

## МЕТОД СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

**Abstract.** The application of power series methods in the problem of identification of measuring transducers is considered as an approach that allows to unify the representation of elements of a mathematical model and to obtain efficient computational expressions on this basis.

### Вступ

Застосування методів поліноміальної апроксимації (степеневих рядів) в задачі ідентифікації ВП є високопродуктивним підходом, який має принциповий характер, оскільки дозволяє уніфікувати подання елементів математичної моделі і отримати на цій основі ефективні розрахункові вирази [3 – 6].

Одним з можливих варіантів такого підходу є застосування сплайнів [8]. Отримання відповідного алгоритму ідентифікації розглянемо на прикладі стаціонарних ВП другого порядку

$$y''(t) + q_1 y'(t) + q_2 y = f(t), y(0) = C_0, y'(0) = C_1. \quad (1)$$

Для диференціального рівняння (1) еквівалентним є інтегральне рівняння

$$y(t) + \int_0^t [q_1 + q_2(t-s)]y(s) ds = \int_0^t (t-s)f(s) ds + C_0 + C_1 t + q_1 C_0 t, \quad (2)$$

яке можна подати у зручній формі для формування СЛАР відносно невідомих параметрів

$$q_1 \left( \int_0^t y(s) ds - C_0 t \right) + q_2 \int_0^t (t-s)y(s) ds = \int_0^t (t-s)y(s) ds + C_0 C_1 t - y(t).$$

### Інтегральний сплайн-алгоритм вимірювальних перетворювачів

Скористаємося інтерполяційним кубічним сплайном вигляду

$$s_3(x, y) dx = d_1^j (x_j - x)^3 + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + d_4^j (x - x_{j-1}), \quad (3)$$

$$s_3(x, f) dx = a_1^j (x_j - x)^3 + a_2^j (x - x_{j-1})^3 + a_3^j (x_j - x) + a_4^j (x - x_{j-1}). \quad (4)$$

Підставивши (3) і (4) в (2), отримаємо

$$\begin{aligned} q_1 \left( \sum_{j=1}^i \int_{x_{j-1}}^{x_j} s_3(x, y) dx - C_0 x_j \right) dx + \sum_{j=1}^i \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - x) s_3(x, y) dx = \\ = \sum_{j=1}^i \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - x) s_3(x, f) dx + C_0 + C_1 x_j - y_j, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для формування системи відносно  $q_1$  і  $q_2$  необхідно обчислити інтеграли виду

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[ d_1^j (x_j - x)^3 + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + d_4^j (x - x_{j-1}) \right] dx, \quad (6)$$

Спочатку обчислимо інтеграл

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - x) \left[ d_1^j (x_j - x)^3 + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + d_4^j (x - x_{j-1}) \right] dx. \quad (7)$$

Тепер обчислимо інтеграл (6), використовуючи (7)

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[ d_1^j (x_j + x)^3 + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + d_4^j (x - x_{j-1}) \right] dx = d_1^j \left[ (jh)^3 h - \right. \\ \left. - 3j^3 h^4 + \frac{3}{2} j^2 h^4 + 3j^3 h^4 - 3j^2 h^4 + jh^4 + j^3 h^4 - \frac{3}{2} j^2 h^4 - jh^4 - \frac{h^4}{4} \right] + d_2^j \left[ j^3 h^4 - \right. \\ \left. - 3j^3 h^4 - \frac{3}{2} j^2 h^4 + jh^4 + \frac{h^4}{4} - 3j^3 h^4 + 6j^2 h^4 - 4jh^4 + 3j^3 h^4 - \frac{15}{2} j^2 h^4 - 6j^4 h^4 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} h^4 - j^3 h^4 + 3j^2 h^4 + h^4 \right] + d_3^j \left[ j^2 h^2 - j^2 h^2 + jh^2 + \frac{j^2 h^2}{2} - \frac{j^2 h^2}{2} + jh^2 - \frac{h^2}{2} \right] + \\ + d_4^j \left[ \frac{j^2 h^2}{2} - \frac{j^2 h^2}{2} + jh^2 - \frac{h^2}{2} - (j^2 - j)h^2 + (j^2 - 2j + 1)h^2 \right] = \\ = d_1^j \left( 2j^3 - 3j^2 + 2j - \frac{1}{4} \right) h^4 + d_2^j \left( 6j - 6j^4 + \frac{15}{4} \right) h^4 + d_3^j \left( 2j - \frac{1}{2} \right) + d_4^j \frac{h^2}{2}. \\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - x) \left[ d_1^j (x_j - x)^3 + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + d_4^j (x - x_{j-1}) \right] dx = x_j \left[ d_1^j (2j^3 - \right. \\ \left. - 3j^2 + 2j) h^4 + d_2^j \left( 6j - 6j^4 + \frac{15}{4} \right) h^4 + d_3^j \left( 2j - \frac{1}{2} \right) h^2 + d_4^j \frac{h^2}{2} \right] - \int_{x_{j-1}}^{x_j} x \left[ d_1^j (x_j - x)^3 + \right. \\ \left. + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + d_4^j (x - x_{j-1}) \right]. \end{aligned}$$

