УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

О. В. Васильєв, Київ
В. В. Васильєв, Київ
Л. А. Сімак, Київ
В. В. Чьочь, Київ

АПРОКСИМАЦІЯ РІШЕНЬ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРОБОВОГО І ЗМІННОГО ПОРЯДКІВ МЕТОДОМ S-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Abstract. Operational analogues of integral-differential operators of variable fractional order in the Stransform are proposed. The examples of application of operational matrices of integration with variable fractional order to integrate different signals and solution of fractional differential equations with variable order have been presented. Computational experiments are performed in the software environment of Mathematica.

Актуальність

Відомо, що математичними моделями складних динамічних систем у фрактальних середовищах є інтегро-диференціальні рівняння з похідними і інтегралами дробового порядку [2 – 4]. Розвиток дробового числення (Fractional Calculus) і його застосувань для розв’язання задач математичної фізики призвело до розробки мультифізичного підходу, при якому функції, що характеризують інтенсивність одного фізичного поля, впливають на параметри інших фізичних полів в області простору, що розглядається. Порядок інтегро-диференціальних операторів, як один з параметрів, також може змінюватися в залежності від часу, просторових змінних і функцій інтенсивності полів різної фізичної природи. Прикладом може служити динамічна система, що описує процес аномальної дифузії в пористому середовищі з урахуванням мінливої температури або процесів старіння. При подібному підході природно виникають математичні моделі дробової динаміки систем у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь з дробовими операторами, що змінюються за певними законами [5 – 9]. Методи розв’язання диференціальних рівнянь з похідними і інтегралами змінних дробових порядків в даний час інтенсивно розвиваються.

Постановка задачі

Необхідно розглянути питання формування операційних матриць інтегрування змінного дробового порядку в рамках апроксимаційно-операційного методу S-перетворення [1], а саме операції дробового диференціювання по Капуто і Ріману-Ліувіллю і дробового інтегрування по Ріману-Ліувіллю [2, 4], порядки яких є заданими функціями часу, визначеними на проміжку часу розвитку досліджуваного процесу, і отримані вирази для операційних матриць інтегрування і диференціювання змінного дробового порядку. Показати на прикладах реалізацію таких матриць для S-перетворення з базисною системою на основі локальних поліномів Лежандра і їх застосування для інтегрування різних функцій і розв'язання диференціальних рівнянь дробового порядку. Показати на прикладах виконання обчислювальних експериментів в програмному середовищі системи Mathematica [10]. Проаналізувати отримані результати і надати рекомендації по їх застосуванню.

Вирішення задачі

В основі S-перетворення, як відомо [1], лежить поліноміальна апроксимація сигналів, основні співвідношення якої утворюють операційне числення спеціального виду:

$$\mathbf{X} = \left(\int_0^T \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{S}(t)^* dt \right)^{-1} \cdot \left(\int_0^T \mathbf{S}(t) \cdot x(t) dt \right), \tag{1}$$

$$x_a(t) = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{S}(t). \tag{2}$$

Пряме S-перетворення (1) зіставляє сигналу x (t) його операційне зображення у вигляді вектору коефіцієнтів апроксимуючого полінома X, тоді як зворотне S-перетворення (2) відновлює сигнал у вигляді апроксимації $x_a(t)$. Сигнал і система утворюють функцій S(t) визначені на одному і тому ж інтервалі зміни аргументу $t \in [0,T)$. При застосуванні S-перетворення до вирішення завдань дробової динаміки систем, математичні моделі якої є інтегро-диференціальними рівняннями дробових порядків, розв'язання задач динаміки систем зводиться до розв'язання алгебраїчних рівнянь в операційному просторі, а перехід в простір оригіналів проводиться шляхом побудови поліномів виду (2).

