмемо умову першого роду на двох протилежних стінках печі, а саме: T_D на $\partial \Omega_D$ (умова Діріхле). Друга частина умов (на двох інших протилежних стінках) задає теплоізоляцію на ∂D_N (умова Неймана). Остання умова поєднує температурний баланс між серединою та зовнішньою частиною печі.

Математична постановка задачі оптимізації

Знайти глобальний мінімум функціоналу

$$J(\bar{\alpha}) = \iint_{D_{object}} (T_{задане} - T(\bar{\alpha}))^2 ds, \quad (3)$$

при обмеженні

$$\nabla(k\nabla T) = 0 \text{ на } D \in (x, y), D \subset R^2. \quad (4)$$

де

$T_{\text{задане}}$ – наперед задана температура, яка повинна бути на об'єкті печі,

D_{object} – область печі, у якій знаходиться об'єкт,

D – область всієї печі ($D_{\text{object}} \subset D$),

$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – шукані значення температур вбудованих у піч нагрівачів,

n – кількість вбудованих у піч точкових нагрівачів.

Методи розв'язку

З математичної постановки (3), (4) ОЗТ видно, що вона відноситься до серії задач на умовний екстремум [3, 4]. Слід також відмітити, що умова представляє собою саме рівняння стаціонарної теплопровідності (4). У якості основного підходу до розв'язання даної задачі є метод множників Лагранжа.

Дана задача є нелінійною, тому її потрібно розв'язувати чисельно. До класичних методів розв'язку подібних нелінійних ОЗТ відносять різні модифікації методів Ньютона [1, 2]. Не дивлячись на те, що сам же метод Ньютона має матрицю Гессе, яка для даних задач обробовується досить довго, він є одним із найоптимальніших методів розв'язку подібного класу ОЗТ.

Задачу (3), (4) будемо розв'язувати методом скінчених різниць. Це означає, що шуканий розподіл температури описується значеннями температури у вузлах сітки, тобто являє собою досить великий масив дійсних чисел. Звідси випливає, що ми маємо задачу мінімізації, яка залежить від певного числа визначальних параметрів.

Тестування методів із [2; 3; 4] наведено на задачі (3), (4) з наступними вхідними даними:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad D = [-1; 1] \times [-1; 1] \subset R^2, \quad (5)$$

$$T_{\text{задане}} = 200 \text{ на } D_{\text{object}} = [-0.5; 0.5] \times [-0.2; 0.2] \subset D \subset R^2,$$

$$T(x, -1) = 50, \quad T(x, 1) = 100, \quad \partial T / \partial x(-1, y) = \partial T / \partial x(1, y) = 0.$$

Внутрішні нагрівачі розташовані у точках: $(-0.75; 0.75)$, $(0; 0.75)$, $(0.75; 0.75)$, $(-0.75; -0.75)$, $(0; -0.75)$ та $(0.75; -0.75)$. Необхідно знайти температури точкових нагрівачів, які необхідно подати. На рис. 3 показано результати математичного та комп'ютерного моделювання (5) для геометрії рис. 2.

Отримані результати можна використати для розв'язання іншої прикладної оптимізаційної задачі. В піч покладено об'єкт для нагрівання. Піч не спроможна нагріти об'єкт до заданої температури. З метою підвищення ефективності її роботи, у неї вмонтовані додаткові точкові нагрівачі, розташування яких задається двома просторовими координатами.

Температури цих нагрівачів задані. Потрібно визначити такі їхні розташування у самій печі, щоб температура на об'єкті була близька до наперед заданої. Розрахувати температурне поле всередині печі, яке утвориться в результаті дії цих нагрівачів при знайдених координатах їх положень.

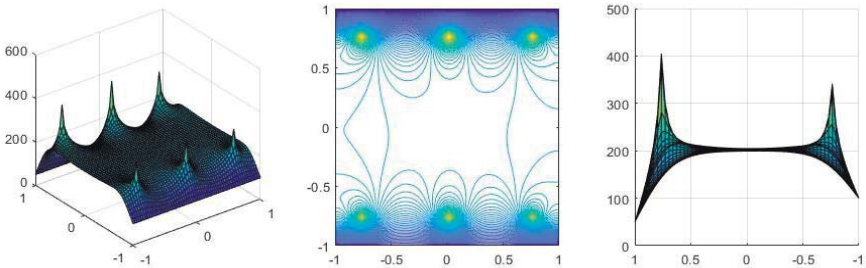


Рис. 3. Результати моделювання. Сітка 60х60 вузлів.

Зліва – температурне поле; справа – температурне поле з перевіркою на області об'єкту, посередині – контурний графік розподілу температури
Точність обрахунків $eps=10^{-6}$

Підвищення ефективності роботи теплового обладнання (ТО), наприклад, теплових котлів і установок пов'язано з рішенням значної кількості науково-технічних завдань. До таких завдань відносяться прямі і зворотні задачі теплопровідності. Зворотні задачі теплопровідності (ОЗТ) – це клас задач умовної оптимізації, в яких головним обмеженням виступає саме рівняння теплопровідності [1]. Воно й описує сам фізичний процес. Час пошуку чисельного розв'язку однієї ОЗТ може бути досить довгий.

