3. Baudet G. M. Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors / G. M. Baudet // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1978. — Vol. 25, №2. — P. 226–244.
4. Baudet G. M. The Design and Analysis of the Algorithms for Asynchronous Multiprocessors / G. M. Baudet // Ph. D. Diss. — Pittsburg : Carnegie-Mellon Univ., PA, 1978. — 182 p.
5. El Tarazi M. N. Some convergence results for asynchronous algorithms / M. N. El Tarazi // Numerische Mathematik. — 1982. — Vol. 39, №3. — P. 325–340.
6. Нестеренко Б. Б. Основы асинхронных методов параллельных вычислений / Б. Б. Нестеренко, В. А. Марчук. — К. : Наукова думка, 1989. — 176 с.
7. Новотарський М. А. Штучні нейронні мережі: обчислення / М. А. Новотарський, Б. Б. Нестеренко. — К. : Інститут математики НАН України, 2004. — 408 с.
8. Исследование основ функционирования и разработка реконструктивних операций на полых органах пищеварительной системы методами математического моделирования / С. П. Жученко, А. П. Жученко, Г. Я. Костюк, Б. Б. Нестеренко. — Винница : Вингосмедуниверситет, 1996. — 385 с.

The basic principles of unsteady mathematical model of the fluid flow under the action of peristaltic fluctuations are presented. The parallel locally asynchronous method is used to implement the model on parallel computer systems. Results of numerical experiments are described.

Key words: *mathematical model, locally asynchronous method, peristaltic process, triplex.*

Отримано: 15.03.2013

УДК 517.532.2

О. М. Нікітіна, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-ФУР'Є-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) побудовано гібридне інтегральне перетворення, породжене на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Ейлера-Фур'є-Ейлера.

Ключові слова: *диференціальний оператор Ейлера, диференціальний оператор Фур'є, гібридне інтегральне перетворення, ядро Діріхле, вагова функція, спектральна функція, спектральна щільність, інтегральне зображення, основна тотожність.*

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до знаходження інтегрального зображення аналітичного розв'язку мішаної задачі для сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного (гіперболічного) типу другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Ефективним методом розв'язання таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткований в роботі [1]. Основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень закладено в монографії [2]. Пропонована стаття присвячена запровадженню одного з типів гібридних інтегральних перетворень.

Основна частина. Побудуємо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty);\ R_0 > 0\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2 B_{\alpha_1}^* + \theta(r-R_1)\times \\ \times\theta(R_2-r)a_2^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_2)a_3^2 B_{\alpha_2}^*,\ \ (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2). \tag{1}$$

У рівності (1): $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3], $B_{\alpha_j}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_j+1)r\frac{d}{dr} + \alpha_j^2$ — диференціальний оператор Ейлера другого порядку [4], $\frac{d^2}{dr^2}$ — диференціальний оператор Фур'є другого порядку [4]; $2\alpha_j + 1 > 0$.

Означення. Областю визначення ГДО $M_{(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \left\{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; g_2''(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\right\}$ неперервна на множині I_2^+; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0,\ \ \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma} g_3(r)] = 0; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k} = 0,\ \ j,k = 1,2 \tag{3}$$

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \ne 0$, $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$; $j,k = 1,2.$

Визначимо числа

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}},\ a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha_2+1},\ a_3^2\sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 + \theta(r-R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}$$

та скалярний добуток

$$\begin{aligned}\big(u(r),v(r)\big) &= \int_{R_0}^{\infty} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr + \\ &+\int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr;\quad u\in G,\quad v\in G.\end{aligned} \tag{4}$$

Наведемо необхідні в подальшому твердження.

Лема 1. Для вектор-функції $u(r)\in G$ та $v(r)\in G$ справджується базова тотожність

$$\begin{aligned}&\left[u_k(r)v_k'(r) - u_k'(r)v_k(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \\ &= \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r) - u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}.\end{aligned} \tag{5}$$

Зауваження. Якщо для компонент $u_j(r)$ вектор-функції умови спряження будуть неоднорідними

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk},\quad j,k=1,2, \tag{6}$$

то базова тотожність (5) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}&\left[u_k(r)v_k'(r) - u_k'(r)v_k(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \\ &= \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r) - u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} + \\ &+\frac{1}{c_{1k}}[(\alpha_{12}^k\frac{d}{dr}+\beta_{12}^k)v_{k+1}\Big|_{r=R_k}\cdot\omega_{2k} - (\alpha_{22}^k\frac{d}{dr}+\beta_{22}^k)v_{k+1}\Big|_{r=R_k}],\end{aligned} \tag{7}$$

де $v(r)\in G$, $k=1,2$.

