УДК 51-74;519.87

О.А. Дячук, Київ

ПОБУДОВА ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ШЛЯХОМ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Abstract. A generalized equation that describes virtually any linear measurement transducer with distributed parameters is considered as an approach to the analysis of transducers with distributed parameters. It allows us to take into account variability of parameters of measuring transducers both in time and in space.

Вступ

Для широкого класу лінійних вимірювальних перетворювачів (ВП) з розподіленими параметрами загальна форма рівнянь і крайових умов має такий вигляд [2, 7]:

$$B_1(x,\ t)\frac{\partial^2 U(x,\ t)}{\partial t^2}+B_2(x,\ t)\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial t}-\sum_{i,\ j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{i,\ j}(x,\ t)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right]+ \sum_{i=1}^{3}b_i(x,\ t)\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial x_i}+a(x,\ t)U(x,\ t)=f(x,\ t), \tag{1}$$

$$U(x,\ t)\Big|_{x\in S}=0, \tag{2}$$

$$U(x,\ 0)=\varphi(x), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \tag{4}$$

(у разі крайових умов першого роду). Для випадку крайових умов третього роду змінюється лише умова (2), а саме, вона замінюється так:

$$\left[\sum_{i,\ j=1}^{3}a_{i,\ j}(x,\ t)\frac{\partial U}{\partial x_j}\cos(v,\ x_i)+\sigma(x,\ t)U\right]_{x\in S}=0. \tag{5}$$

(у співвідношення (1) – (5) введено позначення: S – межа області Ω зміни координат $x(x_1,\ x_2,\ x_3)$, v – зовнішня нормаль до S). Можливі три окремі:

а) $B_1(x,\ t) > 0,\ \ B_2(x,\ t) \equiv 0;$ б) $B_1(x,\ t) \equiv 0,\ \ B_2(x,\ t) > 0,$ при цьому умова (4) відсутня; в) $B_1(x,\ t) = B_2(x,\ t) = 0,$ при цьому відсутні обидві умови (3), (4).

Взагалі, можна розглядати тільки граничну умову (5) третього роду, оскільки з неї як окремі випадки випливають інші граничні умови (першого і другого роду). Викладаючи методи розв'язку задачі (1) – (5) передбачаємо, що вимірювана величина досліджуваного процесу міститься в $f(x,\ t)$.

Методи розв'язання задачі (1) – (5)

Ітераційний метод. Для застосування модифікованого методу послідовних наближень запишемо рівняння (1) у вигляді

$$L\left[U(x,\ t)\right] = f(x,\ t), \tag{6}$$

де $L\left[U(x,\ t)\right]$ є лівою частиною рівняння (1), а граничну умову (5) зобразимо у вигляді

$$N\left[U(x,\ t)\right]_{x\in S} = 0, \tag{7}$$

де $N\left[U(x,\ t)\right] = \sum\limits_{i,\ j=1}^{3} a_{i,\ j}(x,\ t)\dfrac{\partial U}{\partial x_j}\cos\left(v,\ x_i\right) + \sigma(x,\ t)U.$

Розв'язання рівняння (6) з даними крайовими умовами

$$U(x,\ t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x,\ t), \tag{8}$$

де $U_0(x,\ t)$ є розв'язок рівняння

$$L_0\left[U_0(x,\ t)\right] = f(x,\ t) \tag{9}$$

з граничною умовою

$$N_0\left[U_0(x,\ t)\right]_{x\in S} = 0 \tag{10}$$

і початковими умовами (3), (4).

Так само, як у випадку ВП з зосередженими параметрами, оператори L_0 і N_0 повинні бути такими, щоб член $U_0(x,\ t)$ можна було досить легко знайти; разом з тим відмінність операторів L_0 і N_0 відповідно до L і N повинна бути по змозі меншою. Зокрема, бажані випадки тотожного збігу L_0 і L або N_0 і N, якщо при цьому знаходження члена $U_0(x,\ t)$ не пов'язане зі значними труднощами [8].

Найчастіше змінні параметри виявляються або в рівнянні (2.29), або в граничній умові (7). При цьому, природно, той з операторів L і N, до якого змінний параметр не входить, необхідно взяти відповідно за L_0 і N_0.

