Висновки. Одержано узагальнення дискретної моделі Кокса-Росса-Рубінштейна функціонування акцій та відповідний їй неперервний аналаг.

Список використаних джерел:

1. Ясинський В. К. Детерміновані та стохастичні моделі фінансової математики / В. К. Ясинський, Л. І. Ясинська. — Чернівці : Прут, 2003. — 512 с.
2. Koroliuk V.S. Stochastic systems in merging phase space / V. S. Koroliuk, N. Limnios. — Singapore : World Scientific Publishers, 2005. — 331 c.
3. Мішура Ю.С. Математика фінансів / Ю. С. Мішура, Г. М. Шевченко. — К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. — 352 с.
4. Малик І. В. Напівмарковські випадкові еволюції з марковськими перемиканнями / І. В. Малик // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — 2012. — Т.2, № 2-3. — С.123–129.

The paper presents one generalization of a discrete model of Cox-Ross-Rubinstein functioning shares in a discrete case and the continuous analog.

Key words: *semi-Markov process, Cox-Ross-Rubinstein model, continuous analog, weak convergence.*

Отримано: 10.04.2013

УДК 517.956

О. В. Мартинюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЗЛІЧЕННО-НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ. IV

У статті визначаються нові класи функцій-символів та нові класи псевдодиференціальних операторів, які будуються за такими символами за допомогою прямого та оберненого перетворення Бесселя. Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами з початковими функціями з просторів типу розподілів Соболєва-Шварца.

Ключові слова: *перетворення Бесселя; простори основних функцій; простори узагальнених функцій, задача Коші, псевдо-Бесселеві оператори, оператор узагальненого зсуву аргументу.*

Ця робота є продовженням одноіменних статей [1—3]. Тут досліджується структура та вивчаються властивості фундаментального розв'язку задачі Коші. Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями скінченного порядку типу ультрарозподілів, досліджується властивість локалізації (локального посилення збіжності) таких розв’язків.

Властивості фундаментального розв’язку задачі Коші

Нехай M, ρ: $\mathbb{R}\to[0,\infty)$ — функції, розглянуті в [1], $\gamma\in(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\ldots\}$ — фіксоване число, a: $\mathbb{R}\to[0,\infty)$ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку γ, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, похідні якої задовольняють умову:

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \exists b_k>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ M^k(x)\cdot|D_x^k a(x)|\le b_k\rho(x),$$

причому

$$\exists c_0>0\ \exists\tilde{c}_0>0\ \forall x\in\mathbb{R}:\ c_0\rho(x)\le a(x)\le\tilde{c}_0(1+\rho(x)).$$

Безпосередньо переконуємося в тому, що функція a є мультиплікатором у просторі $\theta_{M,\rho}$. У зв’язку з цим розглянемо оператор A: $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}\to\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, який визначимо співвідношенням

$$A\varphi=F_B^{-1}[aF_B[\varphi]],\ \forall\varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

Із властивостей перетворення Бесселя (прямого і оберненого) випливає, що A — лінійний і неперервний оператор, який, слідуючи [4], надалі називатимемо псевдо-Бесселевим.

Розглянемо еволюційне рівняння з оператором A вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Au=0,\ (t,x)\in(0,T]\times(0,\infty)\equiv\Omega_+. \tag{1}$$

Під розв’язком рівняння (1) розумітимемо функцію $u\in C^1((0,T],\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})$, яка задовольняє це рівняння.

При дослідженні рівняння (1) важливу роль відіграють функції $Q(t,\sigma)=\exp\{-ta(\sigma)\}$ та $G(t,x)=F_B^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$. У подальшому нам потрібні будуть оцінки похідних функції $Q(t,\sigma)$. Має місце наступне твердження.

Лема 1. Для похідних функції $Q(t,\sigma)$, $\sigma\ne0$, правильними є оцінки:

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)|\le c_a t^{\alpha}M^{-s}(\sigma)e^{-c_0t\rho(\sigma)}\sum_{m=1}^{s}\rho^m(\sigma),\ \sigma\ne0,\ s\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

$t\in(0,T]$ — фіксований параметр, $c_s>0$, $c_0>0$ — стала, не залежна від t,

$$\alpha=\begin{cases}1, & \text{якщо } 0<t\le1,\\ s, & \text{якщо } t>1.\end{cases}$$

Зауважимо, що при кожному $t \in (0,T]$ функція $Q(t,\sigma)$, як функція σ, є елементом простору $\theta_{M,\rho}$.

Дослідимо властивості функції G. Оскільки

$$G(t,x) = F_B^{-1}[Q(t,\sigma)] = c_\nu \cdot F_B[Q(t,\sigma)],$$

то при кожному $t \in (0,T]$ функція $G(t,\cdot)$, як функція x, є елементом простору $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu} = F_B[\theta_{M,\rho}]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (по x) залежність від параметра t.

Лема 2. Для функції G та її похідних правильними є оцінки

$$|D_x^m G(t,x)| \le \alpha_m t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma} (t^{1/\gamma} + |x|)^{-(\omega_0+m)}, \; m \in \mathbb{Z}_+, \tag{3}$$

$\omega_0 = \tilde{p}_0 + [\beta^{-1}[\gamma]]$, $\tilde{p}_0 = 2\nu + 2$, стала $\alpha_m > 0$ не залежить від t.