Далі обчислимо інтеграл

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} x \left[ d_1^j (x_j - x)^3 + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + d_4^j (x - x_{j-1}) \right] dx =$$

$$= \left( \frac{1}{4} h^5 - \frac{h^5}{5} \right) d_1^j + \left( 2j^3 + \frac{1}{4} j - \frac{1}{20} \right) h^5 d_2^j + \left( 2j^2 h^3 - \frac{3}{2} j h^3 + \frac{h}{3} \right) d_3^j + \frac{h^2}{2} d_4^j. \quad (8)$$

Використовуючи (8), отримаємо

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} x(x_j - x) \left[ d_1^j (x_j - x)^3 + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + d_4^j (x - x_{j-1}) \right] dx =$$

$$= \left[ d_1^j \left( 2j^4 - 3j^3 + 2j^2 - \frac{1}{2} j + \frac{1}{5} \right) h^5 + d_2^j \left( -2j^3 + 6j^2 + \frac{7}{2} j - 6j^5 + \frac{1}{20} \right) h^5 + \right.$$

$$\left. + d_3^j \left( j - \frac{1}{6} \right) h^3 + d_4^j \left( -j^2 + 2j - \frac{5}{6} \right) h^3 \right].$$

Для обчислення інтегралів  $\int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - x) s_3(x, f) dx$  скористаємося

попереднім виразом

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - x) s_3(x, f) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[ d_1^j (x_j - x)^3 + d_2^j (x - x_{j-1})^3 + d_3^j (x_j - x) + \right.$$

$$\left. + d_4^j (x - x_{j-1}) \right] dx = \left[ d_1^j \left( 2j^4 - 3j^3 + 2j^2 - \frac{1}{2} j + \frac{1}{5} \right) h^5 + d_2^j \left( -2j^3 + 6j^2 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{7}{2} j - 6j^5 + \frac{1}{20} \right) h^5 + d_3^j \left( j - \frac{1}{6} \right) h^3 + d_4^j \left( -j^2 + 2j - \frac{5}{6} \right) h^3 \right].$$

Тепер для формування системи відносно  $q_1$  і  $q_2$  використовуємо вирази (6) і (7). Тоді (5) можна записати у вигляді

$$q_1 \sum_{j=1}^i \left[ d_1^j (2j^3 - 3j^2 + 2j) h^4 + d_2^j \left( 6j - 6j^4 + \frac{15}{4} \right) h^4 + d_3^j \left( 2j - \frac{1}{2} \right) h^2 + \right.$$

$$\left. + d_4^j \frac{h^2}{2} C_0 j h \right] + q_2 \sum_{j=1}^i \left[ d_1^j \left( 2j^4 - 3j^3 + 2j^2 - \frac{1}{2} j + \frac{1}{5} \right) h^5 + d_2^j \left( -2j^3 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& +6j^2 + \frac{7}{2}j - 6j^5 + \frac{1}{20})h^5 + d_3^j \left( j - \frac{1}{6} \right) h^3 + d_4^j \left( -j^2 + 2j - \frac{5}{6} \right)^3 h^3 ] - \\
& - \sum_{j=1}^i \left[ a_1^j \left( 2j^4 - 3j^3 + 2j^2 - \frac{1}{2}j + \frac{1}{5} \right) h^5 + a_2^j \left( -2j^3 + 6j^2 + \frac{7}{2}j - 6j^5 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{20} \right) h^5 + a_3^j \left( j - \frac{1}{6} \right) h^3 + d_4^j \left( -j^2 + 2j - \frac{5}{6} \right)^3 h^3 \right] + C_0 + C_1 j h - y_1.
\end{aligned}$$

Остаточний вигляд СЛАР відносно  $q_1$  і  $q_2$  має вигляд

$$Aq = F, \quad (9)$$

де  $A = \{A_{k1}, A_{k2}\}_{k=\overline{1,m}}$ ,  $q = (q_1, q_2)^T$ ,  $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ ,

