At the three-segment polar axis introduced integral transformation generated by hybrid differential Fourier-Legendre-Bessel. EXPRESS own items to the operator.

Key words: *hybrid differential operators, spectral problem, the fundamental system of solutions, custom elements.*

Отримано: 21.02.2013

УДК 517.96

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук,
І. М. Довжицька, здобувач

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ТИПУ ШИЛОВА З НЕВІД'ЄМНИМ РОДОМ

Для одного класу параболічних систем рівнянь типу Шилова з невід'ємним родом і гладкими обмеженими коефіцієнтами, залежними від просторової й часової змінних, наведено твердження про стабілізацію розв'язків задачі Коші та сформульовано теорему типу Ліувілля.

Ключові слова: *параболічні за Шиловим системи із змінними коефіцієнтами, задача Коші, узагальнені початкові дані, стабілізація розв'язків задачі Коші.*

Вступ. У класичній теорії параболічних систем рівнянь із частинними похідними ключове місце займає фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші (ФМРЗК). Детальне дослідження цієї матриці дозволяє встановити розв'язність відповідної задачі Коші у різних функціональних просторах, описати класи коректності та єдиності для цієї задачі, одержати різні форми зображення її розв'язків, за допомогою яких з'ясувати їх якісні властивості, зокрема, принцип локалізації, стабілізацію, стійкість, теореми типу Ліувілля тощо [1—6].

Розвиваючи ідею Я. І. Житомирського [7] опису параболічно стійких до зміни коефіцієнтів систем рівнянь із частинними похідними, у [8] означено широкий клас параболічних систем із змінними коефіцієнтами, який істотно розширює клас параболічних за Шиловим систем рівнянь з невід'ємним родом та гармонічно доповнює клас Петровського параболічних систем рівнянь першого порядку стосовно часової змінної. Для таких систем побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші, досліджено її основні властивості, доведено коректну розв'язність задачі Коші у класі узагальнених початкових даних типу розподілів Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. та встановлено принцип локалізації розв'язку цієї задачі [8; 9].

У даній статті продовжуються дослідження, розпочаті у [8; 9]. Тут з'ясовується питання поведінки гладких розв'язків задачі Коші при необмеженому віддаленні часової змінної, а також умови, за яких розв'язки цієї задачі є поліномами стосовно просторової змінної.

Користуватимемось тут позначеннями і скороченнями із [9].

1. Попередні відомості. Розглянемо систему диференціальних рівнянь із частинними похідними p-го порядку вигляду

$$\partial_t u(t;x) = \left\{ P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x) \right\} u(t;x), (t;x) \in \Pi := (t_0;T] \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

де $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_m)$, а $P_0(t;i\partial_x)$ і $P_1(t,x;i\partial_x)$ — матричні диференціальні вирази порядків відповідно p *і* p_1, $p > p_1 \geq 0$, причому такі, що

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t;i\partial_x) u(t;x), (t;x) \in \Pi,$$

є параболічною за Шиловим системою рівнянь з показником параболічності h, $0 < h \leq p$, та невід'ємним родом μ і зведеним порядком p_0 [2]. Коефіцієнти виразу P_0 залежать лише від змінної *t,* а виразу P_1 можуть залежати як від *t*, так і від змінної *x*.

Надалі припускатимемо виконання наступних умов:

а) $0 \leq p_1 < h - n(1 - h\mu/p_0) - (m-1)(p-h)$;

б) коефіцієнти системи (1) неперервні за змінною *t,* нескінченно диференційовні за змінною *x* і обмежені разом із своїми похідними комплекснозначні функції на множині Π.

За таких умов у [8] побудовано ФМРЗК $Z(t,x;\tau,\xi)$ для системи (1) та досліджено її основні властивості гладкості, зокрема, встановлено, що матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ є нескінченно диференційовною функцією за кожною із змінних *x* і ξ на $\mathbb{R}^n$, причому у кожній смузі $(\tau;T] \times \mathbb{R}^n$, $\tau \in [t_0;T)$, $T > t_0$, справджується оцінка

$$\left| \partial_x^k \partial_\xi^q Z(t,x;\tau,\xi) \right| \leq c\left(t-\tau\right)^{-\frac{n+|k+q|_* + \gamma}{h}} e^{-\delta \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha*}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha*}}}, \quad \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \quad (2)$$

де $\alpha_* := \mu/p_0$, $\gamma := (m-1)(p-h)$.