Найважливішими співвідношеннями для S-перетворення, як операційного методу, є операційні аналоги математичних операцій інтегрування і диференціювання дробових порядків [2 – 4]. До найбільш часто використовуваних операцій відносяться інтегрування дробового порядку за Ріманом-Ліувіллем (3) і диференціювання дробового порядку за Ріманом -Ліувіллем і Капуто (4), (5):

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} x(\tau) d\tau, \tag{3}$$

$$y(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x(\tau) d\tau \right), \quad n-1 < \alpha < n, \tag{4}$$

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{d^n x(\tau)}{d\tau^n}d\tau\ ,\ \ n-1<\alpha<n\ . \tag{5}$$

При побудові операційних аналогів операторів дробового диференціювання і інтегрування, якими як відомо, є матриці, елементи яких залежать тільки від системи базисних функцій інтервалу зміни аргументу і порядку оператора, слід мати на увазі, що стовпцями цих матриць є вектори коефіцієнтів апроксимуючих поліномів для інтегралів і/або похідних від функцій базисної системи. Це дозволяє сформувати такі вирази для операційних матриць інтегрування і диференціювання:

– операційна матриця інтегрування порядку β за Ріманом-Ліувіллем:

$$\mathbf{P}_s^{\beta}=\mathbf{W}^{-1}\cdot\left(\int_0^T\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\mathbf{S}(\tau)d\tau\right)\cdot\mathbf{S}(t)^*\,dt\right), \tag{6}$$

– операційна матриця диференціювання порядку α по Капуто:

$${}^{C}\mathbf{D}_s^{\alpha}=\mathbf{P}_s^{n-\alpha}\cdot\mathbf{D}_s^{n}\ , \tag{7}$$

– операційна матриця диференціювання порядку α за Ріманом-Ліувіллем:

$${}^{RL}\mathbf{D}_s^{\alpha}=\mathbf{D}_s^{n}\cdot\mathbf{P}_s^{n-\alpha}\ , \tag{8}$$

У виразах (6 – 8) прийняті наступні позначення:

– операційна матриця апроксимації,

$$\mathbf{W}=\int_0^T \mathbf{S}(t)\cdot\mathbf{S}(t)^*\,dt \tag{9}$$

– операційна матриця диференціювання порядку *n*

$$\mathbf{D}_s^{n}=\mathbf{W}^{-1}\cdot\left(\int_0^T\frac{d^n\mathbf{S}(t)}{dt^n}\cdot\mathbf{S}(t)^*\,dt\right). \tag{10}$$

Операції диференціювання та інтегрування матрично-векторних операндів виконуються поелементно, * – символ транспонування векторних величин. Передбачається також, що функції базисної системи допускають диференціювання до порядку n.

Відмінною особливістю S-перетворення є те, що вирази операційних матриць диференціювання і інтегрування дробових порядків, наведені вище, допускають узагальнення на випадок, коли дробові порядки інтегро-диференціальних операторів стають функціями часу або іншого аргументу, залежного від часу. Це дозволяє без докладного виведення записати наступні вирази для операційних аналогів відповідних операторів зі змінними порядками:

$$\mathbf{P}_s^{\beta(t)} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \left(\int_0^T \left(\frac{1}{\Gamma(\beta(t))} \int_0^t (t-\tau)^{\beta(t)-1} \mathbf{S}(\tau) d\tau \right) \cdot \mathbf{S}(t)^* dt \right), \tag{11}$$

$${}^{C}\mathbf{D}_s^{\alpha(t)} = \mathbf{P}_s^{n-\alpha(t)} \cdot \mathbf{D}_s^{n} \tag{12}$$

$${}^{RL}\mathbf{D}_s^{\alpha(t)} = \mathbf{D}_s^{n} \cdot \mathbf{P}_s^{n-\alpha(t)} \tag{13}$$

Приклад реалізації та застосування операційних матриць інтегрування змінних дробових порядків.

Задано диференціальне рівняння дробового порядку з похідною по Капуто: ${}_{0}^{C}D_t^{0,5}(x(t)) + 2x(t) = \sin(2\pi t)\,, x(0) = x_0 = 5$.

Необхідно отримати апроксимацію рішення рівняння в базисі поліномів Лежандра 10-го порядку, використавши метод S-перетворення з базисною системою блочно-імпульсних функцій (локальна версія поліномів Лежандра нульового порядку). Порядок базисної системи m = 100, інтервал зміни аргументу T = 2.

Приведемо задане рівняння до виду, зручного для застосування S-перетворення.