Лема 2. Гібридний диференціальний оператор $M_{(\alpha)}$, визначений рівністю (1), самоспряжений:

$$\left(M_{(\alpha)}[u],v(r)\right) = \left(u(r),M_{(\alpha)}[v]\right).$$

Доведення лем один та два стандартне [2].

Із самоспряженості оператора $M_{(\alpha)}$ випливає, що його власні числа дійсні. Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ має одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр неперервний [2]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)V_{(\alpha);1}(r,\beta) + \\ +\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{(\alpha);2}(r,\beta) + \theta(r - R_2)V_{(\alpha);3}(r,\beta). \quad (8)$$

При цьому функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\left(B^*_{\alpha_1} + b_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_0, R_1),$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2), \quad (9)$$
$$\left(B^*_{\alpha_2} + b_3^2\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_2, \infty),$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \ge 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_\alpha + b^2)v = 0$ утворюють функції $r^{-\alpha}\cos(b\ln r)$ та $r^{-\alpha}\sin(b\ln r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $\cos b_2 r$ та $\sin b_2 r$ [4].

В силу лінійності сингулярної спектральної задачі (2), (3), (9) покладемо $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r) + B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r),$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = A_2\cos(b_2 r) + B_2\sin(b_2 r), \quad (10)$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 r^{-\alpha_2}\cos(b_3 \ln r) + B_3 r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r).$$

Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення шести величин A_j, B_j $(j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1, R_0)A_1 + Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1, R_0)B_1 = 0;$$
$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1, R_1)B_1 - v^{11}_{j2}(b_2R_1)A_2 - v^{12}_{j2}(b_2R_1)B_2 = 0, \; j = 1,2;$$

$$\nu_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2+\nu_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2-Y_{\alpha_2;j2}^{21}(b_3,R_2)A_3-Y_{\alpha_2;j2}^{22}(b_3,R_2)B_3=0. \quad (11)$$

Алгебраїчна система (11) сумісна. Розв'язок її одержуємо звичайним способом [5]. Нехай $A_1=A_0Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_1,R_0), B_1=-A_0Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_1,R_0)$, де $A_0\neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи переходить в тотожну рівність. Для обчислення A_2,B_2 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$\nu_{j1}^{11}(b_2R_1)A_2+\nu_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2=-A_0\delta_{\alpha_1;j1}(b_1;R_0,R_1), \quad j=1,2. \quad (12)$$

Звідси знаходимо, що

$$A_2=\frac{A_0}{c_{21}b_2}[\delta_{\alpha_1;21}(b_1;R_0,R_1)\nu_{12}^{12}(b_2R_1)-\delta_{\alpha_1;11}(b_1;R_0,R_1)\nu_{22}^{12}(b_2R_1)], \quad (13)$$

$$B_2=\frac{A_0}{c_{21}b_2}[\delta_{\alpha_1;11}(b_1;R_0,R_1)\nu_{22}^{11}(b_2R_1)-\delta_{\alpha_1;21}(b_1;R_0,R_1)\nu_{12}^{11}(b_2R_1)].$$

У рівностях (11)—(13) прийняті позначення:

$$Y_{\alpha;jk}^{m1}(b,R_m)=[(\beta_{jk}^m-\alpha_{jk}^mR_m^{-1}\alpha)\cos(b\ln R_m)-bR_m^{-1}\alpha_{jk}^m\sin(b\ln R_m)]R_m^{-\alpha},$$

$$Y_{\alpha;jk}^{m2}(b,R_m)=[(\beta_{jk}^m-\alpha_{jk}^mR_m^{-1}\alpha)\sin(b\ln R_m)+bR_m^{-1}\alpha_{jk}^m\cos(b\ln R_m)]R_m^{-\alpha},$$

$$\nu_{jk}^{m1}(bR_m)=-\alpha_{jk}^m b\sin(bR_m)+\beta_{jk}^m\cos(bR_m),$$

$$\nu_{jk}^{m2}(bR_m)=\alpha_{jk}^m b\cos bR_m+\beta_{jk}^m\sin bR_m;$$

$$\delta_{\alpha_1;j1}(b_1;R_0,R_1)=Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_1,R_0)Y_{\alpha_1;j1}^{12}(b_1,R_1)-Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_1,R_0)Y_{\alpha_1;j1}^{11}(b_1,R_1); j=1,2.$$