Усі наступні члени ряду (8), починаючи з другого, є розв'язками рівнянь

$$L_0\left[U_{m+1}(x,\ t)\right] = \left(L_0 - L\right)\left[U_m(x,\ t)\right],\ \ m = 0,\ 1,\ \ldots \tag{11}$$

з граничною умовою

$$N_0\left[U_{m+1}(x,\ t)\right]_{x\in S} = \left(N_0 - N\right)\left[U_m(x,\ t)\right] \tag{12}$$

за нульових початкових умов

$$U_{m+1}(x,\ t) = 0, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial U_{m+1}(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

На практиці розв'язання конкретних задач наближення третього і більш високого порядку несуттєво відрізняються від наближення другого порядку, яким і обмежуються. Тобто для багатьох задач цей метод у другому наближенні дає цілком задовільні результати з точки зору оцінки ступеня впливу змінності параметрів на якість відтворення вимірювальними перетворювачами вимірюваної величини. У процесі розв'язання задач аналізу динамічних властивостей нестаціонарних ВП отримані аналітичні вирази можуть бути перевірені численними експериментами.

Зведення до інтегрального рівняння. У методі зведення до інтегрального рівняння [1, 6] рівняння (1) зображено у вигляді

$$A\left[U(x,\ t)\right] = L\left[U(x,\ t)\right] - f(x,\ t), \tag{15}$$

де

$$A\left[U(x,\ t)\right]=\sum_{i,\ j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{i,\ j}(x,\ t)\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial x_j}\right]-$$
$$\sum_{i=1}^{3}b_i(x,\ t)\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial x_i}-a(x,\ t)U(x,\ t),$$

$$L\left[U(x,\ t)\right]=B_1(x,\ t)\cdot\frac{\partial^2 U(x,\ t)}{\partial t^2}+B_2(x,\ t)\cdot\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial t}.$$

Рівняння (15) з граничною умовою (5) еквівалентно інтегральному або інтегродиференціальному рівнянню Фредгольма другого роду

$$U(x,\ t)=-\int\limits_{(\Omega)}G(x,\ s,\ t)L\left[U(s,\ t)\right]d_s\Omega+\int\limits_{(\Omega)}G(x,\ s,\ t)f(s,\ t)d_s\Omega,\ (16)$$

де індекс s при диференціалі вказує за якою змінною відбувається інтегрування (запис інтеграла в такій формі рівнозначний координатній формі у вигляді потрійного інтеграла); $G(x,\ s,\ t)$ – ядро інтегрального рівняння, що є функцією Гріна оператора A за граничної умови (5).

<u>Випадок сепарабельної функції Гріна.</u> Якщо ядро інтегрального рівняння представлено у вигляді

$$G(x,\ s,\ t)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x,\ t)\gamma_i(s,\ t),\qquad(17)$$

то підставляючи праву частину (2.40) в (2.39), отримаємо

$$U(x,\ t)=-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x,\ t)\int\limits_{(\Omega)}\gamma_i(s,\ t)L\left[U(s,\ t)\right]d_s\Omega+D_0(x,\ t),\ (18)$$

де $D_0(x,\ t)=\int\limits_{(\Omega)}G(x,\ s,\ t)f(s,\ t)d_s\Omega.$

Позначаючи $\int\limits_{(\Omega)}\gamma_i(s,\ t)L\left[U(s,\ t)\right]d_s\Omega=a_i(t),$ отримаємо

$$U(x,\ t)=-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x,\ t)a_i(t)+D(x,\ t).\qquad(19)$$

Підставивши (19) в (18), маємо

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x,\,t)\alpha_i(t)=-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(x,\,t)\int\limits_{(\Omega)}\gamma_i(x,\,t)\times \\
&\times\left\{B_1(s,\,t)\left[-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j''(s,\,t)\alpha_j(t)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j''(t)\gamma_j(s,\,t)-\right.\right. \\
&\left.-2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j'(t)\gamma_j'(s,\,t)\right]+B_2(s,\,t)\left[-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j'(t)\gamma_j(s,\,t)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j'(t)\gamma_j(s,\,t)-\right. \\
&\left.\left.-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\gamma_j'(s,\,t)\right]\right\}d_s\Omega+D(x,\,t).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Помноживши всі члени (20) на $\gamma_k(x,\,t)$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,n$ і проінтегрувавши по змінній $x\in\Omega$, отримаємо систему n лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\beta_{ik}(t)\alpha_i''(t)+\lambda_{ik}(t)\alpha'(t)+\varepsilon_{ik}(t)\alpha_i(t)\right]=D_k, \tag{21}$$

де

$$D_k=\int\limits_{(\Omega)}D(x,\,t)\cdot\gamma_k(x,\,t)\,d_x\Omega,$$

а $\beta_{ik}(t)$, $\lambda_{ik}(t)$, $\varepsilon_{ik}(t)$ – функції тільки часу, які отримуємо внаслідок групування членів у рівнянні (20) після зазначеного вище процесу інтегрування.

