УДК 51-74;519.87

А.Ф. Верлань, Київ
Ю.О. Фуртат, Київ

АПРОКСИМАЦІЙНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

Abstract. The non-stationary nature of physical processes in measuring transducers significantly affects their dynamic properties, which in many cases cannot be neglected. The basic approach to solving this problem is to develop methods that give rise to mathematical descriptions that allow us to obtain approximate analytical solutions or to use numerical methods.

Вступ

Прикладний інженерний аналіз процесів вимірювання за допомогою метаматематичного опису повинен передбачати наявність аналітичних наближених залежностей, які дають змогу наочно, як якісно, так і кількісно ілюструвати вплив фізичних параметрів [2, 9, 4]. Такі властивості методів аналізу необхідні в задачах проектування вимірювальних перетворювачів (ВП), а також під час експлуатації, тобто на всіх етапах їх життєвого циклу.

ВП температури

Як приклад можна розглянути ВП температури з зосередженими параметрами першого порядку, тобто вимірювальний перетворювач, динамічні властивості якого описуються рівнянням

$$\frac{dY}{dt}+\frac{1}{T}Y(t)=\frac{1}{T}X(t).$$

Єдиним параметром, що визначає динамічні властивості цього перетворювача, є постійна часу T, пов’язана з фізичними параметрами співвідношенням $T=c\cdot\gamma_0\cdot L_0/\alpha_k$, де c, γ_0 – питома теплоємність і щільність матеріалу термоприймача відповідно; L_0 – визначальний розмір термоприймача (наприклад, для циліндричного термоприймача це половина радіусу); α_k – коефіцієнт конвективного теплообміну, який характеризує інтенсивність передачі теплової енергії від середовища (газу або рідини) до термоприймача, якщо температура середовища вище від температури термоприймача, і від термоприймача до середовища, якщо температура останнього нижче температури термоприймача. Таким чином, можна відзначити істотну і конструктивну залежність параметра T математичної моделі ВП від його фізичних властивостей.

Вкажемо також на співвідношення для значення сталої часу психрометра

$$\lambda_Г=T\frac{A_0P_0}{\overline{\overline{k}}E_м+AP_0},$$

де T – стала часу термометра, $E_м$ – середнє значення пружності насиченої пари за температури мокрого термометра, A_0 – психрометричний коефіцієнт, P_0 – тиск газу, k – постійна з рівняння Клаузіуса-Клайперона; крім того, величина параметра $\lambda_Г$ залежить від швидкості газу і відносної вологості. Ця залежність ще складніша з точки зору встановлення аналітичних співвідношень.

Певні труднощі моделювання динамічних властивостей нестаціонарних вимірювальних перетворювачів полягають у тому, що не існує точних аналітичних методів розв'язання рівнянь, що описують поведінку цих ВП [3, 10]. Виняток становлять вимірювальні перетворювачі першого порядку, а також деякі ВП інших типів, у яких тип нестаціонарності носить окремий характер.

У зв'язку з цим основою дослідження нестаціонарних ВП практично всюди є наближені і чисельні методи розв'язання різних класів рівнянь. Тому безсумнівний науковий інтерес викликає задача створення методів аналізу як стаціонарних, так і нестаціонарних ВП за допомогою перетворення вихідних диференціальних рівнянь до вигляду, який дає змогу застосовувати наближені аналітичні розв'язки або ефективні чисельні методи.

Відзначимо також, що інтегральні динамічні моделі, будучи непараметричними, у багатьох випадках дають можливість підвищити ефективність моделювання ВП, однак для багатьох задач також необхідно, щоб ядра інтегральних рівнянь мали аналітичні уявлення з відображенням фізичних параметрів.

Методи отримання залежностей у ВП

Розглянемо деякі методи перетворення і отримання наближених залежностей для процесів у ВП [7, 10, 11, 8].