При відомих A_2,B_2 для визначення величин A_3,B_3 отримуємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y_{\alpha_2;j2}^{21}(b_3,R_2)A_3+Y_{\alpha_2;j2}^{22}(b_3,R_2)B_3=A_0[c_{21}b_2]^{-1}a_{\alpha_1;j}(\beta), j=1,2. \quad (14)$$

У системі (14) беруть участь функції:

$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=\nu_{j2}^{11}(b_2R_1)\nu_{k1}^{22}(b_2R_2)-\nu_{j2}^{12}(b_2R_1)\nu_{k1}^{21}(b_2R_2); j=1,2;$$

$$a_{\alpha_1;j}(\beta)=\delta_{\alpha_1;11}(b_1;R_0,R_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2)-\delta_{\alpha_1;21}(b_1;R_0,R_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2).$$

Із алгебраїчної системи (14) одержуємо:

$$A_0=c_{21}b_2c_{22}b_3R_2^{-(2\alpha_2+1)}, A_3=\omega_{(\alpha);2}(\beta), B_3=-\omega_{(\alpha);1}(\beta), \quad (15)$$

$$\omega_{(\alpha);j}(\beta)=a_{\alpha_1;1}(\beta)Y_{\alpha_2;22}^{2j}(b_3,R_2)-a_{\alpha_1;2}(\beta)Y_{\alpha_2;12}^{2j}(b_3,R_2); \quad j=1,2.$$

Підставимо визначені формулами (13) та (15) величини A_j,B_j у рівності (10). Маємо функції:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=c_{21}b_2c_{22}b_3R_2^{-(2\alpha_2+1)}[Y_{\alpha_1;11}^{02}(b_1;R_0)r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)-$$

$$-Y_{\alpha_1;11}^{01}(b_1;R_0)r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)],$$

$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = c_{22}b_3R_2^{-(2\alpha_2+1)}[\delta_{\alpha_1;21}(b_1;R_0,R_1)\varphi_{12}^1(b_2R_1,b_2r) -$$
$$-\delta_{\alpha_1;11}(b_1;R_0,R_1)\varphi_{22}^1(b_2R_1,b_2r)],$$
$$\varphi_{j2}^1(b_2R_1,b_2r) = \nu_{j2}^{12}(b_2R_1)\cos b_2r - \nu_{j2}^{11}(b_2R_1)\sin b_2r, \qquad (16)$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = [\omega_{(\alpha);2}(\beta)\cos(b_3\ln r) - \omega_{(\alpha);1}(\beta)\sin(b_3\ln r)]r^{-\alpha_2}.$$

Згідно рівності (8) спектральна функція $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ визначена.

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega_{(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$$

дозволяє визначити пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{(\alpha)}$ [2]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta). \qquad (17)$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \qquad (18)$$

Математичним обґрунтуванням правил (17), (18) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо функція

$$f(r) = [\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1-\frac{1}{2}} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\cdot 1 + \theta(r-R_2)r^{\alpha_2-\frac{1}{2}}]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині (R_0,∞), то для будь-якого $r \in I_2^+$ має місце інтегральне зображення

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} V_{(\alpha)}(r,\beta)\int_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta. \qquad (19)$$

Доведення. В основі доведення теореми знаходиться невласний подвійний інтеграл

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \psi(\lambda)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \psi(\beta), \qquad (20)$$

якщо $\beta = \lambda \in (0,\infty)$, та дорівнює нулю, якщо $\lambda = \beta \overline{\in} (0,\infty)$.

Функція $\psi(\lambda)$ забезпечує абсолютну й рівномірну збіжність внутрішнього інтегралу. Рівність (20) встановлюється методом дельта-подібної послідовності — ядро Діріхле [6].

Припустимо тепер, що функція

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta. \qquad (21)$$

Помножимо рівність (21) на вираз $V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$ й проінтегруємо по r від $r=R_0$ до $r=\infty$. Внаслідок рівності (20) маємо:

$$\int_{R_0}^\infty g(r)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{R_0}^\infty\int_0^\infty \psi(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr= \qquad (22)$$

$$=\begin{cases}\psi(\lambda), \text{ якщо } \beta=\lambda\in(0,\infty)\\ 0,\ \textit{якщо}\ \beta=\lambda\bar{\in}(0,\infty).\end{cases}$$

Підставивши визначену формулою (22) функцію

$$\psi(\beta)=\int_{R_0}^\infty g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho$$

у рівність (21), приходимо до інтегрального зображення (19).

