УДК 51-74;519.87

О.А. Дячук, Київ

ФОРМУВАННЯ МОДЕЛЕЙ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ПЕРВИННИХ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІВ

Abstract. We consider the conveniency of the method of interpolation and the method of the best processing of experimental data (Chebyshev approximation) for processing information about multidimensional quantities.

Вступ

Багатопараметричні вимірювальні системи і прилади можна умовно розділити на два класи. До першого відносять ті багатопараметричні системи і прилади, для яких проведення навіть одного експерименту з оцінки векторної величини потребує досить складної і тривалої підготовки. Апроксимацію функцій перетворення для першого класу приладів і систем доцільно проводити на основі методу інтерполяції [1, 3].

До другого класу багатопараметричних систем і приладів відносяться ті, для яких проведення значної кількості експериментів за оцінкою векторної величини не викликає труднощів. При цьому, використовуючи багатопараметричні системи й прилади другого класу, практично можна здійснювати досить велику кількість тестових попередніх вимірювань.

Побудова апроксимувальних поліномів

Нехай є вхідна векторна величина $\vec{x}=\left(x_1,\ ...,\ x_i,\ ...,\ x_n\right)\in E^n$ і вихідна одномірна величина $u\left(\vec{x}\right)=u\left(x_1,\ ...,\ x_i,\ ...,\ x_n\right)\in E^n$. Будемо апроксимувати невідому вихідну функцію $u\left(\vec{x}\right)$ поліномом $P_{n_1...n_i...n_n}\left(x_1,\ ...,\ x_i,\ ...,\ x_n\right)$, де n – найвищий ступінь змінної x_i, $\left(i=\overline{1,\ n}\right)$.

Нехай координата x_i векторної величини $\vec{x}$ і вихідна величина $u\left(\vec{x}\right)$ попередньо вимірюються α_i разів $\left(i=\overline{1,\ n}\right)$.

Апроксимувальний поліном $P_{n_1...n_i...n_n}\left(x_1,\ ...,\ x_i,\ ...,\ x_n\right)$ будемо шукати за умови забезпечення мінімуму функціонала

$$\sum_{k_1=1}^{\alpha_1}\cdots\sum_{k_i=1}^{\alpha_i}\cdots\sum_{k_n=1}^{\alpha_n}\left\{\left[u\left(x_1^{(k_1)},\ ...,\ x_i^{(k_i)},\ ...,\ x_n^{(k_n)}\right)\right]-\left[P_{n_1...n_i...n_n}\left(x_1^{(k_1)},\ ...,\ x_i^{(k_i)},\ ...,\ x_n^{(k_n)}\right)\right]\right\}^2,$$

де $x_i^{(k_i)}$ означає k_i вимір змінної x_i.

У зв'язку з цим поліном представимо у вигляді

$$P_{n_1 \dots n_i \dots n_n}\left(x_1,\ \dots,\ x_i,\ \dots,\ x_n\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_i=1}^{n_i} \dots \sum_{j_n=1}^{n_n} a_{j_1 \dots j_i \dots j_n} \prod_{i=1}^{n} Q_{ji}\left(x_i\right), \qquad (1)$$

де $Q_{ji}\left(x_i\right)$ – цілком визначені поліноми відповідних ступенів *n*, що задовольняють умови точності на дискретній множині точок, тобто для заданих вимірювань

$$\sum_{k=1}^{\min\left(\alpha_j,\ \alpha_e\right)} Q_{ji}\left(x_i^{(k)}\right) Q_{je}\left(x_e^{(k)}\right) = 0 \ i \neq e = \overline{1,\ n}.$$

З цих співвідношень можна отримати вираз для коефіцієнтів $a_{j_1 \dots j_i \dots j_n}$

$$\mathrm{a}_{\mathrm{j_1 \dots j_i \dots j_n}} = \sum_{k_1=1}^{\alpha_1} \dots \sum_{k_i=1}^{\alpha_i} \dots \sum_{k_n=1}^{\alpha_n} u\left(x_1^{(k_1)},\ \dots,\ x_n^{(k_n)}\right) \prod_{i=1}^{n} Q_{ji}\left(x_i^{(k_i)}\right) \Big/ \prod_{i=1}^{n} \sum_{k_i=1}^{\alpha_i} Q_{ji}\left(x_i^{(k)}\right). \qquad (2)$$

Покажемо, що визначення коефіцієнтів $a_{j_1 \dots j_i \dots j_n}$ з мультиіндексом $\left(j_1,\ \dots,\ j_i,\ \dots,\ j_n\right)$, можна звести до розв'язання *n* послідовних задач одновимірного середньоквадратичного наближення.