Якщо для системи (1) задати початкову умову

$$u(t;x)\Big|_{t=t_0} = f, \ f \in \mathbf{S}'_\beta, \quad (3)$$

де $\mathbf{S}'_\beta$ — топологічно спряжений простір із векторним простором $\mathbf{S}_\beta$ Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. [10], то під розв'язком задачі Коші

(1), (3) у півпросторі $t>0$ розумітимемо вектор-функцію $u(t;x)$, $(t;x)\in\Pi$, диференційовну за змінною *t*, *p* разів диференційовну за змінною *x*, яка задовольняє систему (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (3) у сенсі збіжності в просторі $\mathbf{S}'_\beta$, тобто

$$\langle u(t;x),\varphi(x)E\rangle \underset{t\to+t_0}{\to} \langle f,\varphi(x)E\rangle \quad (\forall\varphi\in S_\beta)$$

де кутовими дужками $\langle,\rangle$ позначено дію узагальненої функції на основну, E — одинична матриця порядку *m*.

Безпосередньо з результатів, одержаних у [9], дістаємо таке твердження про коректну розв'язність задачі Коші (1), (3).

Теорема 1. Нехай початкова вектор-функція $f\in\mathbf{S}'_{1-\alpha_*}$, тоді відповідна задача Коші (1), (3) на множині Π однозначно розв'язна. Її розв'язок $u(t;x)$ неперервно залежить від початкових даних, зображується формулою

$$u(t;x)=\langle f,Z(t,x;t_0,\xi)\rangle,\,(t;x)\in\Pi,$$

і є звичайною вектор-функцією, диференційовною за змінною *t* і нескінченно диференційовною за змінною *x*.

2. Основний результат. Зважаючи на оцінку (2), за аналогією до [5], говоритимемо, що ФМРЗК *Z* системи (1) задовольняє умову Λ^+_ψ (або Λ^-_ψ), якщо для довільних $t,\tau,t>\tau,$ із півпростору $\tau\ge0$ (або $\tau>-\infty$) виконується оцінка

$$\left|\partial_x^k\partial_\xi^q Z(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_k[a(t;\tau)]^{-\chi(|k+q|_*)}\psi\left(\|x-\xi\|/a(t;\tau)\right),\{q,k\}\subset\mathbb{Z}^n_+,\,x\in\mathbb{R}^n,$$

де c_k — додатна стала, $a(t;\tau)$ — неперервна монотонно зростаюча необмежена функція така, що $a(\tau;\tau)=0,$ а $\chi(\cdot)$ і $\psi(\cdot)$ — деякі додатні на множині $[0;+\infty)$ функції такі, що $\lim\limits_{r\to+\infty}\chi(r)=+\infty$ і

$$\int_0^{+\infty}\psi(\eta)(1+\eta)^l\,d\eta<+\infty\ (\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}).$$

Приклади найпростіших систем (1) при $P_1\equiv0,$ що задовольняють умову $\Lambda^\pm_\psi,$ наведено в [4; 5].

Правильні такі твердження.

Теорема 2 (Ліувілля). Нехай розглядається система (1) при $t_0\to-\infty,$ для якої виконується умова В) у смузі $(-\infty;T]\times\mathbb{R}^n.$ Тоді якщо для ФМРЗК Z цієї системи виконується умова Λ^-_ψ, то кожна компонента регулярного у півпросторі $t \le T$ розв’язку $u(t;\cdot)$ системи (1), що задовольняє умову

$$\left|u(t;x)\right| \le c\left(1+\|x\|\right)^{\beta}, \ \beta \ge 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

є многочленом стосовно змінної x степеня, не вищого β.