$$\begin{aligned}
A_{k1} = & \sum_{j=1}^k \left[ d_1^j \left( 2j^3 - 3j^2 + 2j \right) h^4 + d_2^j \left( 6j - 6j^4 + \frac{15}{4} \right) h^4 + d_3^j \left( 2j - \frac{1}{2} \right) h^2 + \right. \\
& \left. + d_4^j \frac{h^2}{2} C_0 j h \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{k2} = & \sum_{j=1}^i \left[ d_1^j \left( 2j^4 - 3j^3 + 2j^2 - \frac{1}{2}j + \frac{1}{5} \right) h^5 + d_2^j \left( -2j^3 + 6j^2 + \frac{7}{2}j - 6j^5 + \frac{1}{20} \right) h^5 + \right. \\
& \left. + d_3^j \left( j - \frac{1}{6} \right) h^3 + d_4^j \left( -j^2 + 2j - \frac{5}{6} \right)^3 h^3 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_k = & \sum_{j=1}^i \left[ a_1^j \left( 2j^4 - 3j^3 + 2j^2 - \frac{1}{2}j + \frac{1}{5} \right) h^5 + a_2^j \left( -2j^3 + 6j^2 + \frac{7}{2}j - 6j^5 + \frac{1}{20} \right) h^5 + \right. \\
& \left. + a_3^j \left( j - \frac{1}{6} \right) h^3 + d_4^j \left( -j^2 + 2j - \frac{5}{6} \right)^3 h^3 \right].
\end{aligned}$$

Отже, алгоритм розрахунку параметрів в разі, коли вхідний і вихідний сигнал апроксимується кубічними сплайнами, такий:

- 1) задання вихідних даних  $t_j = jh$ ,  $h$ ,  $y_i$ ,  $f_i$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $C_0$ ,  $C_1$ ;
- 2) обчислення коефіцієнтів кубічних сплайнів на кожній ділянці  $(x_{j-1}, x_j)$ , апроксимуючих вхідний сигнал  $f(t)$  і вихідний сигнал  $y(t)$ ;
- 3) формування матриці  $A$ ;
- 4) формування правої частини  $F$ ;
- 5) розв'язок системи (9).

Блок-схему сплайн-інтегрального алгоритму розрахунку параметрів моделей ДО наведено на рис. 1.

Застосування сплайнів дозволяє підвищити точність розрахунку

параметрів  $q$  на порядок відносно кроку  $h$  у порівнянні з квадратурним алгоритмом на основі формули трапецій і отримати в разі неповної вихідної інформації додаткові точки для формування нормальних систем відносно шуканих параметрів.

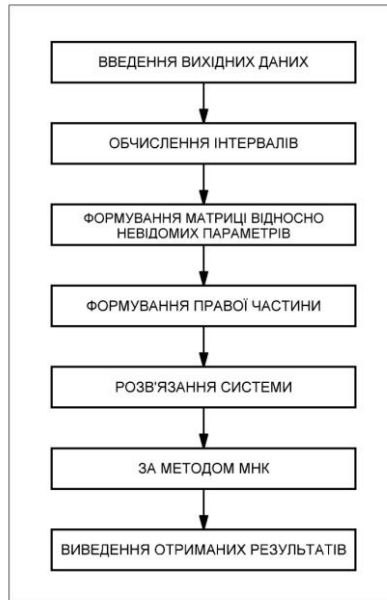


Рис. 1. Блок-схема сплайн-інтегрального алгоритму (МНК – метод найменших квадратів)

Таким чином, розглянутий алгоритм має низку необхідних для цифрової реалізації властивостей, зокрема, він є завадостійким щодо похибки вихідних даних, а також придатним як основа синтезу спеціалізованих обчислювальних пристроїв зазначеного призначення. Процедура чисельної реалізації систем лінійних рівнянь допускає подання матриці СЛАР у вигляді добутоків верхньої і нижньої трикутної матриці, що дозволяє розпаралелювати обчислювальні процеси.

### **Інтегральні алгоритми ідентифікації ВП на основі тейлоровських розкладань (метод Г.Є. Пухова)**

Застосування ряду Тейлора для апроксимації функцій приводить до отримання так званих Т-моделей, які можуть бути використані для розв'язання задачі ідентифікації динамічних об'єктів [7, 8]. Будемо розглядати вихідну математичну модель у вигляді рівняння

$$\sum_{i=0}^r a_i(t) y_i(t) = \sum_{j=0}^s b_j(t) f^j(t), \quad (10)$$

де  $y(t)$  і  $f(t)$  – вихідний і вхідний сигнали,  $a_i(t)$  і  $b_j(t)$  – змінні відновлювані параметри елементів. Перехід від моделі (10) до еквівалентної їй інтегральної моделі Вольтерри можна здійснити шляхом  $M$ -кратного ( $M = \max(r, s)$ ) інтегрування лівої і правої частини (10) і багаторазового застосування при цьому формули інтегрування частинами [5]. Зокрема, в припущенні достатньої гладкості залежностей  $a_i(t)$  і  $b_j(t)$ , моделі (10) відповідає така еквівалентна їй інтегральна модель вигляду

$$a_r(t)y(t) + \int_0^t K_1(t, \tau)y(\tau)d\tau = b_r(t)f(t) + \int_0^t K_2(t, \tau)f(\tau)d\tau + F(t), \quad (11)$$