При вирішенні ОЗТ необхідно вирішувати значну кількість прямих задач теплопровідності (ПЗТ). Отже, запропонований метод буде застосований саме до вирішення ПЗТ, оскільки ПЗТ – це основна підзадача в ОЗТ. Для простоти викладу методу розглянемо деяку двовимірну область, в якій вирішується ОЗТ. Рішення двовимірної задачі представляється у вигляді таблиці значень шуканої функції в кожній точці деякої сітки, на яку розбита розрахункова область. Нехай різницевою методом вирішується диференціальне рівняння у частинних похідних $L(y)=0$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) вирішується ітераційним методом. Основна ідея багатосіткового методу полягає в наступному. Нехай початкова умова до вирішення СЛАР у вигляді $U = u_0 + \sum \sum \sin(2^{k_1} \pi x) \sin(2^{k_2} \pi y)$. Тут U – точний розв'язок. Тоді ітераційна процедура пошуку чисельного розв'язку розглядається у вигляді процес зменшення похибки $err = U - u_0 = \sum \sum \sin(2^{k_1} \pi x) \sin(2^{k_2} \pi y)$. Очевидно, що швидше за все знищуються компоненти з півперіодом рівним кроку сітки, повільніше за все – довгохвильові компоненти з півперіодом, рівним довжині

всієї області розрахунку. Від рішення алгебраїчної системи рівнянь відносно значень шуканої величини, потрібно перейти до СЛАР відносно помилки. Нехай $A_h U_h = b_h$ – система рівнянь, побудована на сітці з кроком h , U_h – її точний розв’язок. Ясно, що точний розв’язок цієї СЛАР можна представити у вигляді $U_h = err_h^k + u_h^k$, де u_h^k – результат k -го кроку ітераційного методу і err_h^k – помилка цього кроку, $r_h^k = b_h - A_h u_h^k$ – його нев’язка, тоді, підставляючи в співвідношення $A_h U_h = b_h$ вираз $U_h = err_h^k + u_h^k$, отримуємо $A_h (err_h^k + u_h^k) = b_h$ або $A_h err_h^k = b_h - A_h u_h^k = r_h^k$, тобто рівняння для помилки. Вирішивши це рівняння, знайдемо err_h^k , а значить і $U_h = err_h^k + u_h^k$. Наступним кроком буде вибір початкових умов для рішення СЛАР. Для розрахунку помилки будемо використовувати систему $A_h err_h^0 = r_h^0$, де $r_h^0 = b_h - A_h u_h^0$, а u_h^0 – початкові умови. Права частина системи повинна бути пов’язаною з вихідною завданням. Тому алгоритм виглядає наступним чином.

На густій сітці будемо систему різницевих рівнянь і робимо кілька ітерацій. На основі отриманого результату будемо систему рівнянь для похибки. Для придушення довгохвильових компонент помилки проектуємо систему на розріджену сітку, вирішуємо її і отримуємо рішення без довгохвильової компоненти похибки. Проектуємо результат на густу сітку і вирішуємо задачу остаточно. Після знаходження похибки додаємо її до початкових умов і отримуємо рішення вихідної задачі. На рис. 4 показана загальна схема знаходження чисельного рішення двовірної ПЗТ із застосуванням багатосіткового методу (V-цикл).

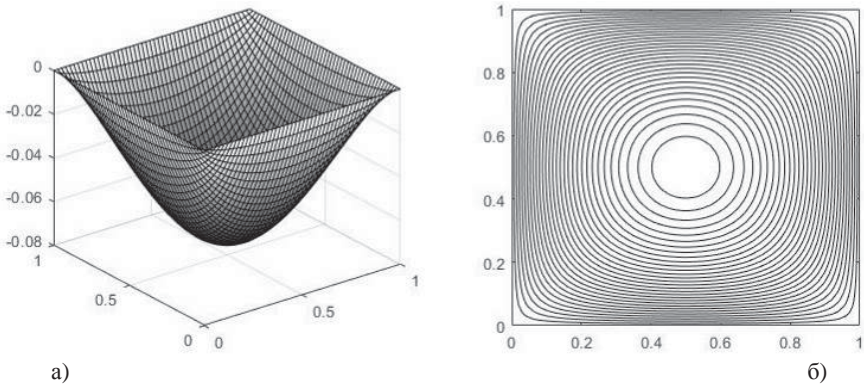


Рис. 4. Чисельний розв’язок ПЗТ (б): а) поверхня; б) лінії рівня

Даний метод був використаний при тестуванні наступних стаціонарних

ПЗТ.