Доведення. Передусім розглянемо випадок $m = 0$. Урахувавши вигляд нормованої функції Бесселя $j_\nu \equiv j_{n+1/2}$, $n \in \mathbb{N}$ [5], подамо $G(t,x)$, $x \ne 0$, у наступному вигляді: $G(t,x) = \Lambda_1(t,x) + \Lambda_2(t,x)$, де

$$\Lambda_1(t,x) = c_n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^{n+k+1}} \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} \sigma^{n-k+1} \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma \equiv$$

$$\equiv c_n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^{n+k+1}} J_{1,k}(t,x),$$

$$J_{1,k}(t,x) = \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} \sigma^{n-k+1} \sin\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) d\sigma,$$

$$\Lambda_2(t,x) = c_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^{n+k+1}} \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} \sigma^{n-k+1} \cos\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) d\sigma \equiv$$

$$\equiv c_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^{n+k+1}} J_{2,k}(t,x),$$

$$J_{2,k}(t,x) = \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} \sigma^{n-k+1} \cos\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) d\sigma.$$

Оцінимо $J_{1,k}(t,x)$. Здійснивши заміну змінної інтегрування $\sigma = t^{-1/\gamma}\xi$ та врахувавши властивість однорідності функції a, знайдемо, що

$$J_{1,k}(t,x) = t^{-(n-k+2)/\gamma} J_{1,k}^0(z),$$

$$J_{1,k}^0(z) = \int_0^\infty e^{-a(\xi)} \xi^{n-k+1} \sin\left(z\xi - \frac{n\pi}{2}\right) d\xi, z = t^{-1/\gamma} x.$$

Далі здійснюємо оцінку $J_{1,k}^{0}(z)$ за схемою дослідження інтеграла $J_k^1(\xi)$ [2]. У результаті прийдемо до нерівності

$$|J_{1,k}^{0}(z)| \leq \tilde{\omega}_k \cdot |z|^{-(n-k+2+[\beta^{-1}[\gamma]])},\ z \neq 0.$$

Тоді

$$|\Lambda_1(t,x)| \leq c_n \sum_{k=0}^{n} b_k\, |x|^{-(n+k+1)}\ t^{-(n-k+2)/\gamma}\, |J_{1,k}^{0}(z)| \leq$$

$$\leq c_n \sum_{k=0}^{n} b_k \tilde{\omega}_k\, |x|^{-(n+k+1)} \cdot |x|^{-(n-k+2+[\beta^{-1}[\gamma]])}\ t^{-(n-k+2)/\gamma} \times$$

$$\times t^{(n-k+2+[\beta^{-1}[\gamma]])/\gamma} = \tilde{\beta} t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma} \cdot |x|^{-(2n+3+[\beta^{-1}[\gamma]])} \equiv$$

$$\equiv \tilde{\beta} t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma} \cdot |x|^{-\omega_0},\ \ x \neq 0, \tilde{\beta} > 0.$$

Аналогічно оцінюємо $\Lambda_2(t,x)$. Таким чином, для $x \neq 0$ правильною є нерівність $|G(t,x)| \leq \beta t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma} \cdot |x|^{-\omega_0}$, де стала $\beta > 0$ не залежить від t.

З іншого боку, здійснивши заміну змінної інтегрування $\sigma = t^{-1/\gamma}\xi$, внаслідок однорідності функції a прийдемо до співвідношення $G(t,x) = t^{-(2\nu+2)/\gamma} G_0(z) \equiv t^{-(2n+3)/\gamma} G_0(z)$, де

$$G_0(z) = c_\nu \int_0^\infty e^{-a(\xi)} j_\nu(z\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi, \quad z = t^{-1/\gamma} x.$$

Із наведених вище результатів випливає, що для G_0 справджується оцінка

$$|G_0(z)| \leq \frac{const}{|z|^{2n+3+[\beta^{-1}[\gamma]]}} \equiv \frac{const}{|z|^{\omega_0}}, \quad z \neq 0.$$

Оскільки $G_0(z) \to const$ при $z \to 0$, то для всіх $z \in \mathbb{R}$ дістаємо нерівність $|G_0(z)| \leq c(1+|z|)^{-\omega_0}$, з якої випливає, що

$$|G(t,x)| \leq c t^{-(2n+3)/\gamma} (1+|z|)^{-(2n+3+[\beta^{-1}[\gamma]])} =$$

$$= c t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma} (t^{1/\gamma} + |x|)^{-\omega_0},\ x \in \mathbb{R}.$$

Якщо $m \in \mathbb{N}$, то

$$D_x^m G(t,x) = \Lambda_{1,m}(t,x) + \Lambda_{2,m}(t,x),$$

де

$$\Lambda_{1,m}(t,x) = c_n \sum_{k=0}^{n} b_k \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} \sigma^{n-k+1} D_x^m \left(x^{-(n+k+1)} \sin\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2} \right) \right) d\sigma,$$

$$\Lambda_{2,m}(t,x) = c_n \sum_{k=1}^{n-1} d_k \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} \sigma^{n-k+1} D_x^m \left(x^{-(n+k+1)} \cos\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2} \right) \right) d\sigma.$$

Здійснюючи оцінку $|\Lambda_{1,m}|$ та $|\Lambda_{2,m}|$ (див. схему оцінювання $|D_\xi^m \Psi_1(\xi)|$, $|D_\xi^m \Psi_2(\xi)|$ у [2]), прийдемо до нерівностей (3).

Твердження доведено.