Представимо систему (21) у формі

$$
\begin{aligned}
&\beta_{ii}(t)\alpha_i''(t)+\lambda_{ii}(t)\alpha_i'(t)+\varepsilon_{ii}(t)\alpha_i(t)= \\
&D_i-f_i\left[t,\;\alpha_1(t),\;\alpha_2(t),\;\ldots\right],\;\; i=1,\,2,\,\ldots,\,n.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Зведення до моделі Вольтерри. Ця задача може бути зведена до системи інтегральних рівнянь Вольтерри [5, 9], що можна проілюструвати на конкретному прикладі. Нехай нестаціонарний вимірювальний перетворювач описано таким рівнянням і крайовими умовами:

$$\frac{\partial U}{\partial Fo}=\chi^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},\;\;\chi=\frac{h}{R}, \tag{23}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial z}+Bi^{(2)}\left(Fo\right)\left[U^{(2)}\left(Fo\right)=U\right]\Big|_{z=1}=0, \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}+Bi^{(1)}U\right)_{z=-1}=0, \tag{25}$$

$$U\Big|_{r=1}=\psi\left(Fo\right),\;\; \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r=0}=0,\;\; U\Big|_{Fo=0}=1. \tag{26}$$

Крайова система (23) – (26) описує поведінку вимірювального перетворювача температури, фізичною моделлю для якої служить кінцевий циліндр висотою *h* і радіусом *R*. Тут введені позначення: *r*, *z* – просторові координати, $U_c^2\left(Fo\right)$ – температура середовища, *Fo* і *Bi* – критерії Фур'є і Біо відповідно. Складність виконання цього завдання обумовлена залежністю критерію $Bi^2\left(Fo\right)$ від критерію Фур'є, а отже, від часу [4]. Крім того, при заданому геометричному розмірі і коефіцієнті теплопровідності матеріалу термоприймача величина критерію Біо повністю визначається значанням коефіцієнта конвективного теплообміну.

Скористаємося кінцевим інтегральним перетворенням по змінній *r*. Нехай ядром інтегрального перетворення буде функція $J_0\left(\mu_k\, r\right),$ при цьому розв'язок крайової задачі буде мати вигляд

$$U\left(r,\, z,\, Fo\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2U_k\left(r,\, Fo\right)}{J_1^2\left(\mu_k\right)}J_0\left(\mu_k r\right), \tag{27}$$

де

$$U_k=\int_0^1 rU\left(r,\, z,\, Fo\right)J_0\left(\mu_k r\right)dr. \tag{28}$$

Функції $U_k\left(Fo,\, z\right)$ визначаються з рівнянь

$$-\frac{\partial U_k}{\partial Fo}+\frac{\partial^2 U_k}{\partial z^2}-\chi^2\mu_k^2U_k=\chi^2\mu_k J_0'\left(\mu_k\right)\psi\left(Fo\right) \tag{29}$$

при крайових умовах

$$\left\{\frac{\partial U_k}{\partial z}-Bi^{(2)}\left(Fo\right)\left[U_c^{(2)}\left(Fo\right)-U_k\right]\right\}_{z=1}=0, \tag{30}$$

$$\left(\frac{\partial U_k}{\partial z}-Bi^{(1)}U_k\right)_{z=-1}=0, \tag{31}$$

$$U_k\big|_{Fo=0} = \frac{J_1(\mu_k)}{\mu_k}, \quad J_0(\mu_k) = 0. \tag{32}$$

Розв'язок задачі (29) – (32) має вигляд

$$U_k(z,\ \tau) = V_k \exp\left[-\chi^2 \mu_k^2 Fo\right] + \vartheta_k(Fo), \tag{33}$$