Доведення теореми завершено.

Зауваження. Якщо функція $g(r)$ кусково-неперервна, то в рівності (19) треба $g(r)$ замінити на $\frac{1}{2}[g(r-0)+g(r+0)]$.

Введемо до розгляду величини та функції:

$$d_1=a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1},d_2=a_2^2\sigma_2c_{12}^{-1},$$

$$\tilde{g}_1(\beta)=\int_{R_0}^{R_1} g_1(r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta)=\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2dr,\ \ \tilde{g}_3(\beta)=\int_{R_2}^{\infty} g_3(r)V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3r^{2\alpha_2-1}dr,$$

$$Z_{(\alpha);i2}^k(\beta)=\left(\alpha_{i2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^k\right)V_{(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k};\ \ i,k=1,2.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо функція $f(r)=\{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)];\ \ g_2''(r);B_{\alpha_2}^*[g_2(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{0}\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0}=g_0,$$
$$\lim_{r\to\infty}\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}-g_3\frac{dV_{(\alpha);3}}{dr}\right)\right]=0 \qquad (23)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}, \qquad (24)$$
$$j,k=1,2,$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (1):

$$H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[g(r)]]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i(\beta)+$$
$$+(-\alpha_{11}^{0})^{-1}V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)\sigma_1 a_1^2 R_0^{2\alpha+1}g_0+ \qquad (25)$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{(\alpha);12}^{k}(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{(\alpha);22}^{k}(\beta_n)\omega_{1k}\right].$$

Доведення. Згідно правила (17) маємо, що

$$H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[g(r)]]=\int_{R_0}^{\infty}M_{(\alpha)}[g(r)]V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr=$$
$$=\int_{R_0}^{R_1}a_1^2B_{\alpha_1}^{*}[g_1(r)]V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+ \qquad (26)$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}a_2^2\frac{d^2g_2}{dr^2}V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr+\int_{R_2}^{\infty}a_3^2B_{\alpha_2}^{*}[g_3(r)]V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr.$$

Проінтегруємо у рівності (26) під знаком інтегралів два рази частинами:

$$H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[g(r)]]=a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr}V_{(\alpha);1}-g_1\frac{dV_{(\alpha);1}}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_0}^{R_1}+$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)(a_1^2B_{\alpha_1}^{*}[V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)])\times$$
$$\times\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+a_2^2\sigma_2\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}-g_2\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2}+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)\left(a_2^2\,\frac{d^2V_{(\alpha);2}}{dr^2}\right)\sigma_2 dr + \tag{27}$$

$$+\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}-g_3\,\frac{dV_{(\alpha);3}}{dr}\right)\right]_{R_2}^{\infty}$$

$$+\int_{R_2}^{\infty} g_3(r)\Big(a_3^2 B_{\alpha_2}^{*}[V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)]\Big)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr.$$

Якщо $\alpha_{11}^0 \neq 0$, то маємо:

$$-R_0^{2\alpha_1+1}\Big(g_1'(R_0)V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)-g_1(R_0)V_{(\alpha);1}'(R_0,\beta_n)\Big)a_1^2\sigma_1 =$$

$$=(-\alpha_{11}^0)^{-1}a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\times[\Big(\alpha_{11}^0 g_1'(R_0)+\beta_{11}^0 g_1(R_0)\Big)V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)-$$

$$-\alpha_{11}^0 g_1(R_0)V_{(\alpha);1}'-\beta_{11}^0 g_1(R_0)V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)]=$$

$$=-(\alpha_{11}^0)^{-1}V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}[(\alpha_{11}^0\,\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0)g_1(r)]\Big|_{r=R_0}+ \tag{28}$$

$$+(\alpha_{11}^0)^{-1}a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_1(R_0)\times[(\alpha_{11}^0\,\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0)V_{(\alpha);1}(r,\beta)]\Big|_{r=R_0}=$$

$$=(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{(\alpha);1}(R_0,\beta)a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0.$$

