УДК 51-74;519.87

Ю.О. Фуртат, Київ

ОТРИМАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИМІРЮВАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА ЗА ІМПУЛЬСНОЮ ПЕРЕХІДНОЮ ФУНКЦІЄЮ

Abstract. We consider an approach using sequential approximations and deriving equivalent integral equations that can also be applied to the study of non-stationary measuring transducers, represented in a fairly general case by second-order partial differential equations. Modified iterations result in a series-like, usually fast-running solution.

Постановка задачі

Задача побудови диференціального рівняння динамічного об’єкта по імпульсній перехідній функції становить значний інтерес [1 – 3, 5 – 8] і зокрема, у зв’язку з можливістю формального переходу до інтегральних моделей (див. розділ 1).

Стосовно вимірювальних перетворювачів процес визначення диференціального рівняння можна спростити таким чином. Нехай відома імпульсна перехідна функція $g(t,\ \tau)$ вимірювального перетворювача, представлена у вигляді

$$g(t,\ \tau)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\psi_i(\tau), \qquad (1)$$

що характерно для цього виду об’єктів. Тоді можна виходити з аналогії між імпульсною перехідною функцією і функцією Гріна, а саме врахувати, що імпульсна перехідна функція задовольняє умови

$$\left.\frac{\partial^i g(t,\ \tau)}{\partial t^i}\right|_{\tau=t}=0,\ i=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-2;\ \left.\frac{\partial^{n-1} g(t,\ \tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{\tau=t}=\frac{1}{a_n(t)},$$

де $a_n(t)$ — коефіцієнт при n-й похідній у шуканому рівнянні.

Оскільки інтегральне співвідношення між вимірюваною величиною $X(t)$ і показниками $Y(t)$ вимірювального перетворювача (очевидна інтегральна модель) має вигляд

$$Y(t)=\int_{t_0}^{t} g(t,\ \tau)\,X(\tau)\,d\tau,$$

то з урахуванням (1) цей вираз можна переписати у вигляді

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \int_{t_0}^{t} \psi_i(\tau) X(\tau) d\tau. \qquad (2)$$

Розв'язання задачі

Продиференціюємо обидві частини співвідношення (2) за змінною t, отримаємо

$$Y'(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i'(t) \int_{t_0}^{t} \psi_i(\tau) X(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \psi_i(t) X(t)$$

або також

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \psi_i(t) X(t) = X(t) g(t,\ \tau)\Big|_{\tau=t},$$

то, враховуючи умови, які повинна задовольняти функція $g(t,\ \tau)$ маємо

$$Y'(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i'(t) \int_{t_0}^{t} \psi_i(\tau) X(\tau) d\tau. \qquad (3)$$

Аналогічно для похідних вищих порядків отримаємо:

$$Y''(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i''(t) \int_{t_0}^{t} \psi_i(\tau) X(\tau) d\tau, \qquad (4)$$

$$Y^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(n-1)}(t) \int_{t_0}^{t} \psi_i(\tau) X(\tau) d\tau, \qquad (5)$$

$$Y^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(n)}(t) \int_{t_0}^{t} \psi_i(\tau) X(\tau) d\tau + X g_t^{(n-1)}(t,\ \tau)\Big|_{\tau=t}. \qquad (6)$$

Ввівши позначення

$$h_i = \int_{t_0}^{t} \psi_i(\tau) X(\tau) d\tau,$$

представимо (2) – (6) у вигляді, відповідно:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i h_i(t), \qquad (7)$$

$$Y'(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i'(t) h_i(t), \qquad (8)$$

$$Y^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(n-1)}(t) h_i(t), \qquad (9)$$

$$Y^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^{(n)}(t)h_i(t)+Xg_t^{(n-1)}(t,\ \tau)\Big|_{\tau=t}. \qquad (10)$$

Залежності (7) – (10) являють собою систему *n* алгебраїчних рівнянь відносно $h_i(t)$, визначник якої

$$\Delta_0=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n\\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n'\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, оскільки $\{\varphi_i(t)\}$ – фундаментальна система розв’язків шуканого рівняння, а Δ_0 – вронскіан. Тому

$$h_i(t)=\frac{\Delta_{0i}}{\Delta_0}, \qquad (11)$$

де Δ_{0i} – визначник, що виходить з визначника Δ_0 шляхом заміни в останньому *i*-го стовпця стовпцем з вільних членів $Y(t),\ Y'(t),\ \dots,\ Y^{(n-1)}(t)$.