де

$$-\frac{\partial V_k}{\partial Fo} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial z^2} = 0, \tag{34}$$

$$\left[\frac{\partial V_k}{\partial z} + Bi^{(2)}(Fo) V_k\right]_{z=1} = \Phi_1(Fo), \tag{35}$$

$$\left[\frac{\partial V_k}{\partial z} - Bi^{(1)} V_k\right]_{z=-1} = \Phi_2(Fo), \tag{36}$$

$$V_k(z,\ 0) = 0 \tag{37}$$

і далі

$$\Phi_1(Fo) = Bi^{(2)}(Fo) \exp\left[\chi^2 \mu_k^2 Fo\right]\left[U_c^2(Fo) - \vartheta_k(Fo)\right], \tag{38}$$

$$\Phi_2(Fo) = Bi^{(1)} \exp\left[\chi^2 \mu_k Fo\right] \vartheta_k(Fo), \tag{39}$$

$$\begin{gathered} \vartheta_k(Fo) = \exp\left[-\chi^2 \mu_k^2 Fo\right] \frac{J_1(\mu_k)}{\mu_k}\left(1 + \chi^2 \cdot \mu_k^2\right) \times \\ \times \int_0^{Fo} \psi(Fo') \exp\left[\chi^2 \mu_k^2 Fo'\right] dFo'. \end{gathered} \tag{40}$$

Функцію $V_k(z,\ Fo)$ зобразимо у вигляді суми двох потенціалів

$$\begin{gathered} V_k(z,\ Fo) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{Fo} \frac{\chi_1(Fo')}{\sqrt{Fo - Fo'}} \cdot e^{-\frac{(1-z)^2}{4\cdot(Fo - Fo')}} dFo' + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{Fo} \frac{\chi_2(Fo')}{\sqrt{Fo - Fo'}} \cdot e^{-\frac{(1+z)^2}{4\cdot(Fo - Fo')}} dFo', \end{gathered} \tag{41}$$

де Fo' – змінна інтегрування.

Підставляючи праву частину (41) в граничні умови (35) – (36), для визначення невідомих потенціалів $\chi_1(Fo)$ і $\chi_2(Fo)$ отримаємо таку систему інтегральних рівнянь типу Вольтерри

$$\chi_1\left(Fo\right)+Bi^{(2)}\left(Fo\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Fo}\frac{\chi_1\left(Fo'\right)}{\sqrt{Fo-Fo'}}dFo'+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Fo}\frac{\chi_2\left(Fo'\right)\exp\left[\frac{1}{Fo-Fo'}\right]}{\sqrt{Fo-Fo'}}dFo'\right]- \tag{42}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Fo}\frac{\chi_2\left(Fo'\right)\exp\left[-\frac{1}{Fo-Fo'}\right]}{\sqrt{\left(Fo-Fo'\right)^3}}dFo'=\Phi_1\left(Fo\right),$$

$$-\chi_2\left(Fo\right)-Bi^{(1)}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Fo}\frac{\chi_1\left(Fo'\right)\exp\left[-\frac{1}{Fo-Fo'}\right]}{\sqrt{Fo-Fo'}}dFo'+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Fo}\frac{\chi_2\left(Fo'\right)\exp}{\sqrt{Fo-Fo'}}dFo'\right]+ \tag{43}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Fo}\frac{\chi_1\left(Fo'\right)\exp\left[-\frac{1}{Fo-Fo'}\right]}{\sqrt{\left(Fo-Fo'\right)^3}}dFo'=\Phi_2\left(Fo\right).$$

У багатьох окремих випадках, аналогічних розглянутому вище, перехід до інтегральних рівнянь можна здійснити значно простіше [3].

Приклад. Нехай нестаціонарний вимірювальний перетворювач описано рівнянням і крайовими умовами

$$a\frac{\partial^2 U\left(x,\ t\right)}{\partial x^2}=\frac{\partial U\left(x,\ t\right)}{\partial t}, \tag{44}$$

$$\left.\frac{\partial U\left(x,\ t\right)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \tag{45}$$

$$\left.\frac{\partial U\left(x,\ t\right)}{\partial x}\right|_{x=R}+h\left(t\right)\left[\left.U\left(x,\ t\right)\right|_{x=R}-\theta\left(t\right)\right]=0, \tag{46}$$

$$\left.U\left(x,\ t\right)\right|_{t=0}=0. \tag{47}$$

Ця крайова система описує поведінку вимірювального перетворювача температури, фізичною моделлю якої є необмежена пластина. Всі позначення тут мають значення, уже описані раніше. Граничну умову (46) запишемо у вигляді

$$\left.\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=R} = \Phi(t), \tag{48}$$

де $\Phi(t) = -h(t)\cdot\left[U(x,\ t)\big|_{x=R} - \theta(t)\right].$

Вираз (48) можна розглядати як граничну умову другого роду у вигляді теплового потоку, що змінюється довільно в часі. Розв’язок задачі (44), (45), (47), (48) можна записати у вигляді

$$U(x,\ t) = \int_0^t g(x,\ t-\tau)\Phi(\tau)\,d\tau, \tag{49}$$

де $g(x,\ t-\tau)$ – відома функція.