Функція $G(t,\cdot)$ диференційовна по t на проміжку $(0,T]$. Справді, оскільки

$$G(t,x) = c_\nu \int_0^\infty e^{-ta(\sigma)} j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \tag{4}$$

то, формально диференціюючи (4) по t під знаком інтеграла, дістанемо функцію $-a(\sigma) exp\{-ta(\sigma)\} j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1}$, модуль якої для $t \ge t_0 > 0$ оцінюється величиною

$$2A_\nu \exp\{-(t_0-\varepsilon)a(\sigma)\} a(\sigma) \exp\{-\varepsilon a(\sigma)\} \sigma^{2\nu+1},\ 0 < \varepsilon < t_0.$$

Оскільки

$$\exists d > 0\ \forall \sigma \in \mathbb{R}_+ :\ a(\sigma)\exp\{-\varepsilon a(\sigma)\}\sigma^{2\nu+1} \le c,$$

то мажорантою є інтегровна функція $\exp\{-\varepsilon a(\sigma)\}$. Отже, інтеграл від похідної (по t) від підінтегральної функції в (4) збігається рівномірно на довільному проміжку $[t_0,T] \subset (0,T]$ і тому похідну по t під знаком інтеграла в (4) можна застосовувати в кожній точці $t \in (0,T]$. Цим доведено диференційовність по t функції $G(t,\cdot)$ на проміжку $(0,T]$, при цьому

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = -c_\nu \int_0^\infty a(\sigma) e^{-ta(\sigma)} j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Наслідок 1. Правильною є нерівність

$$\left| D_x^m \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) \right) \right| \le \beta_m t^{([\beta^{-1}[\gamma]]-\gamma)/\gamma} (t^{1/\gamma} + |x|)^{-(\omega_0+m)},\ m \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

стала $\beta_m > 0$ не залежить від t.

Доведення нерівності (5) аналогічне доведенню нерівності (3); при цьому враховується вигляд функції $\frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)$ та зміни, які вносить у відповідну оцінку підінтегральний множник $a(\sigma)$.

Оскільки $j_\nu(0) = 1$, $a(0) = 0$,

$$e^{-ta(\sigma)} = F_B[G(t,x)](\sigma) = \int_0^\infty G(t,x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

то звідси дістаємо формулу

$$\int_0^\infty G(t,x) x^{2\nu+1} dx = 1,\ \forall t \in (0,T].$$

Зазначимо, що функція G є розв'язком рівняння (1). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F_B^{-1}[e^{-ta(\sigma)}] = F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} e^{-ta(\sigma)}\right].$$

З іншої сторони,

$$AG(t,x) = F_B^{-1}[a(\sigma) F_B[G(t,\sigma)]] = F_B^{-1}[a(\sigma) e^{-ta(\sigma)}] = -F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} e^{-ta(\sigma)}\right].$$

Звідси випливає, що функція G задовольняє рівняння (1).

Лема 3. Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$, диференційовна по t.

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\alpha_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t, x) - G(t,x)] \underset{\Delta t \to 0}{\to} \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)$$

виконується у розумінні збіжності в просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$, тобто

1) $D_x^{2m} \alpha_{\Delta t}$ рівномірно прямує до $D_x^{2m}\left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)\right)$ при $\Delta t \to 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}_+$, на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,\infty)$; 2) $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ $\exists c_p > 0$: $\|\alpha_{\Delta t}\|_p \le c_p$, де стала c_p не залежить від Δt.

Функція G диференційовна по t у звичайному розумінні, тому $\alpha_{\Delta t}(x) = \frac{\partial}{\partial t} G(t + \theta \Delta t, x),\ 0 < \theta < 1.$

Отже, $D_x^{2m} \alpha_{\Delta t}(x) = -c_\nu \int_0^\infty a(\sigma) e^{-(t+\theta\Delta t)a(\sigma)} D_x^{2m} j_\nu(x\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma.$ Крім того, $D_x^{2m}(\frac{\partial}{\partial t} G(t,x)) = -c_\nu \int_0^\infty a(\sigma) e^{-ta(\sigma)} D_x^{2m} j_\nu(x\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma.$

Тоді, урахувавши нерівності

$$|D_x^{2m} j_\nu(x\sigma)| \le 2A_\nu \sigma^{2m},\ x \in \mathbb{R}, \sigma \ge 0,$$

умови, які задовольняє функція-символ a, а також функції ρ та M знайдемо, що

$$\left|D_x^{2m}(\alpha_{\Delta t}(x)-\frac{\partial}{\partial t}G(t,x))\right| \le \tilde{c}_\nu \int_0^\infty a(\sigma)e^{-ta(\sigma)}\,|\,e^{-\theta\Delta t a(\sigma)}-1\,|\times$$

$$\times\sigma^{2m+2\nu+1}d\sigma \le c_0\int_0^\infty a(\sigma)e^{-ta(\sigma)}a'(\tilde{\sigma})\sigma^{2m+2\nu+2}d\sigma\cdot|\,\Delta t\,|\le$$

$$\le \frac{c_0' t}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}a(\sigma)}\rho(\tilde{\sigma})M^{-1}(\tilde{\sigma})\sigma^{2m+2\nu+2}d\sigma\cdot|\,\Delta t\,|\le c_1\,|\,\Delta t\,|,$$

$$0<\tilde{\sigma}<\sigma,\ m\in\mathbb{Z}_+,$$

де сталі c_1, c_0', $c_1>0$ не залежить від Δt; тут ми скористалися тим, що в околі нуля $\rho(\tilde{\sigma})M^{-1}(\tilde{\sigma})\sim\tilde{\sigma}^{\gamma-\beta}$, де $\gamma-\beta>0$; на нескінченності функція $M^{-1}(\sigma)$ обмежена, $\exp\left\{-\frac{t}{2}a(\sigma)\right\}\le\exp\left\{-\frac{c_0 t}{2}\rho(\sigma)\right\}$, $\rho(\tilde{\sigma})\le\rho(\sigma)$. Звідси вже випливає, що

$$D_x^{2m}\alpha_{\Delta t}(x)\to D_x^{2m}(\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)),\quad \Delta t\to 0,$$

рівномірно по $x\in[a,b]\subset[0,\infty)$, що й потрібно було довести.