Внаслідок базової тотожності (7) при $k=1$ знаходимо, що

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}(\frac{dg_1}{dr}V_{(\alpha);1}-g_1\,\frac{dV_{(\alpha);1}}{dr})\Big|_{r\,=\,R_1}-$$

$$-a_2^2\sigma_2(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}-g_2\,\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr})\Big|_{r\,=\,R_1}=$$

$$=(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\,\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2)(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}- \tag{29}$$

$$-g_2\,\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr})\Big|_{r\,=\,R_1}+a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\cdot c_{11}^{-1}\times$$

$$\times\Big(Z_{(\alpha);12}^1(\beta)\omega_{21}-Z_{(\alpha);22}^1(\beta)\omega_{11}\Big)=d_1\Big(Z_{(\alpha);12}^1(\beta)\omega_{21}-Z_{(\alpha);22}^1(\beta)\omega_{11}\Big),$$

тому що в силу вибору чисел σ_1 та σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\,\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}R_2^{2\alpha_2+1}\,\frac{c_{21}}{c_{11}}-\frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha_2+1}(1-1)\equiv 0.$$

Внаслідок базової тотожності (7) при $k=2$ знаходимо, що

$$a_2^2\sigma_2\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}-g_2\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}-$$

$$-R_2^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}-g_3\frac{dV_{(\alpha);3}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}a_3^2\sigma_3= \tag{30}$$

$$=\left(a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1}\right)\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}-g_3\frac{dV_{(\alpha);3}}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}+$$

$$+a_2^2\sigma_2c_{12}^{-1}[Z^2_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{22}--Z^2_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}]=d_2\left(Z^2_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{22}-Z^2_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}\right),$$

тому що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}}-R_2^{2\alpha_2+1}=R_2^{2\alpha_2+1}(1-1)\equiv 0\ .$$

Із диференціальних тотожностей

$$[a_1^2B^*_{\alpha_1}+(\beta^2+k_1^2)]V_{(\alpha);1}(r,\beta)=0,\ \ [a_2^2\frac{d^2}{dr^2}+(\beta^2+k_2^2)]V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)=0,$$

$$[a_3^2B^*_{\alpha_2}+(\beta^2+k_3^2)]V_{(\alpha);3}(r,\beta)=0$$

знаходимо, що

$$\begin{aligned}a_1^2B^*_{\alpha_1}[V_{(\alpha);1}(r,\beta)]&=-(\beta^2+k_1^2)V_{(\alpha);1}(r,\beta),\\ a_2^2\frac{d^2}{dr^2}V_{(\alpha);2}(r,\beta)&=-(\beta^2+k_2^2)V_{(\alpha);2}(r,\beta),\\ a_3^2B^*_{\alpha_2}[V_{(\alpha);3}(r,\beta)]&=-(\beta^2+k_3^2)V_{(\alpha);3}(r,\beta_n).\end{aligned} \tag{31}$$

В силу умови обмеженості

$$\lim_{r\to\infty}[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)\frac{dV_{(\alpha);3}}{dr}\right)]=0. \tag{32}$$

Підставимо одержані функціональні залежності (28)—(32) у рівність (27). Будемо мати:

$$\begin{aligned}&H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[g(r)]]=(-\alpha_{11}^0)\ V_{(\alpha);1}(R_0,\beta\ )a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0+\\ &+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z^k_{(\alpha);12}(\beta\ )\omega_{2k}-Z^k_{(\alpha);22}(\beta\ )\omega_{1k}]-\sum_{i=1}^{3}(\beta^2+k_i^2)\tilde g_i(\beta).\end{aligned} \tag{33}$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{3}(\beta^2+k_i^2)\tilde g_i(\beta)=\beta^2\sum_{i=1}^{3}\tilde g_i(\beta)+\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde g_i(\beta)=\beta^2\tilde g(\beta)\ \ +\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde g_i(\beta),$$

то рівність (33) співпадає з рівністю (25).

Доведення теореми завершено.

Висновок. Побудовані правила (17), (18) та (25) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93–106.
2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : 1971. — 432 с.
6. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера — (Фурє, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Львів, 2009. — 76 с. — (Препринт / НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 02.09).

The method of delta-like sequence (Dirichlet kernel) introduced a hybrid integral transformations, generated by the polar axis $r \geq R_0 > 0$ with two points of interface hybrid differential Euler-Fourier-Euler.

Key words: *differential operator Euler, differential operator Fourier, hybrid integral transformation, kernel Dirichlet, weight function, spectral function, spectral density, integral image, the main identity.*

Отримано: 18.03.2013