Для цього позначимо першу похідну шуканого рішення як $\frac{dx(t)}{dt} = u(t)$. Тоді $x(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau + x_0$. Використовуючи визначення похідної дробового порядку по Капуто і введену функцію $u(t)$, отримаємо наступне інтегральне рівняння дробового порядку, еквівалентне заданому диференціальному ${}_{0}J_t^{0,5}\big(u(t)\big) + 2\int_0^t u(\tau)d\tau = f(t) - 2x_0$: Тут ${}_{0}J_t^{0,5}$ – інтегральний оператор Рімана-Ліувілля дробового порядку. S-перетворення цього рівняння має вигляд: $\mathbf{P}^{0,5} \cdot \mathbf{U} + 2\mathbf{P}^1 \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{F} - 2x_0 \cdot \mathbf{1})$. Рішення в операційному просторі визначається наступними виразами: $\mathbf{U} = (\mathbf{P}^{0,5} + 2\mathbf{P}^1)^{-1} \cdot (\mathbf{F} - 2x_0 \cdot \mathbf{1})$**,**

$\mathbf{X} = \mathbf{P}^1 \cdot \mathbf{U} + x_0 \cdot \mathbf{1}.$

Перехід в простір оригіналів виконується відповідно формулами:

$$x_a(t) = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{V}, \frac{dx_a(t)}{dt} = \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{V},$$

де **V** – вектор системи базисних функцій S-перетворення.

Програма (на мові Wolfram програмної системи Mathematica) [10]:

– Завдання параметрів S-перетворення і вихідних даних завдання:

```
h = 1/50; m = 100; n = 10; T = 2; β1 = 0.5; xo = 5; f[t_] := Sin[2 π * t];
```

– Формування базисних систем на основі локальної та глобальної версій зміщених поліномів Лежандра:

```
s[t_, h_, i_, j_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, LegendreP[j - 1, 1 - 2 i + 2 t / h], 0];
V = Table[s[t, h, i, 1], {i, m}];

S = Table[LegendreP[j - 1, -1 + 2 t / T], {j, n}];
```

– Формування операційних матриць інтегрування:

```
Pβ = Table[p[β1, i - j], {i, 0, m - 1}, {j, 0, m - 1}];

P1 = Table[p[1, i - j], {i, 0, m - 1}, {j, 0, m - 1}];
```

– Формування зображень правої частини рівняння і константи 1:

```
F = Table[f[(i - 0.5) * h], {i, m}];One = Table[1, {i, m}];
```

– Формування апроксимуючої матриці для сигналів, заданих у вигляді таблиці:

```
tt = Table[(j - 0.5) * h, {j, m}];

w = Table[S[[i]] /. t → tt[[j]], {j, m}, {i, n}];
```

– Розв’язання задачі в операційному просторі:

```
U = Inverse[Pβ + 2 P1].(F - 2 xo * One)
X = P1.U + xo * One
XL = PseudoInverse[w].X
```

– Перехід в простір оригіналів:

```
xa1 = X.V;
xa2 = XL.S;
```

– Візуалізація рішень:

```
fig1 = Plot[xa1, {t, 0, m * h}, PlotPoints → 400]
fig2 = Plot[xa2, {t, 0, T}]
fig3 = ListPlot[Table[{tt[[i]], X[[i]]}, {i, m}]]
fig5 = Show[fig2, fig3]
```

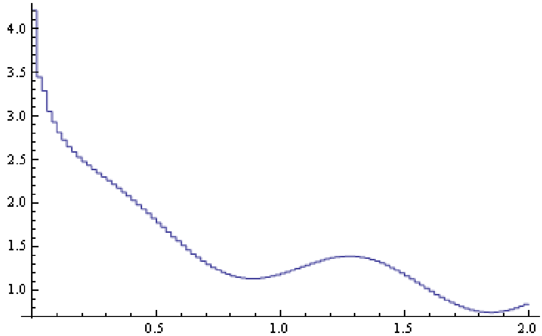

Рис. 1. Апроксимація розв'язання рівняння в базисі локальної версії поліномів Лежандра, m = 100.

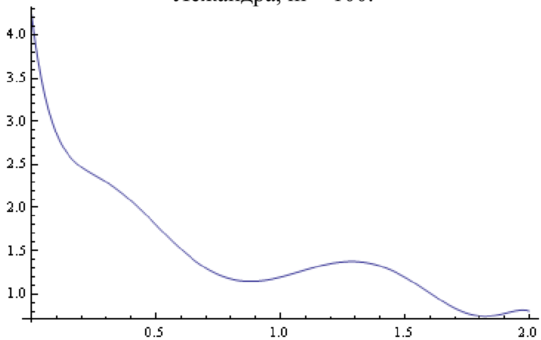

Рис. 2. Апроксимація розв'язання рівняння в базисі глобальної версії поліномів Лежандра, n = 10.