Доведемо тепер, що умова 2) також виконується. Використовуючи оцінки функції G по часовому параметру та по змінній x знайдемо, що для досить малих значень параметра Δt таких, що $t/2\le t+\theta\Delta t\le 2T$ справджуються нерівності

$$|\,D_x^{2m}\alpha_{\Delta t}(x)\,|\le\beta_m(t+\theta\Delta t)^{([\beta^{-1}[\gamma]]-\gamma)/\gamma}((t+\theta\Delta t)^{1/\gamma}+|\,x\,|)^{-(\omega_0+m)}\le$$

$$\le\begin{cases}\tilde{\beta}_m(t)\,|\,x\,|^{-(\omega_0+m)}, & |\,x\,|\ge 1,\\ \tilde{\beta}_m(t)(t/2)^{-(\omega_0+m)/\gamma}, & |\,x\,|<1.\end{cases}$$

Тоді для довільного фіксованого $p\in\mathbb{Z}_+$ маємо, що

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\left\{\sum_{m=0}^{p}(\Lambda(x))^{\tilde{\omega}_0+2m}\,|\,D_x^{2m}\alpha_{\Delta t}(x)\,|\right\}\le c_p,$$

де стала c_p не залежить від Δt.

Твердження доведено.

Лема 4. $G(t,\cdot)\to\delta$ при $t\to+0$ у просторі $(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$ (тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. Урахувавши, що $\int_0^\infty G(t,x)x^{2\nu+1}dx = 1$, $t \in (0,T]$, для довільної функції $\varphi \in \Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ маємо:

$$|\langle G(t,\cdot),\varphi\rangle - \langle \delta,\varphi\rangle| = \left|\int_0^\infty G(t,x)x^{2\nu+1}\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| =$$

$$= \left|\int_0^\infty G(t,x)x^{2\nu+1}\varphi(x)dx - \int_0^\infty G(t,x)x^{2\nu+1}\varphi(0)dx\right| \le$$

$$\le \int_0^\infty |G(t,x)|\, x^{2\nu+1}\, |\varphi(x)-\varphi(0)|\, dx \equiv J(t).$$

Для доведення твердження досить показати, що

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists t_0 = t_0(\varepsilon) > 0\, \forall t : 0 < t < t_0 \Rightarrow J(t) < \varepsilon.$$

Оскільки $\varphi \in \Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, то застосувавши формулу про скінченні прирости знайдемо, що $|\varphi(x)-\varphi(0)| \le |\varphi'(\xi)|\cdot|x| \le L\cdot|x|$, де $L = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|$. Візьмемо тепер ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta_0 = t_0^{1/(2\gamma)}$. Тоді $|\varphi(x)-\varphi(0)| \le L\cdot\varepsilon^{1/(2\gamma)}$, якщо тільки $|x| < t_0^{1/(2\gamma)}$. Отже,

$$J(t) < L\cdot\varepsilon^{1/(2\gamma)}\cdot \int_0^{t_0^{1/(2\gamma)}} |G(t,x)|\, x^{2\nu+1}dx +$$

$$+ \int_{t_0^{1/(2\gamma)}}^{+\infty} |G(t,x)|\cdot|\varphi(x)-\varphi(0)|\, x^{2\nu+1}dx \equiv L\varepsilon^{1/(2\gamma)}J_1(t) + J_2(t).$$

Оцінимо $J_1(t)$. Легко бачити, що $J_1(t) \le \int_0^\infty |G(t,x)|\, x^{2\nu+1}dx.$

Поклавши $x = t^{1/\gamma}y$ знайдемо, що

$$\int_0^\infty |G(t,x)|\, x^{2\nu+1}dx = t^{(2\nu+2)/\gamma}\int_0^\infty |G(t,t^{1/\gamma}y)|\, y^{2\nu+1}dy.$$

Але, внаслідок однорідності функції a маємо, що

$$G(t,t^{1/\gamma}y) = c_\nu \int_0^\infty e^{-ta(\xi)} j_\nu(t^{1/\gamma}y\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \overset{t^{1/\gamma}\xi=\eta}{=}$$

$$= c_\nu t^{-(2\nu+2)/\gamma}\cdot\int_0^\infty e^{-a(\eta)} j_\nu(\eta y)y^{2\nu+1}dy = t^{-(2\nu+2)/\gamma}G_0(y),$$

де $G_0(y)=F_B^{-1}[e^{-a(\eta)}]y$, $G_0\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Отже,

$$J_1(t)\le\int_0^{\infty}|G_0(y)|\,y^{2\nu+1}dy=\beta<+\infty,\ \forall t\in(0,T].$$