<u>Ітераційний метод.</u> Розглянемо досить зручну модифікацію методу послідовних наближень для аналізу моделі

$$L\left[Y(t)\right] = X(t), \tag{1}$$

де

$$L\left[Y(t)\right] = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) Y^{(n-i)}, \quad a_0 = 1$$

за початкових умов

$$\left.\frac{d^i Y(t)}{dt^i}\right|_{t=0} = Y_{0i}, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \tag{2}$$

(Тут, $Y(t)$ – показники ВП, а $X(t)$ – вимірювана характеристика досліджуваного процесу).

Вираз для реакції ВП будемо шукати у вигляді

$$Y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(t). \tag{3}$$

Перший член ряду (3) є розв'язком рівняння

$$\bar{L}\left[Y_0(t)\right] = X(t) \tag{4}$$

за початкових умов (2).

Оператор $\bar{L}$ має вигляд

$$\bar{L} = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i(t)\, p^{(n-i)}, \quad \bar{a}_0 = 1, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Коефіцієнти оператора $\bar{L}$ необхідно вибирати, дотримуючись таких умов: рівняння (4) повинно мати простий розв'язок, бажано, щоб різниця коефіцієнтів $a_i(t)$ та $\bar{a}_i(t)$ була за можливості найменшою. Усі наступні члени ряду, починаючи з другого, визначаються з ітераційного співвідношення

$$\bar{L}\left[Y_{m+1}(t)\right] = \left(\bar{L} - L\right)\left[Y_m(t)\right], \quad m = 0,\ 1,\ \ldots$$

за нульових початкових умов.

Стосовно вибору коефіцієнтів $\bar{a}_i(t)$ є такі рекомендації. Якщо $a_i(t)$ є періодичними функціями часу з періодом T_i, то як коефіцієнти $\bar{a}_i(t)$ можна взяти

$$\bar{a}_i(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} a_i(t)\, dt.$$

Якщо коефіцієнти $a_i(t)$ – функції, що повільно змінюються, то як коефіцієнти $\bar{a}_i(t)$ необхідно взяти постійні величини, рівні в певному сенсі середнім значенням коефіцієнтів $a_i(t)$. Якщо коефіцієнти $a_i(t)$ – стаціонарні випадкові функції, то як коефіцієнти $\bar{a}_i(t)$ доцільно взяти математичні очікування коефіцієнтів $a_i(t)$ [7].

З формули (3) випливає, що k-е наближення шуканого розв'язку визначається за формулою

$$Y^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} Y_i(t).$$

Можна бачити, що метод досить зручний, особливо в тих задачах, де можна обійтися другим або третім наближенням, тобто k – невелике.

Зведення до граничної задачі і рівнянню Фредгольма ІІ роду. Задачу аналізу ВП другого порядку можна звести до граничної задачі для звичайного диференціального рівняння з однорідними граничними умовами [6]. Нехай потрібно отримати розв'язок рівняння

$$a(t)Y'' + b(t)Y' + c(t)Y = \varphi(t) \qquad (5)$$

з початковими умовами

$$Y(0) = Y_0, \;\; Y'(0) = Y_0'. \qquad (6)$$

Для переходу від початкових умов (6) до однорідних граничних необхідно зробити заміну для шуканої функції $Y(t)$. Однією з таких замін може бути

$$z(t) = Y(t) - \frac{t^2}{2\cdot T}\cdot Y'(T) - Y_0\cdot\cos\left(\frac{\pi}{T}\cdot t\right), \qquad (7)$$

де T – тривалість процесу вимірювання. У (2.7) входить значення похідної шуканої функції в момент $t = T$. Величина $Y'(t)$, як правило, може бути визначена за результатами вимірювань.