Доведення. Безпосередньо з оцінки (4) знаходимо, що при кожному $t = t_0 < T$ розв’язок $u_0(\cdot) := u(t_0;\cdot)$ системи (1) є регулярним функціоналом з простору $\mathbf{S}'_{1-\alpha_*}$. Тому згідно з твердженням теореми 1 та єдиністю розв’язку відповідної задачі Коші для системи (1), маємо

$$u(t;x) = \left\langle u_0(\cdot), Z(t,x;t_0,\cdot)\right\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) Z(t,x;t_0,\xi)d\xi, \ t \in (t_0;T], \ x \in \mathbb{R}^n$$

(тут ураховано регулярність вектор-функції $u_0(\cdot)$).

Звідси, скориставшись умовами Λ_ψ^- і (4), одержуємо, що

$$\left|\partial_x^k u(t;x)\right| \le c_k c\left[a(t;t_0)\right]^{-\chi\left(|k|_*\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\|x-\xi\|/a(t;t_0)\right)\left(1+\|\xi\|\right)^{\beta} d\xi,$$

$$t \in (t_0;T], \ x \in \mathbb{R}^n.$$

В останньому інтегралі здійснимо заміну змінних інтегрування згідно з правилом $\xi = x + a(t;t_0)\zeta$, тоді

$$\left|\partial_x^k u(t;x)\right| \le c_k c\left[a(t;t_0)\right]^{-\chi\left(|k|_*\right)+n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\|\zeta\|\right)\left(1+\|x+a(t;t_0)\zeta\|\right)^{\beta} d\zeta \le$$

$$\le c_k c(x)\left[a(t;t_0)\right]^{-\chi\left(|k|_*\right)+n+\beta} \times \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\|\zeta\|\right)\left(1+\|\zeta\|\right)^{\beta} d\zeta \equiv$$

$$\equiv \tilde{c}_k(x)\left[a(t;t_0)\right]^{-\chi\left(|k|_*\right)+n+\beta}, \ t \in (t_0;T], \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Обравши за k_0 мультиіндекс, при якому $\chi\left(|k_0|_*\right) - n - \beta > 0$ і врахувавши довільність $t_0 < T$, а також те, що $a(t;t_0) \underset{t_0 \to -\infty}{\to} \infty$, з останньої оцінки знаходимо, що

$$\partial_x^{k_0} u(t;x) = 0, \ t \le T, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Таким чином, компоненти розв’язку u системи (1) є многочленами стосовно x степеня, не вищого ніж $|k_0|_* - 1$. Проте, згідно з умовою (4), цей степінь не може бути вищим за β.

Теорему доведено.

Теорема 3 (стабілізація). Нехай розглядається система (1) при $T \to +\infty$, для якої виконується умова б) у смузі $(t_0;+\infty)\times\mathbb{R}^n$; $f(\cdot) = col\left(f_1(\cdot),\ldots,f_m(\cdot)\right)$ — неперервна вектор-функція така, що

$$\left|f(x)\right| \le c\left(1+\|x\|\right)^{\beta}, \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

при деякому $\beta \ge 0$, а узагальнена початкова вектор-функція $f \in \mathbf{S}'_{1-\alpha_*}$ є функціоналом типу похідної r-го порядку від $f(\cdot)$, тобто таким функціоналом, дія кожної компоненти f_j якого на елементах $\varphi \in S_{1-\alpha_*}$ визначається рівністю

$$\left\langle f_j, \varphi \right\rangle = c_j \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\partial_x^r \varphi(x)dx, \; j \in \mathbb{N}_m,$$

із деякими сталими c_j. Тоді якщо ФМРЗК Z для системи (1) задовольняє умову Λ_ψ^+ із $\chi\left(|r|_*\right) > n+\beta$, то розв'язок u відповідної задачі Коші (1), (3) стабілізується до нуля рівномірно на кожному компакті K із $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Згідно з твердженням теореми 1 та умовами на початкову вектор-функцію f, дістаємо зображення розв'язку задачі Коші (1), (3) у вигляді

$$u(t;x) = \int\limits_{R^n} \partial_\xi^r Z(t,x;t_0,\xi) f(\xi)d\xi, \; (t;x) \in (t_0;+\infty)\times\mathbb{R}^n,$$