Далі, врахувавши обмеженість функції φ на $\mathbb{R}$, а також оцінку (3) при $m=0$ для кожного $t:\ 0<t<t_0=\varepsilon$ прийдемо до нерівностей:

$$J_2(t)\le 2\alpha_0 c t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}\int_{t_0^{1/(2\gamma)}}^{\infty}\frac{dx}{|x|^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]}}=\frac{2\alpha_0 c}{[\beta^{-1}[\gamma]]}t_0^{-[\beta^{-1}[\gamma]]/(2\gamma)}\times$$

$$\times t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}<\frac{2\alpha_0 c}{[\beta^{-1}[\gamma]]}t_0^{[\beta^{-1}[\gamma]]/(2\gamma)},\ c=\max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon\in(0,T]\,\exists t_0=\varepsilon\ \forall t:0<t<\varepsilon\Rightarrow J(t)<L\beta\varepsilon^{1/(2\gamma)}+\beta_1\varepsilon^{[\beta^{-1}[\gamma]]/(2\gamma)}.$$

Аналогічна оцінка встановлюється для довільного $\varepsilon\ge T$; при цьому за $t_0=t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільне фіксоване число з проміжку $(0,T)$. Цим доведено, що $\langle G(t,\cdot),\varphi\rangle\to\langle\delta,\varphi\rangle$, $t\to+0$, для довільної функції $\varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Лема доведена.

Символом $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'$ позначимо сукупність узагальнених функцій з простору $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$, які є згортувачами в просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Наслідок 2. Нехай $f\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'$. Тоді

1) граничне співвідношення $(f*G)(t,\cdot)\to f$, $t\to+0$, виконується в просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$;
2) правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,\cdot))=f*\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot),\ t\in(0,T].$$

Функцію G надалі називатимемо фундаментальним розв'язком (ФР) рівняння (1).

Коректна розв'язність задачі Коші. Властивість локалізації

Передусім знайдемо оператор A^*, спряжений до оператора A, який діє в просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ за формулою

$$\langle A^*g,\psi\rangle=\langle g,A\psi\rangle,\ g\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})',\psi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

З'ясуємо, який вигляд має звуження оператора A^* на простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} \subset (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$, тобто в (5) вважаємо, що $\{g,\psi\} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_0^{\infty} g(x)(A\psi)(x)x^{2\nu+1}dx$ є абсолютно збіжним для довільної основної функції $g \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, то внаслідок теореми Фубіні правильними є перетворення:

$$\langle g, A\psi\rangle = \int\limits_0^{\infty} g(x)(A\psi)(x)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= c_\nu \int\limits_0^{\infty} g(x)(\int\limits_0^{\infty} a(\xi)F_B[\psi](\xi)j_\nu(x\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= c_\nu \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} a(\xi)g(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}F_B[\psi](\xi)\xi^{2\nu+1}dxd\xi =$$

$$= c_\nu \int\limits_0^{\infty} a(\xi)F_B[g](\xi)F_B[\psi](\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= c_\nu \int\limits_0^{\infty} a(\xi)F_B[g](\xi)(\int\limits_0^{\infty} \psi(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \psi(x)(c_\nu \int\limits_0^{\infty} a(\xi)F_B[g](\xi)j_\nu(x\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \psi(x)F_B^{-1}[a(\xi)F_B[g](\xi)](x)x^{2\nu+1}dx \equiv$$

$$\equiv \int\limits_0^{\infty} (A^*g)(x)\psi(x)x^{2\nu+1}dx = \langle A^*g,\psi\rangle,\ \{g,\psi\} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

Отже,

$$\forall g \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} : A^*g = F_B^{-1}[aF[g]],$$

тобто звуження оператора A^* на $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ збігається з оператором A.

Для рівняння (1) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \tag{6}$$

де $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'$. Під розв’язком задачі Коші (1), (6) розумітимемо розв’язок рівняння (1), який задовольняє початкову умову (6) в тому сенсі, що $u(t,\cdot)\to f$ при $t\to+0$ у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. Задача Коші (1), (6) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'$. Розв'язок подається у вигляді згортки:

$$u(t,x)=(f*G)(t,x),\ f\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})',(t,x)\in\Omega_+,$$

де G — ФР рівняння (1).

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1). Справді (див. наслідок 1)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(f*G(t,x))=f*\frac{\partial}{\partial t}G(t,x),$$

$$Au(t,x)=F_B^{-1}[a(\xi)F_B[f*G]].$$

Оскільки f — згортувач у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, то

$$F_B[f*G]=F_B[f]\cdot F_B[G]=F_B[f]\cdot e^{-ta(\xi)}.$$

Отже,

$$Au(t,x)=F_B^{-1}[a(\xi)e^{-ta(\xi)}F_B[f](\xi)](x)=$$

$$=-F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}e^{-ta(\xi)}F_B[f]\right](x)=-F_B^{-1}\left[F_B\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right]\cdot F_B[f]\right](x)=$$

$$=-F_B^{-1}\left[F_B\left[f*\frac{\partial}{\partial t}G\right]\right](x)=-\left(f*\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right).$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_+$, задовольняє рівняння (1). З наслідку 2 випливає, що $u(t,\cdot)\to f$ при $t\to+0$ в просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$, тобто u — розв'язок задачі Коші (1), (6). Зазначимо також, що u неперервно залежить від початкової функції f, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (1), (6) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t}-A^{*}v=0,\quad (t,x)\in[0,t_0)\times(0,\infty)\equiv\Omega_+,0\le t<t_0\le T,\qquad(7)$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0}=g,\ g\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})',\qquad(8)$$

де $A=A^{*}$ — звуження спряженого оператора до оператора A на простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}\subset(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Умова (8) розуміється в слабкому сенсі. Розглянемо функцію $\tilde{G}(t-t_0,x)=F_B^{-1}[e^{(t-t_0)a(\xi)}](x)$.