Нехай вихідна величина $u\left(\vec{x}\right) = u\left(x_1,\ \dots,\ x_i,\ \dots,\ x_n\right)$ зафіксована за змінними, $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_n$, тобто змінюється тільки за змінною x_i з деякими фіксованими вузлами за іншими змінними $u\left(x_1^{(k_1)},\ \dots,\ x_{i-1}^{(k_{i-1})},\ x_i^{(k_i)},\ x_{i+1}^{(k_{i+1})},\ \dots,\ x_n^{(k_n)}\right)$, де $1 \leq k_s \leq \alpha_s,\ s = \overline{1,\ n},\ s \neq i.$

Якщо ввести позначення

$$q_{j_1 \dots j_{i-1}, j_i, j_{i+1} \dots j_n} = \\ = \sum_{k_1=1}^{\alpha_1} u\left(x_1^{(k_1)},\ \dots,\ x_{i-1}^{(k_{i-1})},\ x_i^{(k_i)},\ x_{i+1}^{(k_{i+1})},\ \dots,\ x_n^{(k_n)}\right) Q_j\left(x_i^{(k_i)}\right) \Big/ \sum_{k_i=1}^{\alpha_i} Q_{ji}^2\left(x_i^{(k_i)}\right), \qquad (3)$$

то $q_{j_1 \dots j_{i-1}, j_i, j_{i+1} \dots j_n}$ мінімізує наступний середньоквадратичний вираз

$$\sum_{k_1=1}^{\alpha_1} \left[u\left(x_1^{(k_1)},\ \dots,\ x_{i-1}^{(k_{i-1})},\ x_i^{(k_i)},\ x_{i+1}^{(k_{i+1})},\ \dots,\ x_n^{(k_n)}\right) - \sum_{k_i=1}^{\alpha_i} q_{j_1 \dots j_i \dots j_n} Q_{ji}\left(x_i^{(k_i)}\right) \right]^2. \qquad (4)$$

Легко бачити, що

$$\alpha_{j_1\dots j_i\dots j_n}=\sum_{k_1=1}^{\alpha_1}\dots\sum_{k_{i-1}=1}^{\alpha_{i-1}}\dots\sum_{k_{i+1}=1}^{\alpha_{i+1}}\dots\sum_{k_n=1}^{\alpha_n}q_{j_1\dots j_i\dots j_n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq s}}Q_{js}\left(x_s^{(k_s)}\right)\Bigg/\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n}\sum_{k_s=1}^{\alpha_s}Q_{js}^2\left(x_s^{(k_s)}\right). \quad (5)$$

З останніх співвідношень видно, що якщо вирішити задачу одномірного середньоквадратичного наближення, то коефіцієнти $\alpha_{\mathrm{j_1\dots j_i\dots j_n}}$ $\alpha_{\mathrm{j_1\dots j_i\dots j_n}}$ у поліномі багатовимірного середньоквадратичного наближення будуть визначатися на підставі співвідношення (5) [2]. Для підрахунку похибок обчислимо багатовимірні поліноми за узагальненою схемою Горнера

$$P_{n_1\dots n_i\dots n_n}\left(x_1^{(k_1)},\ \dots,\ x_n^{(k_n)}\right)=\sum_{j_1=0}^{n_1}\dots\sum_{j_n=0}^{n_n}\alpha_{j_1\dots j_n}\prod_{i=1}^{n}Q_{ji}\left(x_i^{(k_i)}\right). \quad (6)$$

При застосуванні багатовимірної узагальненої схеми Горнера візьмемо до уваги ту обставину, що за умови алгебраїчних багатовимірних поліномів