з якого, врахувавши оцінку (5) і те, що ФМРЗК Z системи (1) задовольняє умову Λ_ψ^+, знаходимо, що

$$\left|u(t;x)\right| \le c_1 a(t)^{-\chi\left(|r|_*\right)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\|x-\xi\| / a(t)\right)\left(1+\|\xi\|\right)^{\beta} d\xi, \; (t;x) \in (t_0;+\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

Оскільки

$$\sup_{x \in K \subset \mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|+a(t)\|\zeta\|\right)^{\beta} \le ca(t)^{\beta}\left(1+\|\zeta\|\right)^{\beta}, \; t >> 1, \; \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

то, здійснивши в останньому інтегралі заміну змінних інтегрування згідно з правилом

$$\xi_j = x_j - \zeta_j a(t), \; j \in \mathbb{N}_m,$$

і зваживши на властивості функції $\psi(\cdot)$, прийдемо до наступних оцінок розв'язку *u:*

$$\left|u(t;x)\right| \le c_1 a(t)^{-\chi\left(|r|_*\right)+n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\|\zeta\|\right)\left(1+\|x-\zeta a(t)\|\right)^{\beta} d\zeta \le c_2 a(t)^{-\chi\left(|r|_*\right)+n+\beta} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\|\zeta\|\right)\left(1+\|\zeta\|\right)^{\beta} d\zeta = c_3 a(t)^{-\left(\chi\left(|r|_*\right)-n-\beta\right)}, \quad t >> 1, \; x \in K \subset \mathbb{R}^n,$$

(тут додатна стала c_3 не залежить від t і x), з яких твердження вихідної теореми стає очевидним.

Теорему доведено.

Зауваження. Безпосередньо з доведення теореми 3 переконуємося, що при $\beta = 0$ її твердження підсилюється, а саме: за наведених умов у теоремі 3, розв'язок u відповідної задачі Коші (1), (3) стабілізується до нуля рівномірно на $\mathbb{R}^n$.

Висновок. Установлено достатні умови на ФМРЗК для системи (1) та початкову вектор-функцію, за яких розв'язок цієї задачі стабілізується до нуля рівномірно на кожному компакті, а також може бути векторним поліномом стосовно просторової змінної.

Список використаних джерел:

1. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 443 с.
2. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
3. Денисов В. Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени / В. Н. Денисов // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 4. — С. 145–212.
4. Эйдельман С. Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических систем / С. Д. Эйдельман, Ф. О. Порпер // Изв. вузов. Математика. — 1960. — № 4. — С. 210–217.
5. Эйдельман С. Д. Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Г. Е. Шилова систем / С. Д. Эйдельман, С. Д. Ивасишен, Ф. О. Порпер // Изв. вузов. Математика. — 1961. — № 6. — С. 169–179.
6. Городецкий В. В. Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций / В. В. Городецкий // Укр. мат. журн. — 1988. — Т.40, № 1. — С. 43–48.
7. Житомирский Я. И. Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами / Я. И. Житомирский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1959. — №23. — С. 925–932.
8. Літовченко В. А. Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами / В. А. Літовченко, І. М. Довжицька // Укр. мат. вісник. — 2010. — Т. 7, № 4. — С. 516–552.
9. Litovchenko V. A. Cauchy problem for a class of parabolic systems of Shilov type with variable coefficients / V. A. Litovchenko, I. M. Dovzhytska // Centr. Eur. J. Math. — 2012. — Vol. 10, №3. — P. 1084–1102.
10. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.

We consider assertions about stabilization of solutions of Cauchy problem and formulate the theorem of Liouville type for one class of parabolic systems of equations of Shilov type with nonnegative genus and smooth bounded coefficients dependent of time and spatial variables.

Key words: *Shilov parabolic systems with variable coefficients, Cauchy problem, generalized initial data, stabilization of solutions of Cauchy problem.*

Отримано: 22.03.2013