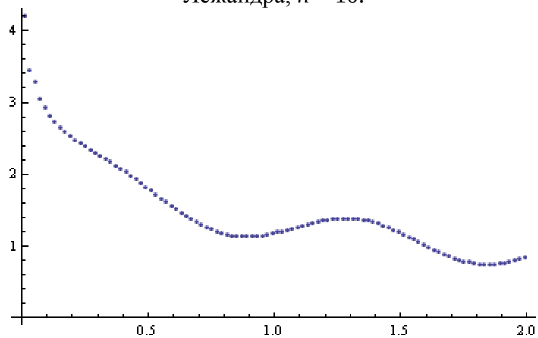

Рис. 3. Компоненти вектору рішення в операційному просторі (m = 100)

Висновки

Запропонований в роботі підхід до реалізації операційних аналогів інтегро-диференціальних операторів, дробовий порядок яких змінюється в процесі розв'язання, дозволяє розширити сферу застосування S-перетворення на дробові диференціальні рівняння, що містять похідні і інтеграли нецілих змінних порядків. Проведені експериментальні дослідження та обчислювальні експерименти підтверджують працездатність методу. Приклад та програма, що наведені в роботі, допускають адаптацію при зміні параметрів операторів, коефіцієнтів рівнянь, початкових умов, а також варіації типів і параметрів базисних систем, і можуть бути корисні дослідникам і інженерам, які займаються моделюванням задач фрактальної динаміки систем, в тому числі в мультифізичній постановці.

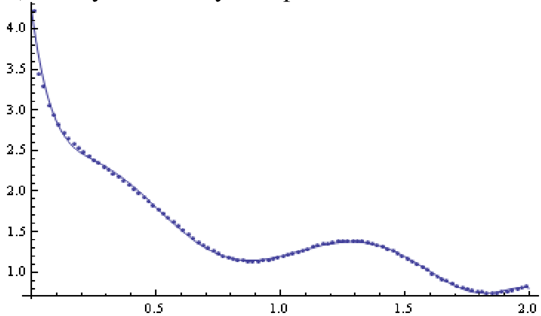

Рис. 4. Суміщений графік компонент вектору розв'язання в операційному просторі і апроксимації розв'язання в глобальному базисі поліномами Лежандра ($N = 10$)

1.*Васильев В.В., Симак Л.А.* Полиномиальная аппроксимация сигналов как операционное исчисление: применение к моделированию динамических систем дробного порядка / В.В. Васильев, Л.А. Симак // Информационные технологии, 2012, № 3(187). – С.55-60.
2.*Учайкин В.В.* Метод дробных производных. – Изд-во «Артишок», Ульяновск, 2008. – 512 с.
3.*Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. – Academic Press, 1974. – 234 p.
4.*Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – Academic Press, 1999. – 340 p.
5.*Sheng Y., Chen Y.Q., Qiu T.S.* Fractional Processes and Fractional – Order Signal Processing: Techniques and Applications. – Springer, 2012. – 294 p.
6.*Sierociuk D., Podlubny I., Petras I.* Experimental Evidence of Variable-order Behavior of Ladders and Nested Ladders // arXiv: 1107.2575 v3 [math.DS] 17 Jul 2011. – 8 p.
7.*Sun H.*G., *Chen W., Chen Y.Q.* Variable – order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling // Physica A, 388, 2009. – P.4586 – 4592.
8.*Sun H.*G., *Chen W., Sheng H., Chen Y.Q.* On mean square displacement behaviors of anomalous diffusion with variable and random orders // Physics Letters A, 374, 2010 . – P.906 – 910.
9.*Sun H.G, Sheng H., Chen Y.Q., Chen W.* On Dynamic-order Fractional Dynamic System // Proc. Of FDA' 10, Article no. FDA10-073. – 7 p.
10. *Wolfram Stephen* The Mathematica book / Wolfram Media / Cambridge University Press, 1996. – 1403 p.

http://doi.org/10.5281/zenodo.3859655

Поступила 7.10.2019р.