У результаті заміни (7) рівняння (5) перетворюється на

$$a(t)z''(t) + b(t)z'(t) + c(t)z(t) = \psi(t), \qquad (8)$$

де

$$\psi(t) = \varphi(t) - a(t)\left[\frac{1}{T}Y'(T) - Y_0\frac{\pi^2}{T^2}\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right] -$$

$$-b(t)\left[\frac{1}{T}Y'(T) - Y_0\frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right] - c(t)\left[\frac{t^2}{2\cdot T}Y'(T) + Y_0\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\right],$$

а як граничні умови маємо

$$z(0) = 0, \;\; z'(T) = 0. \qquad (9)$$

Тепер можна перейти до методу [10], суть якого полягає у зведенні диференціального рівняння (8) до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Помножимо обидві частини рівняння (8) на

$$d(t) = \frac{1}{a(t)} \exp \int_0^t \frac{b(t)}{a(t)} dt$$

і зведемо (8) до самосопряженої форми

$$\frac{d}{dt}\left[\varepsilon(t)\frac{dz(t)}{dt}\right] = -c(t)d(t)z(t) + \psi(t)d(t), \tag{10}$$

де

$$\varepsilon(t) = \exp \int_0^t \frac{b(t)}{a(t)} dt.$$

Розв'язок рівняння (10) з граничними умовами (9) еквівалентний розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$z(t) = \int_0^T G_0(t,\ \tau)c(\tau)d(\tau)z(\tau)d\tau + f(t), \tag{11}$$

де

$$f(t) = -\int_0^T G_0(t,\ \tau)\psi(\tau)d(\tau)d\tau,$$

а $G_0(t,\ \tau)$ – функція Гріна оператора $\frac{d}{dt}\left[\varepsilon(t)\frac{d}{dt}\right]$ за граничних умов (9).

Як бачимо, ядром інтегрального рівняння (11) є функція

$$G(t,\ \tau) = G_0(t,\ \tau)c(\tau)d(\tau).$$

Припустимо, що це ядро, одним з можливих способів представлено у вигляді сепарабельного ядра, тобто у вигляді

$$G(t,\ \tau) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i(t)\eta_i(\tau). \tag{12}$$

У такому вигляді розв'язання інтегрального рівняння (11) зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь. Дійсно, підставивши праву частину (12) в рівняння (11), отримаємо

$$z(t) = \int_0^T \sum_{i=1}^{p} \sigma_i(t) \eta_i(\tau) z(\tau) d\tau + f(t). \qquad (13)$$

Ввівши позначення

$$z_i = \int_0^T \eta_i(\tau) z(\tau) d\tau, \qquad (14)$$

отримаємо

$$z(t) = \sum_{k=1}^{p} z_k \sigma_k(t) + f(t). \qquad (15)$$

Тепер підставимо (15) в (14), та отримаємо

$$z_i - \sum_{k=1}^{p} \beta_{ik} z_k = f_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p), \qquad (16)$$

де

$$\beta_{ik} = \int_0^T \eta_i(\tau) \sigma_k(\tau) d\tau,$$

$$f_i = \int_0^T \eta_i(\tau) f(\tau) d\tau \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Таким чином, розв’язання інтегрального рівняння (11) звелося до розв’язання системи (16) лінійних алгебраїчних рівнянь.

Зауважимо, що, хоча метод зведення до інтегрального рівняння було викладено стосовно перетворювача другого порядку, можливості цього методу значно ширші [5]. Так, наприклад, якщо вимірювальний перетворювач описано системою $2n$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (це досить широкий клас ВП, оскільки до таких систем можуть бути зведені багато інших видів рівнянь), то подібна система може бути зведена до лінійної системи n диференціальних рівнянь другого порядку. Нехай лінійна система диференціальних рівнянь другого порядку описана у вигляді

$$a_k(t) Y_k''(t) + b_k(t) Y_k'(t) + c_k(t) Y_k(t) = \varphi_k\left[t,\ X(t)\right] + \lambda_k(t), \qquad (17)$$
$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