Розкривши зміст функції $\Phi(\tau),$ замість (49) отримаємо

$$\begin{gathered} U(x,\ t) = -\int_0^t g(x,\ t-\tau)\cdot h(\tau)\cdot U(x,\ \tau)\big|_{x=R}\,d\tau + \\ +\int_0^t g(x,\ t-\tau)\cdot h(\tau)\cdot\theta(\tau)\,d\tau. \end{gathered} \tag{50}$$

Вважаючи в (50) $x = R,$ отримаємо інтегральне рівняння Вольтерри для функції $U(R,\ t)$:

$$\begin{gathered} U(R,\ t) = -\int_0^t g(R,\ t-\tau)\cdot h(\tau)\cdot U(R,\ \tau)\,d\tau + \\ +\int_0^t g(R,\ t-\tau)\cdot h(\tau)\cdot\theta(\tau)\,d\tau. \end{gathered} \tag{51}$$

Знайшовши розв’язок цього рівняння і підставивши його в (50), отримаємо розв’язок вихідної задачі.

Висновок

Розглянуто методи перетворення і розв'язання вихідних рівнянь нестаціонарних вимірювальних перетворювачів, що дають змогу отримувати як аналітичні, так і чисельні розв'язки задач аналізу.

1. *Верлань А.Ф.* Інтегральні рівняння аналізу нестаціонарних електричних систем. Верлань А.Ф., Ситник О.О., Ключка К.М. Вісник Національного університету "Львівська політехніка". "Електроенергетичні та електромеханічні системи", № 637, С.12-17, 2009.
2. *Кадук Б.Г.* Спектральний аналіз: класичні поліноми і адаптивні ортогональні базиси.]Кадук Б.Г., Пономарьов І.Д., Середа В.В. та ін.] Вісник Вінницького політехнічного інституту, № 2, С.101-110, 2000.
3. *Ключка К.М.* Особливості використання інтегральних динамічних моделей при розрахунку перехідних процесів в електричних колах. Ключка К.М., Ситник О.О., Протасов С.Ю. The International Scientific Association «Science & Genesis» Global scientific unity 2014, Прага, Чеська Республіка, 2014, С.167-170.
4. *Лега Ю.Г.* Моделирование процессов в технических системах. [Лега Ю.Г., Сытник А.А., Юзвенко В.Ф., Подгорный О.В.] Черкассы, Украина: ЧДТУ, 2004.
5. *Ситник О.О*. Математичне моделювання і динамічна корекція системи вимірювання потоків теплового випромінювання. [Ситник О.О., Дячук О.А., Одокієнко С.Н., Тихоход В.О.] Вісник Черкаського державного технологічного університету, Спецвипуск, С.72-75, 2006.
6. *Ситник О.О*. Обґрунтування та перспективи застосування інтегральних рівнянь в задачі моделювання динаміки вимірювальних перетворювачів". Ситник О.О., Ключка К.М. Праці V Міжнар. наук.-практ. конф. Обробка сигналів і негаусівських процесів, Черкаси, 2015. С.59-60.
7. *Сытник А.А*. Методы и средства моделирования динамических процесов на основе интегральных моделей. Сытник А.А., Ключка К.Н., Протасов С.Ю. British Journal of Educational and Scientific Studies, T. II, № 2(22), С.108-114, 2015.
8. *Сытник А.А*. Применение итерационных алгоритмов в задачах исследования динамики измерительных преобразователей на основе интегральных моделей. [Сытник А.А., ПалагинВ.В., Протасов С.Ю., Ключка К.М.] The International Scientific Association «Science & Genesis» Scientific achievements 2015, Vienna, Austria, Vol. II, 2015, pp.163-171.
9. *Sagatov M.V.* Mathematical modeling the multipleparameter measuring converters and optimization their metrological characteristics. Sagatov M.V., Guiyamov Sh.M., Sytnyk A.A. Proceedings of the 6th International Conference CONTROL OF POWER SYSTEMS '04, Štrbskė Pleso High Tatras, Slovak Republic, 2004, pp.1-5.

http://doi.org/10.5281/zenodo.3859645

Поступила 7.10.2019р.