Завдання 1. Знайти чисельний розв'язок наступної крайової задачі:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 1, (x; y) \in [0; 1]^2, U|_{\Gamma} = 0, \quad (6)$$

де Γ – межа розрахункової області. Чисельне рішення задачі (6) наведено на рис. 4:

Задача 2. Найдти чисельний розв'язок наступної крайової задачі:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = x^2 + y^2, (x; y) \in [0; 2]^2, \quad (7)$$

$$U(0; y) = 1, \partial U / \partial x(2; y) = 0, U(x; 0) = -2, \partial U / \partial y(x; 2) = 0.$$

Чисельний розв'язок задачі (7) наведено на рис. 5:

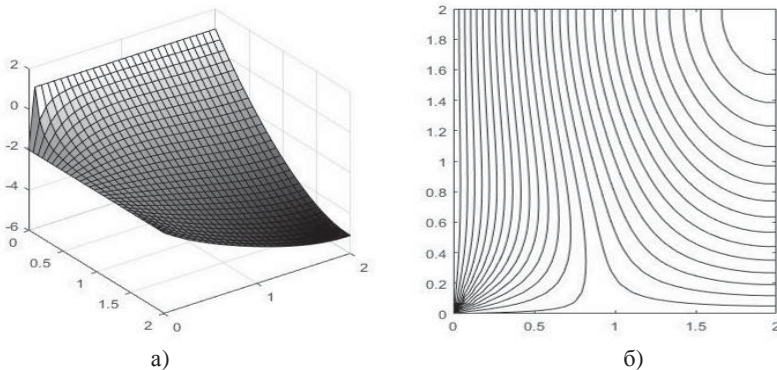


Рис. 5. Чисельний розв'язок ПЗТ (7): а) поверхня; б) лінії рівня

Нижче (табл. 1) наведені результати роботи багатосіткового методу на основі V-циклу за критерієм кількості ітерацій.

Таблиця 1

Результати застосування V-циклу до розв'язання ПЗТ (6) та (7).

Точність обчислень $1.0E-07$. Сітка 128×128 вузлів.

Кількість розрахункових сіток – 7

№ задачі	Кількість ітерацій для отримання розв'язку задачі методом Гауса-Зейделя	Кількість ітерацій для отримання розв'язку задачі багатосітковим методом із застосуванням методу Гауса-Зейделя
(6)	14428 ітерацій	1372 ітерацій
(7)	105220 ітерацій	12563 ітерації

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що застосування багатосіткових методів до знаходження чисельного розв'язку нелінійних ОЗТ – раціональний підхід. Із застосуванням багатосіткових методів чисельний розв'язок задач може бути отриманий в десятки раз швидше у порівнянні з часом розв'язку цієї ж задачі класичними методами на одній тій

самій сітці. Як вже було сказано, багатосітковий метод використовується під час розв'язку ПЗТ, які не однократно використовуються для розв'язання однієї ОЗТ. Нижче у табл. 2 представлені основні результати моделювання з використанням описаного у роботі багатосіткового методу та без нього.

Таблиця 2

Результат знаходження чисельного розв'язку задачі (5) з використанням багатосіткового методу. Точність обрахунків $1.0E-07$. Кінцева сітка 128×128 вузлів.

Кількість розрахункових сіток – 5

Розмірність сітки	Кількість ітерацій для отримання розв'язку задачі методом Гауса-Зейделя	Кількість ітерацій для отримання розв'язку задачі багатосітковим методом із застосуванням методу Гауса-Зейделя
64x64	7581568 ітерацій	11345 ітерацій
128x128	57581568 ітерацій	622503 ітерації
256x256	230260736 ітерацій	1842085 ітерацій

Висновки

На основі отриманих розрахунків, можна зробити наступні висновки. Показано, що метод найшвидшого спуску є одним із оптимальних алгоритмів розв'язку пошуку мінімуму цільового функціоналу для лінійних ОЗТ на відновлення теплофізичних характеристик електричних промислових печей [4]. Для нелінійних ОЗТ на ряді конкретних прикладів підтверджено ефективність використання оптимізаційного методу Ньютона та його запропонованих модифікацій у [3].

Використання багатосіткових методів дає змогу отримати чисельний розв'язок нелінійних ОЗТ значно швидше класичного, у якому використовується лише одна розрахункова сітка.

1. *Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations.* / V. Isakov. – USA.: Springer, 2005 – 40 p.
2. *Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem.* / M.V. Klibanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407 p. ISBN 978-1-4419-7804-2.
3. *Головня Б.П.* «Эффективные методы решения нелинейных обратных задач теплопроводности». [Текст] / Б.П. Головня., В.В. Хайдуров. Науковий журнал. Вісник Черкаського університету. Серія: «Прикладна математика. Інформатика». № 18 (311) – 2014, С.87-98.
4. *Головня Б.П.* Метод знаходження чисельного розв'язку двовимірної оберненої задачі теплопроводності. [Текст] / Б.П. Головня., В.В. Хайдуров. Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: «Технічні науки». № 2 – 2015, С.49-56.
5. *Мацевитый Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности: в 2 томах. Том 1: Методология / Ю.М. Мацевитый. – Київ: Наукова думка, 2002.
6. *Мацевитый Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности: в 2 томах. Том 2: Приложения / Ю.М. Мацевитый. – К.: НАН України, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, 2003.

Поступила 5.02.2018р.