Аналогічно тому, як це було зроблено у випадку задачі Коші (1), (6) доводимо, що $\tilde{G}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, диференційовна по t; розв'язок задачі Коші (7), (8) дається формулою

$$v(t,x) = (g * \tilde{G})(t - t_0, x),\ (t,x) \in \Omega'_{+},$$

при цьому $v(t,\cdot) \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ для кожного $t \in [0, t_0)$.

Нехай $Q^{t}_{t_0} : (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})' \to \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ — оператор, який зіставляє функціоналу $g \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'$ розв'язок $v(t,\cdot) \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ задачі (7), (8):

$$\forall g \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})' : Q^{t}_{t_0} g = (g * \tilde{G})(t - t_0, x) \equiv v(t,x),\ (t,x) \in \Omega'_{+}.$$

Оператор $Q^{t}_{t_0}$ є лінійним і неперервним, оскільки такими властивостями володіє операція згортки. Він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і володіє властивостями:

$$\forall g \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})' : \frac{dQ^{t}_{t_0} g}{dt} - A^{*} Q^{t}_{t_0} g = 0,\ \lim_{t \to t_0} Q^{t}_{t_0} g = g$$

(границя розглядається в просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$).

Розглянемо тепер розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_{+}$, задачі Коші (1), (6), який розумітимемо як функціонал з простору $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})' \supset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Доведемо, що задача Коші (1), (6) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$.

Зафіксуємо довільним чином $t \in (0,T]$ і застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^{t}_{t_0} g \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} \subset (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'$, де g — довільний елемент з простору $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'$, $0 < t < t_0 \le T$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (1) та (7) знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle u(t,\cdot), Q^{t}_{t_0} g \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^{t}_{t_0} g \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q^{t}_{t_0} g}{\partial t} \right\rangle = -\left\langle Au, Q^{t}_{t_0} g \right\rangle +$$

$$+\left\langle u, A^{*} Q^{t}_{t_0} g \right\rangle = -\left\langle Au, Q^{t}_{t_0} g \right\rangle + \left\langle Au, Q^{t}_{t_0} g \right\rangle = 0,\ g \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,*})'.$$

Звідси випливає, що $\left\langle u(t,\cdot), Q^{t}_{t_0} g \right\rangle$ є сталою величиною. Використовуючи початкову умову $u|_{t=0} = 0$ та відповідне твердження про абстрактні функції знаходимо, що ця величина дорівнює нулеві. Внаслідок відповідної леми про абстрактні функції дістаємо, що

$$\left\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t g \right\rangle \underset{t \to t_0}{\to} \langle u(t_0,\cdot), g \rangle = 0,\ 0 < t_0 \le T.$$

Оскільки g — довільний елемент з простору $(\Phi_{\beta,\gamma,*}^{\nu})'$, то $u(t_0,\cdot)$ — нульовий функціонал. Зауваживши, що t_0 вибране довільним чином з проміжку $(0,T]$ твердимо, що $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T]$.

Теорема доведена.

Розв'язок задачі Коші (1), (6) при $t \to +0$ прямує до узагальненої функції f в слабкому розумінні збіжності. Однак f може збігатися на деякій відкритій множині з гладкою функцією. Чи буде тоді відбуватися локальне посилення збіжності вказаного розв'язку. Тут дається позитивна відповідь на це питання: виділяється такий клас $X' \subset (\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$ початкових функцій, що розв'язок задачі Коші для рівняння (1), побудований за функцією $f \in X'$, володіє властивістю локального посилення збіжності.

Символом $(\Phi_{\beta,\gamma,0,*}^{\nu})' := X'$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору $(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$, які є згортувачами в просторі $\Phi_{\beta,\gamma,0}^{\nu}$.

Теорема 2. Нехай $f \in X'$, $u(t,x)$ — розв'язок задачі Коші для рівняння (1) з початковою функцією f. Якщо $f = 0$ на інтервалі $(-a,a) \subset \mathbb{R}$, то $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на довільному відрізку $[-c,c] \subset (-a,a)$.

Доведення. Нехай $[-c,c] \subset [-b,b] \subset (-a,a)$. Побудуємо функцію $\psi \in \Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ таку, що $\boldsymbol{supp}\psi \subset (-a,a)$, $0 \le \psi(\xi) \le 1$, $\xi \in (-a,a)$, $\psi(\xi) = 1$, $\forall \xi \in [-b,b]$ (така функція існує, бо $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}(\mathbb{R}) \subset \Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$). Оскільки при кожному $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}$ функції $\psi(\xi) T_{\xi}^{x} G(t,\xi)$, $(1-\psi(\xi)) T_{\xi}^{x} G(t,\xi)$ як функції ξ є елементами простору $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, то правильною є рівність

$$u(t,x) = \langle f_{\xi}, \psi(\xi) T_{\xi}^{x} G(t,\xi) \rangle + \langle f_{\xi}, \eta(\xi) T_{\xi}^{x} G(t,\xi) \rangle,$$

де $\eta = 1 - \psi$. Оскільки узагальнена функція f дорівнює нулеві на інтервалі $(-a,a)$, а $\boldsymbol{supp}(\psi(\xi) T_{\xi}^{x} G(t,\xi)) \subset (-a,a)$, то з останнього співвідношення дістаємо, що

$$u(t,x) = t^{\alpha} \langle f_{\xi}, t^{-\alpha} \eta(\xi) T_{\xi}^{x} G(t,\xi) \rangle,$$