Підставляємо знайдені значення функцій $h_i(t)$ з (11) в (10), отримаємо

$$\Delta_0 Y^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^{(n)}(t)\Delta_{0i}+\frac{\Delta_0}{a_n(t)}X(t) \qquad (12)$$

або, оскільки

$$\Delta_{0i}=YA_{1i}+Y'A_{3i}+Y''A_{3i}+\dots+Y^{(n-1)}A_{ni},$$

де A_{ki} – відповідні алгебраїчні доповнення, то

$$\begin{aligned}&\Delta_0 Y^{(n)}(t)-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^{(n)}(t)A_{ni}Y^{(n-1)}-\dots-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^{(n)}(t)A_{2i}Y'-\\ &-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^{(n)}(t)A_{1i}Y=\frac{\Delta_0}{a_n(t)}X(t).\end{aligned} \qquad (13)$$

Рівняння (13) і є шуканим диференціальним рівнянням. Для перетворювачів другого порядку [6] рівняння (13) набуває вигляду

$$\begin{aligned}&(\varphi_1\cdot\varphi_2'-\varphi_2\cdot\varphi_1')\cdot Y''+(\varphi_1''\cdot\varphi_2-\varphi_2''\cdot\varphi_1)\cdot Y'+(\varphi_1'\cdot\varphi_2''-\varphi_2'\cdot\varphi_1'')\cdot Y=\\ &=(\varphi_1\cdot\varphi_2'-\varphi_2\cdot\varphi_1')\cdot g_t'(t,\ \tau)\Big|_{\tau=t}\cdot X(t).\end{aligned} \qquad (14)$$

Приклад. Нехай вимірювальний перетворювач має імпульсну перехідну функцію

$$g(t,\ \tau)=g(t-\tau)=m_1\exp\left[-\frac{\varepsilon_0}{T_0}(t-\tau)\right]\sin\lambda_1(t-\tau),$$

де

$$m_1=\frac{k}{T_0\sqrt{1-\varepsilon_0^2}},\ \ \lambda_1=\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{T_0}.$$

У цьому випадку

$$\varphi_1=m_1\exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{T_0}t\right)\sin\lambda_1 t,\ \ \varphi_2=-m_1\exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{T_0}t\right)\cos\lambda_1 t,$$

$$g(t,\ t)=0,\ \ g_t'(t,\ t)=m_1\lambda_1,$$

тому

$$\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1'=m_1^2\lambda_1\exp\left(-2\frac{\varepsilon_0}{T_0}t\right),\ \varphi_1''\varphi_2-\varphi_2''\varphi_1=2m_1^2\lambda_1\frac{\varepsilon_0}{T_0}\exp\left(-2\frac{\varepsilon_0}{T_0}t\right),$$

$$\varphi_1'\varphi_2''-\varphi_2'\varphi_1''=\left[m_1^2\lambda_1^3+m_1^2\lambda_1\left(\frac{\varepsilon_0}{T_0}\right)^2\right]\exp\left(-2\frac{\varepsilon_0}{T_0}t\right),$$

а права частина шуканого рівняння набуває вигляду $m_1^3\lambda_1^2\exp\left(-2\frac{\varepsilon_0}{T_0}t\right)X(t)$.

Отже, підставивши ці вирази в (13) і скоротивши всі члени на $m_1^2\lambda_1\exp\left(-2\frac{\varepsilon_0}{T_0}t\right)$, отримаємо $Y''+2\frac{\varepsilon_0}{T_0}Y'+\left[\lambda_1^2+\left(\frac{\varepsilon_0}{T_0}\right)^2\right]Y=m_1\lambda_1X(t)$ або, замінивши m_1 і λ_1 їх виразами, остаточно маємо $T_0^2Y''+2\varepsilon_0T_0Y'+Y=kX(t)$.