$$Q_{ji}\left(x_i^{(k_i)}\right)=\left[x_i^{(k_i)}\right]^{ji}. \quad (7)$$

Тому

$$\begin{aligned}&P_{n_1\dots n_i\dots n_n}\left(x_1^{(k_1)},\ \dots,\ x_n^{(k_n)}\right)\equiv\\ &\equiv\sum_{j_1=0}^{n_1}\dots\sum_{j_n=0}^{n_n}\alpha_{j_1\dots j_n}\prod_{i=1}^{n}\left[x_i^{(k_i)}\right]^{ji}=\sum_{j_1=0}^{n_1}\dots\sum_{j_n=0}^{n_n}\alpha_{j_1\dots j_n}\prod_{i=1}^{n-1}\left[x_i^{(k_i)}\right]^{ji},\end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}&\sum_{j_n=0}^{n_n}\alpha_{j_n\dots j_n}\left[x_n^{(k_n)}\right]=\sum_{j_1=0}^{n_1}\dots\sum_{j_{n-1}=0}^{n_{n-1}}\prod\left[x_i^{(k_i)}\right]^{ji}\times\\ &\times\left[_{n_n+1 раз\dots}\left[\alpha_{j_1\dots j_{n-1}}n_n x_n^{(k_n)}+\alpha_{j_1\dots j_{n-1}}n_{n-1}\right]x_n^{(k_n)}+\alpha_{j_1\dots j_{n-1}}n_{n-1}\right]+\dots+\alpha_{j_1\dots j_{n-1}}1\Big]x_n^{(k_n)}+\\ &+\alpha_{j_1\dots j_{n-1}}0\Big]x_n^{(k_n)}=\left[_{n_n+1 раз\dots}\left[x_n^{(k_n)}+\omega_{j_1\dots j_{n-1}}n_{n-1}\right]x_n^{(k_n)}+\omega_{j_1\dots j_{n-2}}n_{n-2}\right]x_n^{(k_n)}+\\ &+\dots+\omega_{j_1\dots j_{n-1}}1\Big]x_n^{(k_n)}+\omega_{j_1\dots j_{n-1}}0\Big],\end{aligned} \quad (9)$$

де $\omega_{j_1\dots j_{n-1}}=\sum_{j_1=0}^{n_1}\dots\sum_{j_{n-1}=0}^{n_{n-1}}\prod\left[x_i^{(k_i)}\right]^{ji}\alpha_{j_1\dots j_n}$.

Таким чином, в узагальненій багатомірній схемі Горнера кількість використання одномірних схем залежить від розмірності простору.

З метою обробки інформації за багатовимірними величинами звернемося до методу найкращої обробки експериментальних даних (чебишовська апроксимація).

Метод багатовимірної інтерполяції забезпечує у вузлах багатовимірної решітки абсолютний збіг величини сигналу на виході багатопараметричної системи або приладу з його аналітичним описом.

Метод найменших квадратів мінімізує середньоквадратичну похибку ухилення і тому дає можливість судити про якість обробки експериментальних даних у середньому. Водночас у процесі використання цього методу апроксимації можливі значні похибки за окремими вимірюваннями.

У зв’язку з цим фахівці в галузі вимірювальної техніки, що займаються обробкою експериментальних даних, приділяють особливу увагу методу чебишевської апроксимації [4, 6 – 8].

Розглянемо процедуру зведення задачі найточнішої обробки даних – чебишевської апроксимації до спеціальної задачі лінійного програмування.

Нехай на вхід приладу подається *одномірна* величина x, а на виході є *одномірна* величина u.

За тестові сигнали будемо подавати m вхідних одномірних сигналів x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m і отримувати при цьому m відповідних вихідних сигналів u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_m.

Останні будемо апроксимувати узагальненим поліномом n-го ступеня

$$u(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i(x), \tag{10}$$

де $l_i(x)$, $\left(i = \overline{1,\ n}\right)$ – довільна система лінійно незалежних функцій.

У методі найкращої обробки даних коефіцієнтів α_i $\left(i = \overline{1,\ n}\right)$ апроксимувального полінома повинні мінімізувати максимальне відхилення полінома від істинного значення вихідного сигналу, тобто мінімізувати функціонал

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i l_i(x_k) - u_k \right|. \tag{11}$$

Оскільки функції максимуму і модуля є такими, що не деференціюються, то для розв’язання експериментальної задачі (11) неможливо скористатися необхідною класичною умовою екстремуму в диференціальному обчисленні. Для розв’язання екстремальної задачі (11) використаємо прийом, запропонований академіком Л.В. Канторовичем [5].

Введемо позначення

$$z = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i l_i\left(x_k\right) - u_k\right|. \qquad (12)$$

Отримаємо

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i l_i\left(x_k\right) - u_k\right| \le z, \text{ або} -z \le \sum_{i=1}^{n} a_i l_i\left(x_k\right) - u_k \le z, \qquad (13)$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} a_i l_i\left(x_k\right) - z \le u_k, \text{ або} \sum_{i=1}^{n} a_i\left[-l_i\left(x_k\right)\right] - z \le -u_k, \; k = \overline{1, m}. \qquad (14)$$

Оскільки нам потрібно мінімізувати максимальне відхилення, це означає, що нам необхідно мінімізувати z за умови виконання $2m$ обмежень (14).