де функція φ_k містить як вимірювану характеристику $X(t)$, так і параметри системи, а $\lambda_k(t)$ – функції, що містять, крім відомих параметрів, всі невідомі $Y_i(t)$, крім $i = k$. Так само, як у попередньому випадку, рівняння системи (2.17) з початковими умовами можна заміною шуканих змінних звести до граничних задач із однорідними граничними умовами, а потім перейти до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, які в цьому випадку набувають вигляду

$$z_k(t) = \int_0^T G_k(t,\ \tau) F_k(\tau) d\tau + f_k(t), \tag{18}$$

де $G_k(t,\ \tau)$ – функція Гріна оператора $\frac{d}{dt}\left[\varepsilon(t)\frac{d}{dt}\right]$, $\varepsilon_k(t) = \exp\int_0^t \frac{b_k(t)}{a_k(t)} dt,$

за граничних умов $z_k(0) = 0,\ \ z_k'(T) = 0;$ функція $F_k(t)$ має вигляд

$$F_k(t) = c_k(t) d_k(t) z_k(t) - \lambda_k(t) d_k(t),\ \ d_k(t) = \frac{1}{a_k(t)} \exp\int_0^t \frac{b_k(t)}{a_k(t)} dt;$$

вільний член $f_k(t)$ визначається виразом

$$f_k(t) = -\int_0^T G_k(t,\ \tau) \psi_k\left[\tau,\ X(\tau)\right] d_k(\tau) d\tau,$$

в якому ψ_k пов'язані так само, як функція ψ з φ у попередньому випадку.

Тепер, замінюючи ядра $G_k(t,\ \tau)$ сепарабельними $G_k(t,\ \tau) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_{i,\,k}(t) \eta_{i,\,k}(\tau)$, і вводячи позначення $z_{i,\,k} = \int_0^T \eta_{i,\,k}(\tau) F_k(\tau) d\tau,$ знову зведемо розв'язання кожного інтегрального рівняння до розв'язання відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянуті ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$G_k(t,\ \tau) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{dt}{\varepsilon_k(t)}, & t \le \tau, \\ \displaystyle\int_0^\tau \frac{d\tau}{\varepsilon_k(\tau)}, & t \ge \tau. \end{cases} \tag{19}$$

Таким чином, викладений метод є досить загальним, і його практичне використання не пов'язане з будь-якими принциповими труднощами. Разом з тим необхідно зазначити, що цей метод спирається на той факт, що вихідне диференціальне рівняння з початковими умовами попередньо замінюється рівнянням з граничними умовами; в іншому випадку застосування цього методу для вимірювальних перетворювачів з зосередженими параметрами виявилося б неможливим.

Аналіз динамічних властивостей нестаціонарних вимірювальних перетворювачів доцільний через перехід від відповідних диференціальних рівнянь до інтегральних рівнянь Вольтерри.

Застосування методу Бубнова-Гальоркіна. Перетворення вихідної моделі до граничної задачі дає змогу застосувати метод Бубнова-Гальоркіна [1], як один з найбільш універсальних методів. Стосовно граничної задачі (8) – (9) у вигляді

$$a(t)z''(t)+b(t)z'(t)+c(t)z(t)-\psi(t)=0, \tag{20}$$

$$z(0)=0,\ \ z'(T)=0. \tag{21}$$

Відповідно до цього методу розв’язок рівняння (20) з граничними умовами (21) має вигляд

$$z_n(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(t), \tag{22}$$

де координатна система $.\{\varphi_k(t)\}.$ являє собою повну систему лінійно-незалежних функцій, що задовольняють граничні умови (21); a_k – постійні, що підлягають визначенню величини, визначаються з умови: ліва частина вихідного рівняння стала після підстановки в неї $z_n(t)$ замість $z(t)$ ортогональної до функцій системи $\{\varphi_k\},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Підставивши праву частину (22) в рівняння (20), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\left(L\varphi_k,\ \varphi_m\right)=\left(\psi,\ \varphi_m\right),\ \ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{23}$$