де

$$K_r(t, \tau) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \binom{r}{j} \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} C_{v0}^{(j)}(\tau) + \sum_{j=0}^r \sum_{l=0}^{r-1} (-1)^{j-1} \binom{r-l}{j} \frac{(t-\tau)^{l+j-1}}{(l+j-1)!} C_{vl}^{(j)}(t), \quad v=1, 2, \quad (12)$$

$$C_{1l}(t) := a_{r-l}(t), \quad C_{2l}(t) := b_{r-l}(t), \quad F(t) = \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-l-1} \frac{d_{jl}(x, y)}{(j+l)!} t^{j+l}, \quad (13)$$

$$d_{jl}(x, y) = \frac{(r-l)}{j!} \sum_{\mu=0}^j \binom{j}{\mu} \left[ a_i^{(\mu)}(0) y^{(j-\mu)}(0) - b_i^{(\mu)}(0) x^{(j-\mu)}(0) \right] \sum_{i=0}^{\mu} (-1)^i \frac{(j-i)}{(r-l-v)!} \binom{\mu}{i}, \quad (14)$$

$$\binom{p}{q} := \frac{p!}{(p-q)!q!}. \quad (15)$$

Розглянемо питання побудови лінійних диференціальних та інтегральних Т-моделей динамічних об'єктів і деякі способи мінімізації похибок розглянутого методу. Задача розрахунку параметрів  $a_i(t)$  і  $b_j(t)$  моделей (10) і (11) розглядаємо, припускаючи, що вони мають вигляд

$$a_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \varphi_j(t), \quad b_k(t) = \sum_{l=1}^{n_k} \beta_{kl} \psi_l(t) \quad (16)$$

де  $\alpha_{ij}$  і  $\beta_{kl}$  – невідомі, що підлягають визначенню числа;

$\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^m$  і  $\{\psi_l(t)\}_{l=1}^n$  ( $m = \max_i m_i$ ,  $n = \max_k n_k$ ) – деякі системи лінійно

незалежних функцій, кожна з яких може бути задана на  $[0, H]$  степеневим рядом Тейлора, тобто такі, що мають Т-зображення [7]  $\phi_j(\nu)$ ,  $\psi_i(\mu)$ ,  $\nu, \mu = \overline{0, \infty}$ , і визначаються відповідно виразами

$$\phi_j(\nu) := \frac{H^\nu}{\nu!} \phi_j^{(\nu)}(0), \quad \psi_i(\mu) := \frac{H^\mu}{\mu!} \psi_i^{(\mu)}(0). \quad (17)$$

Крім цього, надалі будемо припускати аналогічно, що Т-функції вхідного і вихідного сигналів відомі:  $X(k) \doteq x(t)$  і  $Y(l) \doteq y(t)$ . Тут  $\doteq$  – знак відповідності при диференціальному Т-перетворенні,  $k = \overline{0, K} \geq r$ ,  $l = \overline{0, L}$  і  $K, L$  – цілі невід'ємні числа такі, що

$$R := \max(K, L) + 1 \geq \sum_{i=0}^r m_i + \sum_{j=0}^s n_j = N := N(r, s), \quad (18)$$

де  $r, s, m_i$  і  $n_j$  визначені в (4.47) і в (4.55).

Наведемо деякі необхідні співвідношення з теорії Т-перетворень, детально розглянуті в [1]. Нехай функції  $z(t)$ ,  $z_1(t)$  і  $z_2(t)$  задовольняють умови застосовності диференціальних Т-перетворень і  $Z(k)$ ,  $Z_1(k)$  і  $Z_2(k)$  відповідно до їх Т-зображення,  $k = \overline{0, \infty}$ . Тоді маємо такі співвідношення:

$$\alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t) \doteq \alpha_1 Z_1(k) + \alpha_2 Z_2(k), \quad (19)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2 \in R^1$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ ;

$$\frac{d^\nu z(t)}{dt^\nu} \doteq D^\nu Z(K) = \frac{(k+\nu)!}{k! H^\nu} Z(k+\nu), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

де  $D$  – символ Т-похідної,  $D^0 Z(K) := DZ(K)$ ;

$$z_1(t) Z_2(t) \doteq z_1(k) * Z_2(k) = \sum_{l=0}^k Z_1(k-l) Z_2(l), \quad (21)$$

де  $*$  – символ Т-згортки;

$$\int_0^t z(\tau) d\tau \doteq \int_L Z(k) * DT(k) = \frac{H}{K} Z(k-1) Cb(k), \quad (22)$$

де  $\int$  – символ Т-інтеграла;  $C$  – деяка стала;  $b(k)$  и  $T(k)$  – функції, що зображують оригінали  $z(t) = 1$  і  $Z(t) = t$ :

$$\begin{aligned} 1 \doteq b(k) &\doteq \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \\ t \doteq T(k) &= Hb(k-1), \\ t^m \doteq T^m(k) &= H^m b(k-m) \end{aligned} \quad (23)$$