Таким чином, відновлене диференціальне рівняння описує ВП другого порядку коливального типу, що необхідно було очікувати, оскільки ця імпульсна перехідна функція належить саме цьому типу вимірювальних перетворювачів.

Приклад. Розглянемо розв'язання задачі відновлення рівняння для нестаціонарних ВП [8]. Нехай ВП має імпульсну перехідну функцію

$$g(t,\ \tau)=m(\tau)\exp\left[-\int_0^t m(\eta)d\eta\right]\exp\left[\int_0^\tau m(\eta)d\eta\right].$$

Тут

$$\varphi(t) = \exp\left[-\int_0^t m(\eta)\,d\eta\right], \ \psi(\tau) = m(\tau)\exp\left[\int_0^\tau m(\eta)\,d\eta\right],$$

$$g(t,\ \tau)\Big|_{\tau=t} = m(t),$$

тому маємо

$$Y(t) = \varphi(t)\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)\,X(\tau)\,d\tau,$$

$$Y'(t) = \varphi'(t)\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)\,X(\tau)\,d\tau + g(t,\ \tau)\Big|_{\tau=t} X(t).$$

Підставимо в друге рівняння вираз $h(t)$ з першого; це дасть

$$Y'(t) = \varphi'(t)\frac{1}{\varphi(t)}Y(t) + g(t,\ \tau)\Big|_{\tau=t} X(t).$$

Або з урахуванням значень функцій $\varphi(t),\ \varphi'(t),\ g(t,\ \tau)$:

$$Y'(t) + m(t)Y(t) = m(t)\,X(t).$$

Відновлене рівняння описує поведінку нестаціонарних ВП першого порядку (вологості, температури тощо).

До відновлення диференціального рівняння ВП за його імпульсною перехідною функцією можна підійти трохи інакше [4], а саме: оскільки система функцій $\{\varphi_i(t)\}$ є фундаментальною системою для шуканого диференціального рівняння, то кожна з функцій системи $\{\varphi_i(t)\}$ повинна відповідати однорідному рівнянню, відповідному шуканому рівнянню, тому

$$\sum_{t=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i\varphi_k(t)}{dt^i} = 0. \tag{15}$$

Надаючи індексам k значення 1, 2, 3, ..., отримаємо алгебраїчну систему з n рівнянь для визначення $n+1$ невідомих коефіцієнтів. Для того, щоб доповнити цю систему, врахуємо, що імпульсна перехідна функція повинна відповідати умові

$$\left.\frac{\partial^{n-1} g(t,\ \tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{\tau=t} = \frac{1}{a_n(t)}. \qquad (16)$$

Отже, тепер для визначення невідомих коефіцієнтів маємо систему

$$\sum_{t=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i\varphi_k(t)}{dt^i} = -\frac{1}{\left.\dfrac{\partial^{n-1} g(t,\ \tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{\tau=t}}\frac{d^n\varphi_k(t)}{dt^n} = f_k, \qquad (17)$$

звідки

$$a_i(t) = \frac{\Delta_{0i}(t)}{\Delta_0(t)},\ \ i = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1, \qquad (18)$$

де $\Delta_0(t)$ – визначник системи (17).

Оскільки матриця коефіцієнтів системи виявилася транспонованою по стосовно вронскіану, наведеному вище, то визначники в системах (7) – (10) і (17) збігаються; $\Delta_{0i}(t)$ – визначник, що виходить з визначника $\Delta_0(t)$ при заміні в ньому елементів i-го стовпця елементами вільних членів $f_1, f_2, ..., f_n$.

Так, з огляду на те, що за формулою (2.92) визначають коефіцієнти a_i, $i = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1,$ а коефіцієнт $a_n(t)$ визначають з умови (15), то шукане рівняння знайдено, причому в правій частині цього рівняння буде знаходитися вимірювальна величина $X(t)$.