де $L=a(t)\dfrac{d^2}{dt^2}+b(t)\dfrac{d}{dt}+c(t),$ а символ $\left(\varphi_k,\ \varphi_m\right)$ означає

$$\left(\varphi_k,\ \varphi_m\right)=\int_0^T\varphi_k(t)\varphi_m(t)\,dt.$$

Як випливає з (23), для визначення постійних величин a_k отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язавши цю систему і підставивши отриманий результат у (22), знайдемо шуканий розв’язок рівняння (20) з граничними умовами (21).

Висновок

Спосіб заміни змінних дає змогу замінити початкові умови вихідної задачі і перейти до однорідних граничних умов і до відповідної граничної задачі, що, у свою чергу, спричиняє зміну диференціального рівняння до інтегрального рівняння Фредгольма II роду з сепарабельним ядром. Це створює можливість скористатися одним з найефективніших методів розв'язання рівняння Фредгольма II роду, що полягає у зведенні задачі до системи алгебраїчних рівнянь і до отримання розв'язання як у чисельному, так і аналітичному вигляді.

1. *Верлань А.Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Киев, Украина: Наукова думка, 1986.
2. *Верлань А.Ф.* Інтегральні рівняння аналізу нестаціонарних електричних систем. Верлань А. Ф., Ситник О. О., Ключка К. М. Вісник Національного університету "Львівська політехніка". "Електроенергетичні та електромеханічні системи", № 637, С.12-17, 2009.
3. *Лега Ю.Г.* Моделирование процессов в технических системах. [Лега Ю.Г., Сытник А.А., Юзвенко В.Ф., Подгорный О.В.] Черкассы, Украина: ЧДТУ, 2004.
4. *Рабинович С.Г.* Погрешности измерений. Рабинович С.Г. Ленинград, Россия: Энергия, 1978.
5. *Сытник А.А.* "Применение измерительных преобразователей неселективного действия в многосвязных системах управления", Сытник А.А., Протасов С.Ю., Тихоход В.А. Электронное моделирование: международный научно-практический журнал, Т.36, №2, С.113-119, 2014.
6. *Сытник А.А.* Методы и средства моделирования динамических процесов на основе интегральных моделей. Сытник А.А., Ключка К.Н., Протасов С.Ю. British Journal of Educational and Scientific Studies, T. II, № 2(22), C.108-114, 2015.
7. *Сытник А.А*. Применение итерационных алгоритмов в задачах исследования динамики измерительных преобразователей на основе интегральных моделей. [Сытник А.А., ПалагинВ.В., Протасов С.Ю., Ключка К.М.] The International Scientific Association «Science & Genesis» Scientific achievements 2015, Vienna, Austria, Vol. II, 2015, pp.163-171.
8. *Chekroun M.D.* Approximation of Stochastic Invariant Manifolds. Chekroun M.D., Liu H., Wang S. XV, New York, USA: Springer, 2015.
9. *Ramsay J.* Dynamic data anaiysis. Ramsay J., Hooker G. 1 st ed., XVII, Springer, 2017.
10. *Sytnyk A.* Methods of receipt of integral form of description of nonstationary measurings transformers with the distributed parameters. Sytnyk A.A., Protasov S.U., Klyuchka K.N., Proceeedings of IV International Research and Practice Conference in European Science and Technology, Munich, Germany, 2013, Vol.I, pp.342-348.
11. *VerlanA.A.* Analysis of power circuits' dynamics using generalized state–space model. [VerlanA.A., Abdusatarov B.B., Sagatov M., Sytnyk A.A.] Proceedings of Fourth World Conference Intelligent Systems for industrial Automation, Tashkent, Uzbekistan, 2006, pp.168-176.

http://doi.org/10.5281/zenodo.3859643

Поступила 3.10.2019р.