Надалі нам ще будуть потрібні змішані многочлени Чебишева I роду

$$T_n\left(\frac{t}{h}\right) \doteq T_n\left(\frac{2t}{h}-1\right) = \cos\left(\arccos\left(\frac{2t}{h}-1\right)\right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{t}{h}\right)^k C_{kn}, \quad (24)$$

де  $C_{kn}$  – обчислюються за формулами

$$C_{kn} = (-1)^{n+k} 2^{2k-1} \left[ 2\left(\frac{n+k}{h-k}\right) - \left(\frac{n+k-1}{h-k}\right) \right] \quad (25)$$

і є одночасно  $k$ -ми дискретами Т-функцій  $C_n(k)$ , що є відповідними

поліномами  $T_n\left(\frac{t}{h}\right)$

$$C_n(k) \doteq T_n\left(\frac{t}{h}\right) \doteq C_{kn}$$

У роботі наведено таблицю перших шести Т-функцій  $C_n(k)$ .

### Диференціальні Т-моделі

Поширюючи формальний метод на моделі вигляду (10), тобто застосовуючи до лівої і правої частин диференціального рівняння (10) пряме Т-перетворення, отримуємо, згідно з (19) – (21) математичну (диференціальну) Т-модель нестационарного об'єкта у формі

$$\sum_{i=0}^r A_i(k) * D^{(r-i)} Y(k) = \sum_{i=0}^r B_i(k) * D^{(s-i)} X(k) \quad (26)$$

де  $A_i(K)$  і  $B_i(K)$  –  $K$ -ті дискрети параметрів  $a_i(t)$  і  $b_j(t)$  в (26), що підлягають визначенню з (26).

Очевидно, що для нестационарних об'єктів система лінійних алгебраїчних рівнянь (26) відносно  $A_i(K)$  і  $B_i(K)$  буде загалом невизначеною. Уникнути цього недоліку Т-моделі (26) можна припустивши, що  $a_i(t)$  і  $b_j(t)$  визначаються співвідношеннями (17). У цьому випадку, скориставшись (23), (19) – (21), згідно з (17) отримаємо наступну диференціальну модель

$$\sum_{i=0}^r \sum_{q=1}^{m_i} \alpha_{iq} \phi_q(k) * D^{(r-i)} Y(k) = \sum_{i=0}^r \sum_{q=1}^{m_i} B_{iq} \psi_i(k) * D^{(s-j)} X(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Зрозуміло, що якщо  $k = 0, K$ , то при виконанні нерівності (18) система (26) може бути або нормальною, або перевизначеною при

$$X(k > K) = Y(l > L) \doteq 0.$$

Розглянемо питання розрахунку параметрів Т-моделей вигляду (27) при виконанні умови (18), на основі застосування змішаних многочленів Чебишева вигляду (24). За аналогією з ТЛ-методом розв'язання



диференціальних рівнянь введемо невідомі допоміжні параметри  $\tau_p$ ,  $p = \overline{1, R-N}$ ,  $M = \max(K, L)$  і замість системи (26) будемо розглядати таку нормальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих  $a_{ij}$  і  $b_{ij}$  (назвемо її за аналогією ТЛ-моделі)

$$\sum_{i=0}^r \sum_{q=1}^{m_i} \alpha_{iq} \phi_q(k) * D^{(r-i)} Y(k) = \sum_{j=0}^s \sum_{l=1}^{n_l} \beta_{jl} \psi_l(k) * D^{(s-j)} X(k) + \sum_{p=1}^{n-N} \tau_p C_{N+p}(k). \quad (28)$$

Ясно, що при  $M = N-1$  система (28) збігається з (27). Ефективність введення допоміжних параметрів і використання змішаних многочленів Чебишева при розв'язанні диференціальних рівнянь ( $\tau$ -метод Ланцоша) добре відома (див. напр., [2]). Щодо задачі розрахунку параметрів Т-моделей проілюструємо ефективність визначення параметрів  $a_{iq}$  і  $b_{jl}$  з системи (28) на наступному прикладі.