де $\alpha > 0$ — параметр, конкретне значення якого вкажемо пізніше. Кожна узагальнена функція $f \in X' \subset (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,0})'$ має нульовий порядок, тобто $|u(t,x)| \le t^{\alpha} \|f\|_0 \cdot \|\Psi_{t,x}\|_0$, де $\Psi_{t,x}(\xi) = t^{-\alpha}\eta(\xi)T^x_{\xi}G(t,\xi)$, $\|f\|_0$ — норма функціоналу f. Отже, для доведення того, що $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на відрізку $[-c,c] \subset (-a,a)$ досить встановити, що сукупність функцій $\Psi_{t,x}$ обмежена за нормою простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,0}$, тобто $\|\Psi\|_{t,x0} \le c_0$, причому стала $c_0 > 0$ не залежить від параметрів t і x, які змінюються наступним чином: $t \in (0,T]$, $x \in [-c,c]$. Оскільки $\Psi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [-b,b]$, то оцінку $\|\Psi_{t,x}\|_0 \le c_0$ досить довести для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-b,b]$.

Функція $\psi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, зокрема, $\psi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,0}$. Отже,

$$|\psi(\xi)| \le \tilde{c}_0 / (\Lambda(\xi))^{\tilde{\omega}_0}, \; |\eta(\xi)| \le \tilde{c}'_0, \; \xi \in \mathbb{R}.$$

Крім того,

$$T^x_{\xi}G(t,\xi) = c_{\nu}T^x_{\xi}\left(\int_0^{\infty} e^{-ta(\sigma)} j_{\nu}(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma\right) =$$

$$= c_{\nu}b_{\nu}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-ta(\sigma)} j_{\nu}\left(\sigma\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\right)\sigma^{2\nu+1}d\sigma\right)\sin^{2\nu}\omega d\omega.$$

Введемо позначення: $r_{x,\xi}(\omega) = \sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}$; тоді

$$T^x_{\xi}G(t,\xi) = c_{\nu}b_{\nu}\int_0^{\pi} J(\omega)\sin^{2\nu}\omega d\omega,$$

де

$$J(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-ta(\sigma)} j_{\nu}(\sigma \cdot r_{x,\xi}(\omega))\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Оцінку інтеграла $J(\omega)$ здійснюємо за схемою оцінювання функції $G(t,\xi)$. У результаті прийдемо до нерівності

$$|J(\omega)| \le \alpha t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}(t^{1/\gamma} + r_{x,\xi}(\omega))^{-\omega_0}.$$

Оскільки $r_{x,\xi}(\omega) \ge |x-\xi|$, $x \ge 0, \xi \ge 0, \omega \in [0,\pi]$, то $|T^x_{\xi}G(t,\xi)|$ оцінюється наступним чином:

$$|T^x_{\xi}G(t,\xi)| \le \tilde{\beta}\int_0^{\pi} |J(\omega)|\, d\omega \le \beta t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}(t^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{-\omega_0}.$$

Якщо $x \in [-c,c]$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-b,b]$, то $|x-\xi| \geq \alpha_0 > 0$, де $\alpha_0 = b-c$. Зазначимо також, що

$$\exists L > 0 \;\; \forall x \in [-c,c] \;\; \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus [-b,b]: \; \Lambda(\xi)/|x-\xi| \leq L.$$

Урахувавши ці зауваження знайдемо, що

$$\Lambda^{\tilde{\omega}_0}(\xi)\,|\eta(\xi)| \cdot |T_\xi^x G(t,\xi)| \leq \beta \tilde{c}_0' \Lambda^{\omega_0}(\xi) t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}\,|x-\xi|^{-\omega_0} \leq$$

$$\leq \beta \tilde{c}_0' \tilde{L} \cdot t^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}, \; \tilde{L} = L^{\omega_0}, \; \xi \in \mathbb{R} \setminus [-b,b], \; x \in [-c,c].$$

Покладемо тепер $\alpha = [\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma$. Тоді $\left\|\Psi_{t,x}\right\|_0 \leq d$, $d = \beta \tilde{c}_0' L \cdot \left\|f\right\|_0$, стала $d > 0$ не залежить від t і x, а $|u(t,x)| \leq dt^\alpha$, $\forall x \in [-c,c]$. Цим доведено, що $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно відносно $x \in [-c,c]$.

Теорема доведена.

Зауваження. Вказана властивість залишається правильною і у випадку, коли $f = 0$ на довільній відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$, симетричній відносно точки 0 ($(x \in Q) \Leftrightarrow (-x \in Q)$). Якщо $0 \notin Q$, то $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно відносно x на довільній множині $[-b,-a] \cup [a,b] \subset Q$; якщо $0 \in Q$, то $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на довільній множині $[-b,-a] \cup [a,b] \subset Q$, $0 \notin [-b,-a] \cup [a,b]$ (ці властивості зумовлені властивістю парності основних функцій, а також парністю узагальнених функцій з простору $(\Phi_{\beta,\gamma}^\nu)'$).

Символом $M_{\Phi_{\beta,\gamma}^\nu}$ позначимо клас усіх мультиплікаторів у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$.