Якщо ввести такі векторно-матричні позначення

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_n \\ z \end{pmatrix}, \; \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} l_1\left(x_1\right)\ldots l_i\left(x_i\right)\ldots l_n\left(x_1\right) - 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1\left(x_m\right)\ldots l_i\left(x_m\right)\ldots l_n\left(x_m\right) - 1 \\ -l_1\left(x_1\right)\ldots l_i\left(x_1\right)\ldots l_n\left(x_1\right) - 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -l_1\left(x_m\right)\ldots l_i\left(x_m\right)\ldots l_n\left(x_m\right) - 1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_m \\ -u_1 \\ \cdots \\ -u_m \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

то завдання найкращої обробки експериментальних даних (11) за обмежень (14) можна звести до задачі

$$\min_{\vec{y}}\left(\vec{d}, \vec{y}\right) \qquad (16)$$

за обмежень

$$k\vec{y} \le \vec{b}, \qquad (17)$$

тобто до задачі, яка відноситься до середовища лінійного програмування.

В основі алгоритмів лінійного програмування лежать симплекс-метод та метод спуску. Дуальний методу спуску – метод підйому використовує у своїй роботі з чебишевської апроксимації багатовимірних функцій Дж. Райс [5].

Висновки

Спільне рішення проблеми чебишевської апроксимації багатомірних функцій ускладнене, незважаючи на існування алгоритмів лінійного програмування. Воно утруднене, в першу чергу, через неоднозначність розв’язання задачі найкращого наближення [7]. Цю перешкоду можна обійти в деяких окремих випадках з певними обмеженнями для функції, що апроксимується (наприклад, повинна бути відома решітка критичних точок функції, що апроксимується або ж функція, що апроксимується повинна бути задана у скінченому числі точок).

Водночас, значна громіздкість обчислювальної схеми не дає підстави вважати, що метод найменших квадратів у багатовимірному випадку настільки ж ефективний, як і в одномірному варіанті. Більш прийнятними для обробки інформації про багатовимірні величини є, на нашу думку, метод інтерполяції і метод найкращої обробки експериментальних даних (чебишевська апроксимація).

1. *Абдулаев Д.А*. Оперативная обработка измерительной информации в автоматизированных системах управления. Абдулаев Д.А Ташкент, Узбекистан: Фан, 1985.

2. *Абдусаратов Б.Б.* Некоторые вопросы построения специализированных вычислительных устройств дня решения обыкновенных дифференциальных уравнений интегральным методом, Абдусаратов Б.Б. Сагатов М.В. Труды II Республик. научн.-техн. конф. Интегральные уравнения в прикладном моделировании, ИПМЭ УССР, 1986, С.5-6.

3. *Абдусаратов Б.Б.* Об одном алгоритме численного решения интегрального уравнения задачи восстановления сигналов". Абдусаратов Б.Б. Вычислительные процессы в гибридных ЭВМ и комплексах. Киев, Украина: АН УзССР. Ин-т электродинамики. 1980, № 251, 12 с. (Препринт)

4. *Абдусаратов Б.Б*. Об одном подходе к построению специализированных вычислительных устройств для решения обыкновенных дифференциальных уравнений интегральным методом. Абдусаратов Б.Б. Сагатов М.В.Моделирование и разработка технических средств для АСУТП. Ташкент, Узбекистан: ПащПи, С.34-50, 1987.

5. *Азизов А.М.* Точность измерительных преобразователей. Азизов А.М., Горцов А.Н. Ленинград, Россия: Энергия, 1975.

6. *Сытник А.А.* Применение итерационных алгоритмов в задачах исследования динамики измерительных преобразователей на основе интегральных моделей. [Сытник А.А., ПалагинВ.В., Протасов С.Ю., Ключка К.М.] The International Scientific Association «Science & Genesis» Scientific achievements 2015, Vienna, Austria, Vol. II, 2015, pp.163-171.

7. *Сытник А.А*. Аппроксимация многопараметрических первичных измерительных преобразователей на основе метода наименьших квадратов. Сытник А.А. Вісник Черкаського державного технологічного університету, №4, С.86-89, 2003.

8. *VerlanA.A.* Analysis of power circuits’ dynamics using generalized state–space model. [VerlanA.A., Abdusatarov B.B., Sagatov M., Sytnyk A.A.] Proceedings of Fourth World Conference Intelligent Systems for industrial Automation, Tashkent, Uzbekistan, 2006, pp.168-176.

http://doi.org/10.5281/zenodo.3860742

Поступила 9.09.2019р.