Приклад (а). Відомо, що при  $H = 2$ , дискрети на вході дорівнюють  $X(0) = 1$ ,  $X(1) = 1$ ,  $X(K \geq 2) = 0$ , а на виході  $Y(0) = 0$ ,  $Y(1) = 4$ ,  $Y(2) = 1$ ,  $Y(3) = -\frac{1}{3}$ ,  $Y(4) = \frac{1}{12}$ ,  $Y(k \geq 5) = 0$ , тобто оригінали мають вигляд

$$x(t) = 1+t; \quad Y(t) = 2t + \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{192}.$$

У [2] побудована без введення допоміжних параметрів  $\tau_p$  при змішаних многочленах Чебишева ТЛ-модель першого порядку вигляду

$$(1+2D)Y(k) = 3x(t) + x'(t), \quad (29)$$

якій з нев'язкою (похибкою)  $\varepsilon(t) = \frac{t^4}{192}$  при зворотному Т-перетворенні відповідає диференціальне рівняння

$$y(t) + 2y'(t) = 3x(t) + x'(t). \quad (29a)$$

Застосовуючи змішані многочлени

$$T_3\left(\frac{t}{2}\right) = \cos 3\arccos(t-1) = 4t^3 - 12t^2 + 9t - 1,$$

і

$$T_4\left(\frac{t}{2}\right) = \cos 4\arccos(t-1) = 8t^4 - 32t^3 + 40t^2 - 16t + 1$$

для побудови моделі вигляду

$$y(t) + ay'(t) = b_0x(t) + b_1x'(t) \quad (30)$$

на підставі (27) отримуємо TL-модель, де згідно з (23), (25) і (25),  $C_3(0)=1$ ,  $C_3(1)=18$ ,  $C_3(2)=-48$ ,  $C_3(3)=32$ ,  $C_4(0)=1$ ,  $C_4(1)=32$ ,  $C_4(2)=160$ ,  $C_4(3)=256$ ,  $C_4(4)=128$ .

У матричній формі система (4.67) має вигляд

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -18 & 32 \\ 1 & 0 & 0 & -96 & 320 \\ 1 & 0 & 0 & -192 & 1536 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1536 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b_0 \\ b_1 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Звідси знаходимо, що  $\tau_1 = \frac{19}{2304}$ ,  $\tau_2 = \frac{1}{1536}$ ,  $a = 2\frac{7}{12}$ ,  $b_0 = 3\frac{175}{768}$ ,

$$b_1 = \frac{8969}{4608}.$$

За цих значень параметрів  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $\tau_1$ , і  $\tau_2$  при переході від TL-моделі (30) до диференціального рівняння (27) за допомогою зворотного T-перетворення, максимальна величина нев'язки  $\varepsilon_{TL}(t)$  буде дорівнювати

$$\max_{t \in [0, 2]} |\varepsilon_{TL}(t)| = \max_{t \in [0, 2]} |\tau_1 T_3(t-1) + \tau_2 T_4(t-1)| = \frac{41}{4608}.$$

Разом з тим максимальна величина нев'язки  $\varepsilon_{TL}(t)$  для TL-моделі (29)

при переході до рівняння (30) дорівнює  $\max_{t \in [0, 2]} [t^4] = \frac{1}{12}$ , тобто точність (в щодо величин нев'язки) при застосуванні TL-моделей збільшилася більш, ніж у дев'ять разів. Кількість арифметичних операцій, необхідних для розв'язання системи в порівнянні з кількістю операцій при визначенні параметрів T-моделі (28) з системи (29) в роботі зросла приблизно в чотири рази [9].

Побудова диференціальних T-моделей з постійними параметрами більш високих порядків при взятих в наведеному вище прикладі вихідних даних є доцільною. Це пояснюється тим, що, як легко перевірити, для T-моделей вигляду

$$\sum_{i=0}^r a_i D^{(i)} Y(k) = (b_0 + b_1 D) X(k), \quad r = 2, 3, 4,$$

де  $a_i$ ,  $b_0$ ,  $b_1 = \text{const}$ , нев'язка при переході до диференціального рівняння не зменшиться у порівнянні з моделлю (29), побудованою в роботі [2] (в цьому розумінні модель (29) є найкращою).

Однак застосування TL-моделі, наприклад, вже другого порядку вигляду

$$(1 + a_1 D + a_1 D^2) Y(k) = (b_0 + b_1 D) X(k) + \tau C_4(k), \quad (32)$$

як буде показано нижче, дозволяє значно мінімізувати нев'язку навіть за меншої кількості арифметичних операцій, ніж при побудові TL-моделі першого порядку (30).

Після підстановки значень  $Y(k)$ ,  $X(k)$ , і  $C_k(k)$  система в матричній формі набуде вигляду:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 64 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -640 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1536 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1536 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

Звідки  $\tau = \frac{1}{1536}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{5}{12}$ ,  $b_0 = \frac{77}{32}$ ,  $b_1 = -\frac{305}{1536}$  і відтак,

максимальна величина модуля нев'язки  $\varepsilon_{TL}^2(t) = \tau T_4(t-1)$  для TL-моделі вигляду (32) при переході шляхом зворотного Т-перетворення до диференціальних рівнянь дорівнюватиме

$$\max_{t \in [0, 2]} |\varepsilon_{TL}^2(t)| = \max_{t \in [0, 2]} \tau |T_4(t-1)| = \frac{1}{1536},$$

тобто в 128 разів менше, ніж для Т-моделі вигляду (29), і приблизно в 64 рази менше, ніж для TL-моделі вигляду (30). При цьому кількість арифметичних операцій, необхідних для розв'язання системи, через трикутний вигляд розрідженості її матриці буде менше, ніж кількість операцій для системи (31).