Теорема 3. Нехай $f \in X'$, $u(t,x)$ — розв'язок задачі Коші (1), (6), побудований за функцією f. Якщо узагальнена функція f збігається на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$ з функцією $g \in M_{\Phi_{\beta,\gamma}^\nu}$, то $u(t,x) \to g(x)$ при $t \to +0$ на довільному відрізку $[a,b] \subset Q$.

Доведення. Оскільки $[a,b] \subset Q$, то знайдеться відрізок $[c,d] \subset Q$, який міститиме в собі відрізок $[a,b]$. Побудуємо функцію $\psi \in \Phi_{\beta,\gamma}^\nu$ з носієм в Q таку, що $\psi(\xi) = 1$ для $\xi \in [c,d]$, $0 \leq \psi(\xi) \leq 1$, $\xi \in Q$. Оскільки $\psi(f-g) = 0$ в Q, то $\psi(f-g) = 0$ на $[a,b]$, $(1-\psi)f = 0$ на $[c,d]$ і за доведеним у теоремі 2

$$\langle \psi(f-g), T_\xi^x G(t,\xi) \rangle \to 0, \; t \to +0,$$

$$\langle (1-\psi)f, T_\xi^x G(t,\xi) \rangle \to 0, \; t \to +0,$$

рівномірно відносно $x \in [a,b]$. Крім того,

$$u(t,x)=\langle f_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle=\langle\psi(f-g),T_\xi^x G(t,\xi)\rangle+$$
$$+\langle(1-\psi)f,T_\xi^x G(t,\xi)\rangle\ +\langle\psi g,T_\xi^x G(t,\xi)\rangle,$$

причому $\langle\psi g,T_\xi^x G(t,\xi)\rangle=\int_0^\infty T_\xi^x G(t,\xi)\psi(\xi)g(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\equiv J(t,x).$ Отже, для доведення теореми досить встановити, що $J(t,x)\to(\psi g)(x)$ при $t\to+0$ на відрізку $[a,b]\subset Q$. Із властивостей функції ψg та оператора узагальненого зсуву аргументу випливає, що

$$\int_0^\infty T_\xi^x G(t,\xi)\psi(\xi)g(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi=\int_0^\infty G(t,\xi)T_\xi^x(\psi(\xi)g(\xi))\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Таким чином,

$$J(t,x)=\langle G(t,\xi),T_\xi^x(\psi(\xi)g(\xi))\rangle.$$

Оскільки $T_\xi^x\psi(\xi)g(\xi)\in\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$ при кожному $x\in[a,b]$, то на підставі леми 4 стверджуємо, що

$$J(t,x)\underset{t\to+0}{\to}\langle\delta_\xi,T_\xi^x(\psi(\xi)g(\xi))\rangle\equiv\langle\delta_\xi,T_x^\xi(\psi(x)g(x))\rangle=$$

$$=T_x^0(\psi(x)g(x))=b_\nu\int_0^\pi\psi(x)g(x)\sin^{2\nu}\omega d\omega=b_\nu\psi(x)g(x)\cdot\int_0^\pi\sin^{2\nu}\omega d\omega,$$

де $b_\nu=\Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Скориставшись формулою

$$\int_0^\pi\sin^{2\nu}\omega d\omega=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)},\ \nu\ge 0,$$

знаходимо, що $J(t,x)\to\psi(x)g(x)$ при $t\to+0$ у кожній точці $x\in[a,b]$.

Теорема доведена.

Висновки. Розглянуто нові класи функцій-символів та класи псевдодиференціальних операторів, побудованих за цими символами. Доведено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевно-Бесселевими операторами у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями скінченного порядку типу ультрарозподілів.

Список використаних джерел:

1. Мартинюк О. В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у злічено-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I / О. В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 179–193.

2. Мартинюк О. В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. II / О. В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 6. — С. 157–171.
3. Мартинюк О. В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. III / О. В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 7. — С. 199–212.
4. Городецький В. В. Еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами / В. В. Городецький, О. М. Ленюк // Доп. НАН України. — 2007. — №8. — С. 11–15.
5. Корн Т. Справочник по математике / Т. Корн, Г. Корн. — М. : Наука, 1977. — 832 с.

The new classes of functions-symbols and new classes of pseudo-differential operators, which are built on such characters by direct and inverse Bessel transformation, are defined in the paper. The correct solvability of the Cauchy problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators with initial functions of the spaces such as Sobolev-Schwartz distributions is set.

Key words: *Bessel transformation; spaces of basic functions, spaces of generalized functions, the Cauchy problem, pseudo-Bessel operators, the operator of generalized shift of the argument.*

Отримано: 14.06.2011

УДК 519.6

А. П. Мотайло*, старший преподаватель,
А. Н. Хомченко,** д-р физ.-мат. наук, профессор

* Херсонский национальный технический университет, г. Херсон,
** Черноморский государственный университет им. П. Могилы, г. Николаев

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА РЕШЕТКАХ ТЕТРАЭДРАЛЬНО-ОКТАЭДРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В статье исследованы сходимость метода конечных элементов на решетке с ячейками в форме октаэдров и аппроксимационные качества кусочно-линейных координатных функций на этом носителе.

Ключевые слова: *октаэдр, тетраэдр, кусочно-линейные координатные функции, порядок аппроксимации, сходимость в среднеквадратичном.*

Введение. Задача интерполирования функций в 3D методом конечных элементов (МКЭ), как правило, решается с привлечением базисных функций гексаэдра и тетраэдра. Трудности алгоритмизации, связанные с большим объёмом вычислений на тетраэдрических