Таким чином, викладений метод визначення диференціального рівняння ВП за імпульсною перехідною функцією можна застосовувати як для стаціонарних ВП, так і для нестаціонарних ВП, хоча для стаціонарних ВП рівняння визначається дещо простіше.

Крім того, оскільки описаний метод спирається лише на той факт, що імпульсна перехідна функція ВП повинна бути записана у вигляді (1), то він застосовуваний як для ВП з зосередженими параметрами, так і для ВП з розподіленими параметрами, бо експериментальне визначення імпульсної перехідної функції для обох груп ВП зводиться до апроксимації її виразом (1). Звідси: якщо досліджуваний ВП є об’єктом з розподіленими параметрами, то процес експериментального визначення його імпульсної перехідної функції та відновлення рівняння являє собою апроксимацію цього перетворювача з розподіленими параметрами деяким еквівалентним ВП з зосередженими параметрами. Порядок ВП з зосередженими параметрами, еквівалентного досліджуваного ВП з розподіленими параметрами, буде залежати від кількості доданків у виразі експериментально отриманої імпульсної перехідної функції, а це, в свою чергу, залежить від ступеня нерівномірності реєстрованої фізичної величини всередині ВП, наприклад, для термоприймачів це буде залежати від градієнтів температур всередині термоприймачів. Зрозуміло, що визначений порядок рівняння буде обмежуватися також точністю апроксимації самої імпульсної перехідної функції.

Висновок

Оскільки експериментальне визначення імпульсної перехідної функції ВП з розподіленими параметрами призвело до виразу

$$g(t,\ \tau)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\psi_i(\tau),$$

то подальший аналіз динамічних властивостей вказаного ВП можна проводити виходячи з того, що цей ВП еквівалентний ВП з зосередженими параметрами, рівняння якого має вигляд (13).

1. *Верлань А.Ф.* Метод ідентифікації електричних кіл на основі інтегральних динамічних моделей. Верлань А.Ф., Ситник О.О., Ключка К.М. Праці III Міжнар. наук.-техн. конф. Моделирование в электротехнике, электронике и светотехнике, Київ: ІПМЕ НАН України, 2010, С.24-26.
2. *Ключка К.М.* Особливості використання інтегральних динамічних моделей при розрахунку перехідних процесів в електричних колах. Ключка К.М., Ситник О.О., Протасов С.Ю. The International Scientific Association «Science & Genesis» Global scientific unity 2014, Прага, Чеська Республіка, 2014, С.167-170.
3. *Сытник А,А.* Применение метода интегральных уравнений при решении электротехнических задач. Сытник А,А., Подгорный О.В. Праці Міжнар. наук.-практ. конф. Наукові дослідження – теорія та експеримент 2005, Полтава, 2005, Т. 9, С.54-58.
4. *Сытник А.А.* Алгоритм формирования дифференциального уравнения измерительного преобразователя. Сытник А.А., Козак А.В. Вісник Черкаського державного технологічного університету, №3, С.84-87, 2006.
5. *Herold R.* Encyclopedia of information aussurance. Herold R., Robers M. Indiana, USA, 2010.
6. *Sytnyk A.* Methods of receipt of integral form of description of nonstationary measurings transformers with the distributed parameters. Sytnyk A.A., Protasov S.U., Klyuchka K.N., Proceeedings of IV International Research and Practice Conference in European Science and Technology, Munich, Germany, 2013, Vol.I, pp.342-348.
7. *Sytnyk O.O.* Analytical method of forming integrated dynamic models and their software implementation. Sytnyk O.O. Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки, Вип.7, С.191-196, 2012.
8. *VerlanA.A.* Analysis of power circuits’ dynamics using generalized state–space model. [VerlanA.A., Abdusatarov B.B., Sagatov M., Sytnyk A.A.] Proceedings of Fourth World Conference Intelligent Systems for industrial Automation, Tashkent, Uzbekistan, 2006, pp.168-176.

http://doi.org/10.5281/zenodo.3859647

Поступила 23.09.2019р.