### Інтегральні ТА-моделі

Розглянемо тепер питання побудови Т-моделей лінійних динамічних об'єктів (ТА-моделей) в інтегральній формі виду (11) в припущенні, що

$$K_v(t, \tau) = \sum_{i=1}^{r_v} \sum_{j=1}^{s_v} \varphi_{ij}^v \varphi_i^v(t) \psi_j^v(t), \quad v = \overline{1, 2}, \quad (34)$$

$$F(t) = \sum_{s=0}^p f_s \left( \frac{t}{H} \right)^s, \quad (35)$$

де системи лінійно незалежних функцій  $\{\varphi_i^v(t)\}_{i=1}^{\infty}$  і  $\{\psi_j^w(t)\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $j = 1, 2$  мають в  $[0, H]$  відомі дискрети  $\varphi_i(k)$ ,  $\psi_j(k)$  і  $\varphi_{ij}$ ,  $f_s$  невідомі, числа, що підлягають визначенню з  $R^1$ . Очевидно, що вирази (12) – (15) будуть окремим випадком моделей (34), (35) з параметрами  $a_i(t)$  і  $b_i(t)$  вигляду (16) при відповідному виборі функцій  $\varphi_i$ ,  $\psi_j$ , чисел  $r_v$ ,  $s_v Q$ , ( $v = 1, 2$ ) і, як

наслідок, моделі вигляду (11), (34), (35).

Будемо припускати, що число невідомих параметрів  $p = m + n + r_1 s_1 + r_2 s_2 + Q + 1 \geq R$ , де число  $R$  визначено у формулі (18). Введемо, як і в випадку диференціальних ТЛ-моделей допоміжні параметри  $\{\tau_i\}_{i=1}^{n-p}$  ( $M$  – визначено в (28)) і за схемою апроксимаційного методу В.К. Дзядика додамо у праву частину моделі (11) доданок (нев'язку)

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{R-p+1} \tau_i T_{p+i}^* \left( \frac{2t}{H} - 1 \right), \quad (36)$$

де  $T_{p+i}^*(\cdot)$  – многочлени Чебишева I роду виду (24).

Застосовуючи тепер до лівої і правої частин (11) пряме Т-перетворення згідно з (34), (35), (18) з урахуванням співвідношень (19), (21) – (23), отримуємо наступну нормальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь ПА-модель для визначення параметрів

$$\begin{aligned} \alpha_q \doteq \alpha_{rq}, \quad \beta_l \doteq \beta_{rl}, \quad \left\{ \begin{array}{l} v \\ \phi_{ij} \end{array} \right\} \begin{array}{l} j = \overline{1, s} \\ l, r \end{array}, \quad f_q \quad \text{і} \quad \tau_i : \\ \sum_{q=0}^m \alpha_q \phi_j(k) * Y(k) + \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{l=1}^{s_1} \phi_{ij} \phi_l(k) * \int_L \phi_j(k) * DT(k) = \\ = \sum_{l=1}^n B_l \psi_l(k) * X(k) + \sum_{q=1}^{r_2} \sum_{l=1}^{s_2} \phi_{ql}^2 \phi_q^2(k) * f \int_L \psi_L(k) * DT(k) + \\ + f_k b(p-k) + \sum_{i=1}^{n-p+2} \tau_i C_{i+p}(k), \end{aligned} \quad (37)$$

де величини  $b(p-k)$  і  $C_{p+i}(k)$  визначені відповідно співвідношеннями (18) і (24).

До переваг інтегральних ТА-моделей (37) перед диференціальними ТЛ-моделями (28) потрібно віднести поряд з їх спільністю, належить вимога меншої кількості дискрет вхідного і вихідного сигналів при такій самій, або навіть меншій, рівномірній нормі невязки.

Проілюструємо сказане прикладом.

Приклад. Побудуємо інтегральну модель першого порядку вигляду

$$ay(t) + \int_0^t y(s) ds = b_1(x(t) - x(0)) + b_2 \int_0^t x(s) ds$$

еквівалентну диференціальній моделі першого порядку виду при тих самих вихідних даних  $x(t)$ ,  $y(t)$  і  $H$ , що і в прикладі (а).

Система (28) в цьому випадку згідно з (22) набуде вигляду

$$aY(k) + \frac{2}{k} Y(k-1) = b_1(x(k) - x(0)b(k)) + b_2 \frac{2}{K} X(K-1) + \sum_{i=1}^{m-1} \tau_i C_{i+2}(K).$$

У табл. 1 наведено значення коефіцієнтів  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  моделей вигляду (30) і (37) отриманих на основі застосування диференціальних Т-моделей вигляду (27) і TL-моделей вигляду (28), а також інтегральних Т-моделей вигляду, одержуваних без допоміжних параметрів  $\tau_i$ , тобто  $\tau_i = 0$ , а також ІТА-моделі, отриманої за допомогою допоміжних параметрів з урахуванням різної кількості дискрет вхідного і вихідного сигналів ( $K+1$  і  $L+1$  відповідно). Крім цього, в таблиці подано значення допоміжних параметрів  $\tau_i$  величини нев'язок  $\varepsilon$  в рівномірній метриці ( $\|\bullet\| = \max_{t \in [0, H]} |\bullet|$ ), і кількість ( $A$ ) арифметичних операцій, необхідних для визначення параметрів  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $\tau_i$  (для TL- і ІТА-моделей) за методом виключення з урахуванням розрідженості матриць. Аналіз наведених у табл. 1 величин  $A$  і  $\varepsilon$ , а також розв'язків інших прикладів дозволяє зробити висновок, що для всіх цих випадків краще підходить ІТА-модель, яка дає максимально можливу точність (щодо величин нев'язки) при тій самій вихідній інформації серед розглянутих моделей.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів моделей при різній кількості дискрет вхідного та вихідного сигналів

$K+1$	$L+1$	$a$	$b_0$	$b_1$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$A$	$\varepsilon$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Т-модель									
2	4	2	3	1	0	0	0	5	1/3
2	5	2	3	1	0	0	0	7	1/12
TL-модель									
2	4	1	$\frac{19}{32}$	$\frac{29}{48}$	$-\frac{1}{96}$	0	0	11	$\frac{1}{96}$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
2	5	$2\frac{7}{12}$	$3\frac{175}{768}$	$1\frac{629}{768}$	$\frac{19}{2304}$	$\frac{1}{1536}$	0	21	$\frac{41}{4608}$
ІТ-модель									
2	4	2	3	1	0	0	0	5	1/6
2	5	2	3	1	0	0	0	7	1/30
ІТА-модель									
2	4	$1\frac{1}{8}$	$2\frac{61}{96}$	$-\frac{101}{256}$	$-\frac{1}{768}$	$-\frac{1}{768}$	0	13	$\frac{1}{384}$
2	5	$2\frac{2}{5}$	$3\frac{109}{480}$	$1\frac{4441}{7680}$	$\frac{13}{15360}$	$\frac{7}{7680}$	$\frac{1}{15360}$	31	

## **Висновок**

Таким чином, запропоновано конструктивні способи мінімізації похибки (щодо величини нев'язки) розрахунку параметрів Т-моделей стаціонарних і нестаціонарних ВП, що описуються диференціальними і інтегральними динамічними моделями. Показано переваги ІТА-моделі перед іншими моделями. Ефективність застосування пропонуваніх підходів до підвищення точності розрахунку параметрів Т-моделей проілюстровано на прикладах.

1. *Васильев В.В.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Васильев В.В., Симак Л. А. Киев, Украина: ИПМЭ НАН Украины, 2008.
2. *Вашины Е.* Динамика измерительных цепей. Вашины Е. Москва, Россия: Энергия. 1969.
3. *Верлань А.Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Киев, Украина: Наукова думка, 1986.
4. *Верлань А.Ф.* Інтегральні рівняння аналізу нестационарних електричних систем. Верлань А. Ф., Ситник О. О., Ключка К. М. Вісник Національного університету "Львівська політехніка". "Електроенергетичні та електромеханічні системи", № 637, С.12-17, 2009.
5. *Верлань А.Ф.* О некоторых особенностях применения интегральных уравнений в вопросе анализа динамики электрических цепей. [Верлань А.Ф., Ключка К.Н., Сытник А.А., Протасов С.Ю.] Труды V Междунар. конф. Моделирование – 2016, Киев: ИПМЭ НАН Украины, 2016, С.81-84.
6. *Максимович Н.А.* Алгоритм идентификации линейных стационарных объектов с распределенными параметрами по их экспериментальным переходным характеристикам. Максимович Н.А., Сагатов М.В. Вестник ТашГТУ, №1, С.43–47.
7. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных преобразований. Пухов Г.Е. Киев, Украина: Наукова думка, 1988.
8. *Сытник А.А.* Моделирование и оценка параметров сложных технических систем. Сытник А.А., Подгорный О.В. Праці VII Міжнар. наук.-практ. конф. Наука і освіта— 2004, 2004, Т. 64, с. 77–79.
9. *Сытник А.А.* Регуляризация линеаризованных систем уравнений при идентификации нелинейных объектов", Сытник А.А., Верлань А.Ф., Гази Аמיד. Вісник Черкаського державного технологічного університету, №1, с. 25–27, 2004.

**<http://doi.org/10.5281/zenodo.3859641>**

*Поступила 30.09.2019р.*